UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 00184438 0

74 2477 30

ERNST PASCAL,
ORDENTLICHER PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT ZU PAVIA.

REPERTORIUM DER ÖHEREN MATHEMATIK

(DEFINITIONEN, FORMELN, THEOREME, LITERATUR)

AUTORISIRTE DEUTSCHE AUSGABE
NACH EINER NEUEN BEARBEITUNG DES ORIGINALS
VON

A. SCHEPP
OBERLEUTNANT A. D. ZU WIESBADEN.

ANALYSIS UND GEOMETRIE.

II. THEIL: DIE GEOMETRIE.

81365
1 3

LEIPZIG
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1902.

UNIVERSITY OF TORONTO
1
1982

QA
37
P375
Bd. 2

ALLE RECHTE,
EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN

Vorbemerkung.

An der Herstellung der deutschen Ausgabe des zweiten Bandes des Pascal'schen Repertoriums, dessen italienischer Titel

„Repertorio di matematiche superiori (definizioni, formole, teoremi cenni bibliografici) per Ernesto Pascal, prof. ordinario nella R. Università di Pavia, II. Geometria, Ulrico Hoepli, editore librajo della real casa, Milano 1900“

lautet, haben sich in derselben Art, wie bei dem ersten Band durch Zusätze und Verbesserungen bei der Durchsicht der Druckbogen die Herren Professor Dr. F. Engel in Leipzig Privatdocent Dr. A. Loewy in Freiburg i. B., sowie der Herr Verfasser Professor E. Pascal in Mailand betheiligt. Der Herausgeber spricht ihnen für ihre gütigen Bemühungen seinen verbindlichsten Dank aus.

Auf die Zusätze und Berichtigungen zu Band 1 und 2 am Ende des Buches sei besonders hingewiesen.

Wiesbaden, im November 1901.

A. S.

Inhaltsverzeichniss.

Kapitel I. **Die Geometrie der stetigen Grundgebilde.** Seite

§ 1. Einleitende Definitionen und Begriffe 1
§ 2. Die Geometrie der Gebilde 1ter Stufe 6
§ 3. Die Geometrie der Gebilde 2ter Stufe. Das ebene Punkt- und Strahlensystem 19
§ 4. Die Geometrie der Grundgebilde 3ter Stufe. Das räumliche Punkt- und Ebenensystem 34

Kapitel II. **Die Geometrie der unstetigen Gebilde.**

§ 1. Allgemeines 48
§ 2. Projective Eigenschaften der Gruppen von Punkten auf einer Geraden. Polarität. Harmonische Mittelpunkte. . . 50
§ 3. Lineare Systeme von Punktgruppen. Allgemeine Involutionen. Geometrie der binären Formen ersten bis vierten Grads 53
§ 4. Projective Eigenschaften der Dreiecke, Vierecke, Sechsecke etc. 57
§ 5. Die metrische Geometrie des ebenen Dreiecks. Formeln der ebenen Trigonometrie 60
§ 6. Die metrische Geometrie des Dreiflachs und des sphärischen Dreiecks. Formeln der sphärischen Trigonometrie 61
§ 7. Moderne Geometrie des Dreiecks, Lemoine'sche und Brocard'sche Punkte und Kreise. Euler'sche Gerade. Der Neunpunkte- oder Feuerbach'sche Kreis. Kreise Taylor's, Tucker's. Simpson'sche Gerade 67

Kapitel III. **Die Kegelschnitte.**

§ 1. Die projective Erzeugung der Kegelschnitte. Unmittelbar daraus hervorgehende Eigenschaften 7
§ 2. Die projectiven Fundamentaleigenschaften der Kegelschnitte. Die Theoreme von Pascal, Brianchon, Desargues 7
§ 3. Hauptformeln der analytischen Geometrie der Kegelschnitte 7
§ 4. Die hauptsächlichsten metrischen Eigenschaften der Kegelschnitte 8
§ 5. Focale Eigenschaften der Kegelschnitte 9
§ 6. Kegelschnittbüschel 9
§ 7. Die geometrische Interpretation der invarianten Bildungen des Systems einer oder zweier quadratischer ternärer Formen 9

Kapitel IV. **Die Flächen 2ter Ordnung.**

Seite

§ 1. Die projective Erzeugung der Flächen 2ter Ordnung. Polarität 100
§ 2. Die wichtigsten Formeln der analytischen Geometrie der Flächen 2ter Ordnung 105
§ 3. Focale Eigenschaften der Flächen 2ter Ordnung 117
§ 4. Die metrischen Eigenschaften der Flächen 2ter Ordnung. Gleichseitige Flächen 2ter Ordnung 120
§ 5. Flächenbüschel und Flächennetze 2ter Ordnung 122

Kapitel V. **Allgemeine Theorie der ebenen algebraischen Curven.**

§ 1. Allgemeines. Singuläre Punkte. Die Plücker'schen Formeln. Die Discriminante 126
§ 2. Die Theorie der Polarität. Covariante Curven 134
§ 3. Lineare Systeme ebener Curven 141
§ 4. Die Punktgruppen auf einer algebraischen Curve 148
§ 5. Birationale Transformationen der Ebene oder ebener Curven. Mehrdeutige Transformationen 156

Kapitel VI. **Die Theorie der ebenen Connexe.**

§ 1. Allgemeines 163
§ 2. Conjugirter Connex. Geschlecht der Connexe und der Coincidenzen 165
§ 3. Die Hauptcoincidenz eines Connexes. Integralcurven eines Connexes 168
§ 4. Der Connex (1, 1) 171
§ 5. Der Connex (1, 2) 173
§ 6. Die Connexe $(1, m)$ und Literaturangaben über den Connex (2, 2) 174

Kapitel VII. **Die ebenen Curven 3ter Ordnung.**

§ 1. Allgemeines über die Curven 3ter Ordnung. Wendepunkte. Tangentialpunkte 177
§ 2. Projective Erzeugungsweisen der Curven 3ter Ordnung . . 182
§ 3. Canonische Formen der Gleichung der Curven 3ter Ordnung. Verschiedene Classificationen dieser Curven. . . . 183
§ 4. Geometrische Interpretation der Invarianten und Covarianten der ternären cubischen Form 188

Kapitel VIII. **Die ebenen Curven 4ter Ordnung.**

§ 1. Allgemeines. Erzeugungsarten der Curven 4ter Ordnung. Doppeltangenten. Berührungskegelschnitte und Berührungscurven 3ter Ordnung 192
§ 2. Curven 4ter Ordnung mit singulären Punkten 200

Kapitel IX. **Allgemeine Theorie der algebraischen Flächen und algebraischen Raumcurven.**

§ 1. Allgemeines. Abwickelbare und windschiefe Flächen. Schnitte von Flächen. Die Geometrie auf den algebraischen Flächen 204

Seite

§ 2. Analytische Darstellung der gewundenen Curven. Die Monoidflächen Cayley's 214
§ 3. Classification der gewundenen Curven 216
§ 4. Singuläre Punkte der Flächen und Raumcurven. Ihre charakteristischen Zahlen. Vielfache Secanten der Raumcurven. Das Geschlecht. Die Cayley'schen Formeln. Berührungen von Flächen. 221
§ 5. Polarflächen. Covariante Flächen 232
§ 6. Lineare Flächensysteme. 234
§ 7. Birationale Transformation des Raums oder der Flächen. Abbildung der Flächen auf eine Ebene 236

Kapitel X. **Raumcurven verschiedener Ordnungen.**

§ 1. Die Curven auf den Flächen 2ter Ordnung. Die sphärischen Curven 243
§ 2. Die Raumcurven 3ter Ordnung 248
§ 3. Die Raumcurven 4ter Ordnung 1ter Species 254
§ 4. Raumcurven 4ter Ordnung 2ter Species 259
§ 5. Die Raumcurven 5ter, 6ter, etc. Ordnung 264
§ 6. Die rationalen Raumcurven 269

Kapitel XI. **Die Flächen 3ter Ordnung.**

§ 1. Allgemeines. Die Flächen mit Doppelpunkten. Geometrische Erzeugung 272
§ 2. Das Sylvester'sche Pentaeder. Die Hesse'sche oder Kernfläche der Fläche 3ter Ordnung 280
§ 3. Die Geraden der Fläche 3ter Ordnung. Die dreifachen Tangentialebenen. Die Polsechsflache Cremona's 284
§ 4. Classification der reellen allgemeinen Flächen 3ter Ordnung. 290
§ 5. Ebene Abbildungen der Flächen 3ter Ordnung 292

Kapitel XII. **Die Flächen 4ter Ordnung.**

§ 1. Allgemeines. Flächen mit Doppelpunkten und Doppellinien. 294
§ 2. Die Flächen 4ter Ordnung mit Doppelpunkten 296
§ 3. Die Kummer'sche Fläche 299
§ 4. Das Cayley'sche Tetraedroid und die Wellenfläche . . . 308
§ 5. Flächen 4ter Ordnnng, die unendlich viele Kegelschnitte enthalten 312
§ 6. Die Flächen 4ter Ordnung mit Doppel- oder Cuspidalkegelschnitt 313
§ 7. Die Cycliden. Die Dupin'sche Cyclide 321
§ 8. Die Flächen 4ter Ordnung mit einer Doppelgeraden . . . 328
§ 9. Die Römerfläche Steiner's. 331
§ 10. Die Regelflächen 4ter Ordnung. 335

Kapitel XIII. **Flächen von höherer als der 4ten Ordnung. Regelflächen.**

§ 1. Flächen 5ter Ordnung. die nicht Regelflächen sind. . . . 347
§ 2. Developpable Flächen 5ter Ordnung 350
§ 3. Windschiefe Regelflächen 5ter Ordnung. 353
§ 4. Flächen 6ter Ordnung oder Classe 357

Seite

§ 5. Die Developpablen 7ter Ordnung 362
§ 6. Regelflächen von beliebiger Ordnung 363
§ 7. Rationale Flächen. Flächen mit rationalen oder elliptischen oder hyperelliptischen Schnitten. 370

Kapitel XIV. **Die Liniengeometrie und die Kugelgeometrie im Raum.**

§ 1. Allgemeines. Liniencoordinaten im Raum 373
§ 2. Der allgemeine algebraische Complex n^{ten} Grads. Die symbolische Bezeichnung von Battaglini und Clebsch. Invariante Formen der Complexe 379
§ 3. Die linearen Complexe 384
§ 4. Büschel und Netze linearer Complexe 386
§ 5. Die linearen Involutionscomplexe Klein's 388
§ 6. Complexe 2ten Grads im Allgemeinen 389
§ 7. Classification der Complexe 2ten Grads 393
§ 8. Der Battaglini'sche oder harmonische Complex 402
§ 9. Der Reye'sche oder tetraedrale Complex 403
§ 10. Allgemeine Theorie der Liniencongruenzen 405
§ 11. Congruenzen 1ter Ordnung. 410
§ 12. Congruenzen 2ter Ordnung ohne singuläre Linien 411
§ 13. Congruenzen 2ter Ordnung mit singulären Linien 416
§ 14. Die Kugelgeometrie 420

Kapitel XV. **Abzählende Geometrie.**

§ 1. Allgemeines. Princip der Erhaltung der Anzahl 424
§ 2. Symbolischer Calcül der Bedingungen. Incidenz- und Coincidenzformeln. Sätze über die Berührungen 426
§ 3. Die Charakteristikentheorie 433
§ 4. Methode zur Ermittelung der charakteristischen Zahlen eines Systems von Gebilden. Uebersicht über verschiedene wichtige Resultate der abzählenden Geometrie . . 436

Kapitel XVI. **Infinitesimaltheorie der Curven und Flächen.**

§ 1. Tangenten und Normalen an Curven und Flächen . . . 442
§ 2. Concavität und Convexität der ebenen Curven. Inflexion. 446
§ 3. Inhalt ebener Flächen. Länge der Curvenbogen. Volumina von Körpern und Inhalt beliebiger Flächen 447
§ 4. Krümmung von Plan- und Raumcurven. Torsion. Natürliche Gleichungen 455
§ 5. Berührung von Curven und Flächen. 462
§ 6. Enveloppen von Curven und Flächen. Abwickelbare Flächen 464
§ 7. Evoluten und Evolventen 466
§ 8. Krummlinige Coordinaten. Linienelement der Flächen. Fundamentaldifferentialformen der Flächen. Conforme Abbildung. Sphärische Abbildung. 467
§ 9. Auf den Flächen gezogene Linien. Krümmungslinien. Conjugirte Tangenten. Geodätische Linien. Asymptotenlinien 475

Kapitel I.

Die Geometrie der stetigen Grundgebilde.

§ 1. Einleitende Definitionen und Begriffe.

Mit dem Namen *geometrische Grundgebilde 1ter Stufe* bezeichnet man die folgenden drei geometrischen Figuren:

1. *Die gerade Punktreihe,* d. h. die Gesammtheit aller auf einer Geraden liegenden Punkte, *der Elemente des Gebildes.* Die Gerade heisst *der Träger der Punktreihe.*

2. *Das Strahlenbüschel*, d. h. die Gesammtheit aller Geraden einer Ebene, welche durch einen Punkt, *den Träger oder Scheitel des Büschels,* gehen.

3. *Das Ebenenbüschel,* d. h. die Gesammtheit aller Ebenen des Raums, welche eine Gerade, *den Träger oder die Axe des Büschels,* gemeinschaftlich haben.

Geometrische Gebilde 2ter Stufe nennt man die folgenden vier geometrischen Figuren:

1. *Das ebene Punktsystem*, d. h. die Gesammtheit aller Punkte einer Ebene.

2. *Das ebene Strahlensystem,* d. h. die Gesammtheit aller in einer Ebene liegenden Strahlen.

3. *Das Strahlenbündel,* d. h. die Gesammtheit aller durch einen Punkt gehenden Geraden des Raums.

4. *Das Ebenenbündel,* d. h. die Gesammtheit aller durch einen Punkt gehenden Ebenen des Raums.

Geometrische Gebilde 3ter Stufe heissen schliesslich die folgenden:

1. *Das räumliche Punktsystem,* d. h. die Gesammtheit aller Punkte des Raums.

2. *Das räumliche Ebenensystem*, d. h. die Gesammtheit aller Ebenen des Raums.

Der Kürze wegen pflegt man auch die Gesammtheit aller Punkte und Strahlen eines ebenen Punkt- und Strahlensystems *ein ebenes System* und die Gesammtheit aller Strahlen und Ebenen der denselben Punkt als Träger enthaltenden beiden Strahlen- und Ebenenbündel *ein räumliches Bündel* oder *Bündel* schlechtweg zu nennen. Die Gesammtheit der beiden Gebilde 3ter Stufe endlich heisst *der Raum.*

Wenn ein geometrisches Gebilde 1ter Stufe gegeben ist, so lässt sich eine solche Correspondenz zwischen seinen Elementen und den Zahlen der natürlichen Reihe herstellen, dass jedem Element eine einzige Zahl und jeder Zahl nur ein einziges Element entspricht, und dass ferner, wenn eine Zahl N und das entsprechende Element a festgestellt sind, sich bei beliebig klein gegebenem σ immer eine solche Grösse τ finden lässt, für welche die Elemente, die allen zwischen N und $N+\tau$ liegenden Zahlen entsprechen, einen Abstand von a haben (wenn es sich um Punktreihen handelt) oder (bei Büscheln) einen Winkel mit a bilden, der kleiner als σ ist. Dieser beiden Eigenschaften wegen heisst die Correspondenz *ein-eindeutig* und *stetig.*

Ist ein geometrisches Gebilde 2ter oder 3ter Stufe gegeben, so lässt sich auf ähnliche Art eine ein-eindeutige und stetige Correspondenz zwischen seinen Elementen und den Paaren bez. Tripeln der natürlichen Zahlen herstellen, wenn man „stetige Correspondenz" so definirt, wie es eben bei den Gebilden 1ter Stufe geschehen ist.

Die Zahlen, welche auf solche Art den Elementen des gegebenen Gebildes entsprechen, heissen *die Coordinaten der Elemente dieses Gebildes.*

Die Gebilde 1ter, 2ter, 3ter Stufe sind Gebilde mit einer bez. zwei und drei Coordinaten.

Man sagt auch, die Gebilde 1ter, 2ter, 3ter Stufe seien *von einer, zwei, bez. drei Dimensionen* oder sie enthalten ∞^1, ∞^2 ∞^3 Elemente.

Von einem festen Centrum, dem Projectionscentrum aus eine aus Punkten und Geraden bestehende Figur *projiciren,* heisst die Strahlen construiren, welche von dem Centrum aus durch die Punkte der Figur gehen, und die Ebenen ziehen, welche das feste Centrum und die Geraden der Figur verbinden.

Von einer festen Geraden, der Projectionsaxe aus eine aus Punkten bestehende Figur *projiciren,* heisst, die durch die fest

Gerade und jeden der gegebenen Punkte gehenden Ebenen construiren.

Eine aus Ebenen und Geraden zusammengesetzte Figur *mit einer Ebene schneiden* bedeutet, die Schnitte der schneidenden Ebene mit den gegebenen Ebenen und Geraden construiren.

Eine aus Ebenen bestehende Figur *mit einer Geraden schneiden,* heisst die Schnitte der Geraden mit allen Ebenen der Figur construiren.

Die geometrischen Gebilde derselben Stufe werden durch Projectionen und Schnitte auseinander abgeleitet.

In der modernen Geometrie ist das Studium der Zuordnungen oder Correspondenzen zwischen den Figuren oder den geometrischen Gebilden besonders dann von grosser Bedeutung, wenn es den Zweck verfolgt, die Eigenschaften einer Figur aus den Eigenschaften der ihr entsprechenden Figur abzuleiten.

Eine Correspondenz kann *ein-eindeutig* sein oder nicht. Sie ist *ein-eindeutig,* wenn jedem Element des einen der beiden Gebilde ein einziges Element des anderen entspricht und umgekehrt.

Die beiden in Beziehung gesetzten Gebilde können auch *superponirt* oder *conlocal* (Weyr, *Projectivische Geometrie,* Wien 1883) sein, d. h. *denselben Träger* haben. In diesem Fall kann die Correspondenz derart sein, dass einem Element immer dasselbe andere Element entspricht, mag nun das erstere als dem einen oder dem anderen Gebilde angehörig betrachtet werden; eine solche Beziehung heisst *involutorisch*; man sagt alsdann auch, *die Elemente entsprechen sich auf doppelte Art.*

Zu den einfachsten Correspondenzen gehören die *Projectivität*, die man auch *Collineation* oder *Homographie* nennt, und von welcher die *Homologie* (Poncelet) und die *Perspectivität* specielle Fälle sind; ferner die *Dualität*, auch *Correlation* oder *Reciprocität* genannt.

Von zwei geometrischen Grundgebilden sagt man, sie seien *projectiv aufeinander bezogen* oder stehen *in projectiver Correspondenz* oder einfach sie seien *projectiv,* wenn sich zwischen ihren Elementen eine solche Beziehung herstellen lässt, dass man das eine Gebilde aus dem anderen mittelst einer endlichen Anzahl von Projectionen oder Schnitten ableiten kann. Anstatt *projectiver Gebilde* kann man ihnen auch den Namen *homographischer oder collinearer Gebilde* geben. Diese Definition gilt

nicht für Gebilde 3ter Stufe; für die letzteren kann die folgende gegeben werden:

Zwei Gebilde 2ter oder 3ter Stufe heissen *projectiv*, wenn ihre Elemente derselben Stufe sich ein-eindeutig derart entsprechen, dass Elementen, die einander angehören, wieder einander angehörige Elemente zugeordet sind.

Zwei zu einem dritten projective Gebilde sind auch unter sich projectiv.

Zwei Grundgebilde sind *perspectiv* in den folgenden Fällen:

1) Zwei Punktreihen, wenn sie Schnitte desselben Strahlenbüschels sind.

2) Zwei Ebenenbüschel, wenn sie von zwei verschiedenen Centren aus dasselbe Strahlenbüschel projiciren.

3) Zwei Strahlenbüschel, wenn sie dieselbe Punktreihe von zwei verschiedenen Centren aus projiciren, oder Schnitte desselben Ebenenbüschels sind.

4) Eine Punktreihe und ein Strahlen- (oder Ebenen-) Büschel oder auch ein Strahlen- und ein Ebenenbüschel, wenn das erste Gebilde ein Schnitt des zweiten ist.

5) Zwei ebene Punkt- oder Strahlensysteme, wenn sie Schnitte desselben Bündels sind.

6) Zwei Bündel, wenn sie von zwei verschiedenen Centren aus dasselbe ebene Punkt- bez. Strahlensystem projiciren.

7) Ein ebenes Punkt- oder Strahlensystem und ein Bündel, wenn das erste Gebilde ein Schnitt des zweiten ist.

Zwei superponirte ebene Systeme heissen *homolog*, wenn sie Schnitte zweier perspectiver Bündel sind; zwei Bündel mit demselben Scheitel heissen *homolog*, wenn sie von dem Scheitel aus zwei perspective ebene Systeme projiciren.

Zwei ebene Systeme nennt man *dual*, *reciprok* oder *correlativ*, wenn die Punkte des einen ein-eindeutig den Geraden des anderen entsprechen und umgekehrt, und wenn die Beziehung derart ist, dass Elementen, die einander angehören, wieder einander angehörige Elemente zugeordnet sind.

Zwei Räume nennt man *dual*, *reciprok* oder *correlativ*, wenn die *Punkte*, *Geraden* und *Ebenen* des einen ein-eindeutig bez. den *Ebenen*, *Geraden* und *Punkten* des anderen derart entsprechen, dass einander angehörigen Elementen Elemente zugeordnet sind, die ebenfalls einander angehören.

Projectiv wird jede Eigenschaft einer Figur genannt, welche bestehen bleibt, wenn man an die Stelle der Figur eine andere ihr *projective* substituirt. Jede solche Eigenschaft, welche wesentlich von den Massen der Abstände, Winkel, Flächeninhalte etc. abhängt, heisst *metrische Eigenschaft.*

Es giebt metrische Eigenschaften, die auch projectiv sind.

Graphisch, descriptiv oder *Eigenschaft der Lage* heisst jede Eigenschaft, die sich ausschliesslich auf die Lage der Elemente der Figur bezieht und aus welcher jeder Begriff von *Grösse,* welcher Art er auch sei, entfernt ist. Dahin gehört z. B., dass eine Linie oder Fläche durch gewisse Punkte geht oder dass mehrere Linien oder Flächen gewisse Punkte oder Linien gemeinschaftlich haben etc.

Jede graphische Eigenschaft ist immer projectiv.

Die graphischen Eigenschaften der Figuren sind einem Gesetz unterworfen, welches *das Princip der Dualität oder Correlation in der Ebene und im Raume* genannt wird:

Jedes Theorem, welches eine graphische Eigenschaft einer ebenen Figur ausdrückt, bleibt bestehen, wenn man überall die Elemente Gerade und Punkt in die Elemente Punkt und Gerade verwandelt und an die Stelle der Elemente, die sich angehören, wieder sich angehörige Elemente substituirt.

Jedes Theorem, welches eine graphische Eigenschaft einer räumlichen Figur ausdrückt, behält seine Gültigkeit, wenn man überall die Elemente Punkt und Ebene in die Elemente Ebene und Punkt verwandelt, das Element Gerade unverändert lässt und die Elemente, welche einander angehören, wieder durch einander angehörige Elemente ersetzt.

Die beiden Operationen des Projicirens von einem Centrum (oder einer Axe) aus und des Schneidens mit einer Ebene (oder Geraden) sind zwei duale Operationen im Raum; ebenso sind die beiden anderen des Projicirens von einem Centrum in einer Ebene aus und des Schneidens mit einer Geraden in einer Ebene duale Operationen in der Ebene.

Zwei einem dritten correlative geometrische Gebilde sind projectiv zueinander.

Eine Dualität zweier superponirter Gebilde (mit demselben Träger) kann auch involutorisch sein und heisst dann *Polarität.*

Das *Polaritätsprincip* ist daher nur ein specieller Fall des Dualitätsprincips.

Nach dem Princip der Dualität entspricht einer ebenen Curve, die als Ort von Punkten angesehen wird, eine andere,

welche als Einhüllende der Tangenten in diesen Punkten betrachtet wird; d. h., den Punkten einer Curve entsprechen die Tangenten einer anderen.

In der Geometrie ist der Begriff der *unendlich fernen Elemente* grundlegend.

Man sagt:

Alle parallelen Geraden einer Ebene treffen sich in einem unendlich fernen Punkt.

In einer Ebene gibt es so viele unendlich ferne Punkte, als Richtungen der Geraden in dieser Ebene möglich sind.

Diese Punkte liegen sämmtlich auf einer Geraden, der unendlich fernen Geraden der Ebene.

Alle parallelen Ebenen des Raums treffen sich in einer unendlich fernen Geraden.

Alle unendlich fernen Geraden des Raums sowie alle unendlich fernen Punkte liegen sämmtlich in einer Ebene, welche die unendlich ferne Ebene des Raums heisst.

Zwar werden die *discontinuirlichen Gebilde* erst in dem folgenden Kapitel behandelt, doch wird es zum Verständniss der nächsten Paragraphen nöthig sein, die Definition des vollständigen Vierecks und Vierseits bereits hier vorauszuschicken.

Vollständiges ebenes Viereck heisst die Figur, welche von vier Punkten (*Ecken*) einer Ebene (von denen keine drei in einer Geraden liegen) und den sechs Geraden (*Seiten*) gebildet wird, welche diese Punkte zu je zweien verbinden; die drei Schnittpunkte der Gegenseiten, d. h. derjenigen Seiten, die sich nicht in einem der gegebenen Eckpunkte treffen, bilden ein Dreieck, welches das *Diagonaldreieck* heisst.

Vollständiges ebenes Vierseit wird die Figur genannt, die aus vier Geraden (*Seiten*) einer Ebene (von denen keine drei durch einen Punkt gehen) und aus sechs Punkten (*Ecken*) gebildet ist, in welchen diese Seiten sich zu je zweien schneiden; die drei Geraden, welche die Gegenecken, d. h. die nicht auf derselben Seite gelegenen Ecken verbinden, bilden das sogenannte *Diagonaldreiseit*.

§ 2. Die Geometrie der Gebilde 1ter Stufe.

1. Die gerade Punktreihe. — Eine Gerade kann von einem ihrer Punkte aus in zwei Richtungen durchlaufen werden

die eine dieser Richtungen heisst die *positive*, die andere die *negative*. Jede Strecke der Geraden soll mit + oder — bezeichnet werden, je nachdem sie in positiver oder negativer Richtung durchlaufen wird.

Unter der Bezeichnung AB verstehen wir die Zahl, welche die Strecke misst, die von A anfangend bis B geht. Auf diese Art ist $AB = -BA$.

Zwischen den durch drei Punkte A, B, C einer Geraden bestimmten Strecken besteht die Relation:

$$AB + BC + CA = 0.$$

Für die durch vier Punkte A, B, C, D einer Geraden bestimmten Strecken gilt die Beziehung:

$$AB \cdot CD + AC \cdot DB + AD \cdot BC = 0.$$

Nennt man die Abstände der Punkte

$$1, 2, 3, \cdots$$

$\delta_{12}, \delta_{13}, \cdots$, *so besteht zwischen den Abständen dreier in einer Geraden liegender Punkte die Relation (in Determinantenform):*

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \delta_{12}^2 & \delta_{13}^2 \\ 1 & \delta_{21}^2 & 0 & \delta_{23}^2 \\ 1 & \delta_{31}^2 & \delta_{32}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Man sagt, vier Punkte A, B, C, D einer Geraden seien *harmonisch*, wenn zwischen den von ihnen begrenzten Strecken die Beziehung

$$\frac{1}{AC} - \frac{1}{AB} = \frac{1}{AB} - \frac{1}{AD}$$

oder

$$\frac{2}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}$$

oder auch

$$\frac{AC}{CB} = -\frac{AD}{DB}$$

besteht.

Bezeichnet man mit M den Mittelpunkt der Strecke AB, *so ist auch*

$$MC \cdot MD = \overline{MA}^2.$$

Die Punkte A und B heissen *conjugirt* zu einander, ebenso C und D.

Geometrisch: Die vier Punkte A, B, C, D nennt man *harmonisch*, wenn sich ein vollständiges Viereck so construiren lässt, dass zwei Gegenseiten sich in A schneiden, zwei andere Gegenseiten in B, die fünfte Seite durch C und die sechste (die Gegenseite zur fünften) durch D geht. *Kann man von solchen Vierecken eines construiren, so lassen sich unendlich viele ziehen.*

Wenn vier harmonische Punkte von einem Centrum aus auf eine Gerade projicirt werden, so erhält man wieder vier harmonische Punkte.

Sind drei Punkte A, B, C und die Ordnung, in welcher sie betrachtet werden sollen, gegeben, so ist dadurch auf eine einzige Art ein vierter Punkt D bestimmt, der mit ihnen in harmonischem Verhältniss steht, und zwar derart, dass er zu C conjugiert ist.

Wenn $ABCD$ ein harmonisches Gebilde ist, so sind auch die Gebilde $BACD$, $ABDC$, $BADC$ harmonisch.

In dem harmonischen Gebilde $ABCD$ werden die conjugirten Punkte A, B nothwendiger Weise durch die beiden anderen C, D getrennt.

In dem vollständigen Vierseit wird jede Diagonalseite harmonisch durch die beiden anderen Diagonalseiten getheilt.

Wenn vier Punkte A, B, C, D auf einer Geraden gegeben sind, so nennt man das Verhältniss der Abstände

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$$

das Doppelverhältniss oder anharmonische Verhältniss der vier Punkte und bezeichnet es mit $(ABCD)$.

Ein Doppelverhältniss ändert sich nicht, wenn man zwei Punkte miteinander vertauscht und zugleich auch die beiden anderen.

Vertauscht man die vier Punkte auf die sämmtlichen 24 möglichen Arten miteinander, so nimmt das Doppelverhältniss nur sechs verschiedene Werthe an, die sich auf einfache Art durch einen einzigen von ihnen ausdrücken lassen.

Wenn λ das Doppelverhältniss $(ABCD)$ bezeichnet, so sind diese sechs Werthe:

$$(ABCD) = \lambda,$$
$$(ABDC) = \frac{1}{\lambda}$$
$$(ACBD) = 1 - \lambda,$$
$$(ACDB) = \frac{1}{1-\lambda},$$
$$(ADBC) = \frac{\lambda - 1}{\lambda},$$
$$(ADCB) = \frac{\lambda}{\lambda - 1}.$$

Wenn zwei der vier Punkte zusammenfallen, so nimmt ihr Doppelverhältniss einen der Werthe 0, 1, ∞ *an.*

Sind die vier Punkte harmonisch, so erhält ihr Doppelverhältniss einen der Werthe -1, $\frac{1}{2}$, 2.

Die sechs anharmonischen Verhältnisse von vier reellen Punkten sind im Allgemeinen ungleich, es sei denn, es handele sich um einen der beiden vorstehenden Fälle, in welchen sie zu je zweien gleich sind und die sechs Verhältnisse sich daher auf nur drei verschiedene reduciren.

Wenn einer der Punkte der unendlich ferne Punkt ist, so wird das Doppelverhältniss

$$(ABC\infty) = \frac{AC}{BC}.$$

Ist das Doppelverhältniss $(ABCD)$ *gleich* λ, *so hat man*

$$\frac{\lambda - 1}{AB} = \frac{\lambda}{AC} - \frac{1}{AD} \quad \text{(Möbius).}$$

Wenn man auf einer Geraden einen Punkt O, den *Anfangspunkt*, festlegt und angibt, welche Richtung die positive sein soll, sowie eine Masseinheit zu Grunde legt, so lässt sich jeder Punkt A der Geraden durch die Zahl bestimmen, welche seinen Abstand vom Anfangspunkt misst; dabei muss man diese Zahl positiv oder negativ nehmen, je nachdem die Strecke OA positiv oder negativ ist.

Die positive oder negative Zahl, welche auf solche Art dem Punkt A entspricht, wird die *gewöhnliche Coordinate* oder die *Abscisse* von A genannt.

Denkt man sich dagegen zwei Punkte A, B festgelegt und ist C ein beliebiger dritter Punkt, so heisst das Verhältniss

$$\frac{AC}{CB} = r$$

die barycentrische Coordinate des Punktes C.

Die barycentrische Coordinate des unendlich fernen Punktes der Geraden ist -1.

Legt man schliesslich drei Punkte A, B, C der Geraden fest, so lässt sich das Doppelverhältniss $(ABCD)$ als *Coordinate* eines beliebigen Punktes D der Geraden auffassen. Diese Coordinate pflegt man die *projective* zu nennen. Die Punkte A, B haben ∞ und 0 zu Coordinaten und heissen *die Fundamentalpunkte;* der Punkt C hat die Coordinate 1 und wird *der Einheitspunkt* genannt.

Von diesem Coordinatensystem ist das System der gewöhnlichen Coordinaten ein specieller Fall; man braucht nur anzunehmen, A sei der unendlich ferne Punkt, B der Coordinatenanfang und C liege im Abstand $+1$ von B.

Das heisst: *Der Abstand zweier Punkte ist dem anharmonischen Verhältniss des aus diesen beiden Punkten, dem unendlich fernen Punkt und dem Einheitspunkt gebildeten Quadrupels gleich.*

Liegt dagegen C in der Mitte zwischen den Punkten A, B, *so werden die projectiven zu barycentrischen Coordinaten.*

Wir gehen nun zur Besprechung der *homogenen Coordinaten* der Punkte einer Geraden über.

Denken wir uns auf der Geraden ein beliebiges Coordinatensystem festgesezt und ist x die Coordinate eines Punktes P, so geben wir dieser die Form

$$x = \frac{x_1}{x_2};$$

die Grössen x_1, x_2, deren Verhältniss die Coordinate von P bestimmt, heissen dann die *homogenen Coordinaten* von P.

Von den homogenen Coordinatensystemen ist das folgende bemerkenswerth:

Wir nehmen an, zwei (Fundamental-)Punkte A, B seien festgesetzt und nennen p, q die Abstände eines Punkts P von den beiden Punkten A, B, so dass $p + q = AB$ ist; wir nehmen ferner zwei Constante a, b an und setzen

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{bp}{aq};$$

alsdann entspricht jedem Punkt P ein Werthepaar x_1, x_2, *dessen Verhältniss constant ist, und jedem solchen Werthepaar entspricht ein einziger Punkt P.* Die Grössen x_1, x_2 kann man mithin als *homogene Coordinaten* des Punkts der Geraden ansehen; dem Werth $x_1 = 0$ entspricht der Punkt A, dem Werth $x_2 = 0$

der Punkt B; der unendlich ferne Punkt hat die Coordinaten $x_1 \equiv -b$, $x_2 \equiv a$. Der Punkt U, für welchen $\frac{x_1}{x_2} = 1$, also $\frac{p}{q} = \frac{a}{b}$ ist, wird der *Einheitspunkt* genannt.

Von diesem homogenen Coordinatensystem ist das System nicht homogener gewöhnlicher Coordinaten (Abscissen) ein specieller Fall; man braucht nur anzunehmen, B rücke in das Unendliche; es ist dann nicht nöthig, die Coordinate x_2 in Betracht zu ziehen, weil q immer unendlich gross ist; die Lage des Punktes wird mithin nur durch x_1 bestimmt, d. h. den Abstand des Punktes von A.

Man sieht ferner leicht ein, dass das Verhältniss $\frac{x_1}{x_2}$, da es sich $\frac{b}{a} : \frac{q}{p}$ schreiben lässt und $\frac{b}{a}$ das Verhältniss der Abstände des Einheitspunktes U von den Punkten B, A angiebt, identisch mit dem Doppelverhältniss der Punkte $BAUP$ ist. Im Grunde genommen ist daher das entwickelte System kein anderes, als das System, welches sich ergibt, wenn auf die obige Art der *projectiven Coordinate* die homogene Form gegeben wird; es ist deshalb *ein System von projectiven homogenen Coordinaten.*

Legt man den Coordinaten der Punkte einer Geraden auch imaginäre Werthe bei, so können wir uns dadurch *die sogenannten imaginären Punkte der Geraden* eingeführt denken.

In gewöhnlichen Coordinaten wird das Doppelverhältniss von vier Punkten durch die Formel

$$\frac{(x - x'')}{(x' - x'')} : \frac{(x - x''')}{(x' - x''')}$$

ausgedrückt, worin die x die Abscissen der vier gegebenen Punkte bezeichnen.

Mittelst dieser Formel kann man dann das Doppelverhältniss auch von imaginären Punkten der Geraden darstellen.

Erweitert man so den Begriff des Doppelverhältnisses, so findet man ausser den beiden oben erwähnten Fällen, in denen *die sechs Doppelverhältnisse von vier Elementen nicht sämmtlich verschieden sind*, noch einen dritten Fall, welcher eintritt, *wenn der Werth eines der Doppelverhältnisse eine complexe Cubikwurzel aus der negativen Einheit ist.* Die vier Punkte heissen dann

äquianharmonisch und *die sechs Doppelverhältnisse reduciren sich auf nur zwei verschiedene.*

Man sagt, eine algebraische Gleichung vom n^{ten} Grad in x *stelle eine Gruppe von n Punkten auf einer Geraden dar* und versteht darunter, dass man sich die Gleichung aufgelöst denken und ihre n Wurzeln als Coordinaten von n (reellen oder complexen) Punkten einer Geraden interpretiren soll.

Zwei Punktreihen sind projectiv (vergl. § 1) oder homographisch oder auch collinear, wenn jedem Punkt der einen ein und nur ein Punkt der anderen entspricht und das Doppelverhältniss von vier Punkten der einen immer dem Doppelverhältniss der vier entsprechenden Punkte der anderen gleich ist.

Diese Eigenschaft könnte man auch der Definition der *projectiven Punktreihen* zu Grunde legen.

Eine andere Definition ist die folgende (von Staudt):

Zwei Punktreihen werden projectiv oder projectiv aufeinander bezogen genannt, wenn sie so einander zugeordnet sind, dass harmonischen Gruppen in der einen Punktreihe harmonische Gruppen in der anderen entsprechen.

Der Punkt in einer Punktreihe, welcher dem unendlich fernen Punkt der anderen entspricht, heisst *Fluchtpunkt* oder *Grenzpunkt.*

Wenn die beiden Grenzpunkte ebenfalls unendlich ferne Punkte sind, so nennt man die beiden Punktreihen *ähnlich.*

Die Projectivität kann auch auf die folgende Art definirt werden:

Zwei Punktreihen heissen projectiv, wenn sie sich derart entsprechen, dass man von den Punkten der einen zu denen der anderen durch eine endliche Anzahl von Projectionen und Schnitten übergehen kann.

Diese Correspondenz ist nachgewiesen, wenn drei beliebige Paare sich entsprechender Punkte festgestellt sind.

Wenn x und y die gewöhnlichen Coordinaten der Punkte der einen und der anderen Punktreihe sind, so ist die bilineare (d. h. lineare in Bezug auf x und y) Relation vom Typus

$$axy + bx + cy + d = 0$$

(die Verwandtschafts- oder Projectivitätsgleichung) die Beziehung die zwischen x und y bestehen muss, wenn die beiden Punktreihen projectiv sein sollen.

Wenn I' und J die Grenzpunkte zweier projectiven Punktreihen und A, A' zwei sich entsprechende Punkte sind, so ist das Product $JA \cdot I'A'$ constant, wie man auch das Paar A, A' wählen mag.

In zwei ähnlichen Punktreihen ist das Verhältniss zwischen den sich entsprechenden Strecken (das Aehnlichkeitsverhältniss) constant.

Ist dieses Verhältniss ± 1, so werden die beiden Punktreihen *congruent* oder *gleich* genannt.

Wenn zwei projective Punktreihen mit verschiedenen Trägern einen Punkt gemeinsam haben, der zum entsprechenden Punkt sich selbst hat, so sind sie perspectiv (vergl. § 1).

Sind drei Paare AA', BB', CC' sich entsprechender Elemente in zwei projectiven Punktreihen gegeben, so kann man, um die übrigen Paare oder, wie man sagt, *die Projectivität zu construiren*, auf die folgende Art verfahren: *Auf der Geraden, welche zwei entsprechende Punkte, z. B. A, A' verbindet, wähle man zwei Centren S, S'; ziehe SB, $S'B'$, die sich in B'' schneiden, alsdann SC, $S'C'$, die sich in C'' schneiden und verbinde $B''C''$; ein Punkt D der ersten Punktreihe liefert durch Projection, von S aus, D'' auf $B''C''$; projicirt man nun D'' von S' aus, so erhält man in dem Schnittpunkt mit der zweiten Geraden den dem Punkt D entsprechenden Punkt D'.*

Liegen die beiden Punktreihen aufeinander, so projicire man die eine von ihnen von einem Centrum aus auf eine andere Gerade und verfahre dann wie vorstehend.

Wenn man zu Centren S, S' die Punkte A', A wählt, so heisst die so erhaltene Gerade $B''C''$ *die Directions-, Projectivitäts-* oder *Homographieaxe.*

Sie schneidet die beiden Punktreihen in Punkten, welche dem den beiden Punktreihen gemeinschaftlichen Punkt entsprechen. Ueber eine Eigenschaft dieser Axe siehe S. 19. .

Wenn die beiden homographischen Punktreihen dieselbe Gerade zum Träger haben, so heissen die beiden Punktreihen *conlocal, aufeinanderliegend oder superponirt.*

Zwei superponirte homographische Punktreihen, welche nicht zusammenfallen, d. h. deren Elemente nicht sämmtlich Doppelelemente sind, können höchstens zwei reelle sich entsprechende gemeinsame Punkte haben. Die Wurzeln der Gleichung

$$ax^2 + (b + c)x + d = 0$$

sind die Coordinaten dieser Punkte.

Die sich entsprechenden gemeinsamen Punkte heissen *Doppelpunkte.*

Wenn die Wurzeln dieser Gleichung imaginär sind, so sagen wir, die beiden Doppelpunkte existiren auch in diesem Fall, *seien aber imaginär.*

Der Mittelpunkt der von den Doppelpunkten begrenzten Strecke fällt mit dem Mittelpunkt der von den beiden Fluchtpunkten (den Grenzpunkten) begrenzten Strecke zusammen.

In zwei superponirten homographischen Punktreihen ist das Doppelverhältniss zweier beliebiger sich entsprechender Punkte mit den beiden Doppelpunkten constant.

Die Correspondenz zwischen zwei solchen Punktreihen ist nur dann involutorisch, d. h. einem Punkt entspricht nur dann immer derselbe andere Punkt, wenn dieses Doppelverhältniss den Werth $+1$ *oder* -1 *hat.*

In dem ersten Fall sind die beiden Punktreihen *identisch;* in dem zweiten bilden sie eine *involutorische Homographie* oder einfach eine *Involution* (Desargues).

Analytisch wird eine Involution durch eine Gleichung vom Typus

$$axy + b(x + y) + d = 0$$

bestimmt.

Die Doppelpunkte der Involution sind durch die Gleichung

$$ax^2 + 2bx + d = 0$$

gegeben.

Sind die Coefficienten a, b, d reell, so *heisst die Involution hyperbolisch, elliptisch oder parabolisch, je nachdem die Doppelpunkte reell oder imaginär sind oder zusammenfallen.*

In dem Fall der Involution fallen die beiden Grenzpunkte in einen einzigen Punkt, den sogenannten Centralpunkt der Involution zusammen, welcher der Mittelpunkt der durch die beiden Doppelpunkte bestimmten Strecke ist.

Wenn es in zwei conlocalen homographischen Punktreihen zwei verschiedene Punkte gibt, die sich auf doppelte Art entsprechen (vergl. § 1), *so gilt dasselbe auch für zwei beliebige sich entsprechende Punkte und es liegt eine Involution vor.*

Ist O das Involutionscentrum und sind A, A' zwei sich entsprechende Punkte, so ist immer

$$OA \cdot OA' = \text{Const.}$$

Eine Involution wird durch zwei sich entsprechende Punktepaare AA', BB' bestimmt.

Sind zwei Paare AA', BB' sich entsprechender Punkte gegeben, so verfährt man, um die Involution zu construiren, auf die folgende Art: Man nimmt einen beliebigen Punkt G ausserhalb der Geraden an und beschreibt die Kreise GAA', GBB', die sich in einem zweiten Punkt H schneiden. Der Punkt O, in welchem die gegebene Gerade von GH geschnitten wird, ist das Involutionscentrum und jeder durch G, H gezogene Kreis trifft die gegebene Gerade in zwei sich entsprechenden Punkten der Involution.

Sind AA', BB', CC' Punktepaare in Involution, so besteht zwischen den Strecken, welche diese Punkte auf der Geraden bestimmen, die Relation:

$$AB' \cdot BC' \cdot CA' + A'B \cdot B'C \cdot C'A = 0.$$

Wenn x_1, y_1; x_2, y_2 die Coordinaten von A, A'; B, B' sind, so lautet die Gleichung der Involution:

$$\begin{vmatrix} xy, & x+y, & 1 \\ x_1y_1, & x_1+y_1, & 1 \\ x_2y_2, & x_2+y_2, & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Ist $f_1(x) = 0$ die Gleichung 2ten Grads, deren Wurzeln x_1, y_1 und $f_2(x) = 0$ diejenige, deren Wurzeln x_2, y_2 sind, so ist die Gleichung der Involution

$$f_1(x) + \lambda f_2(x) = 0.$$

Wenn sich ein rechter Winkel in seiner eigenen Ebene um seinen Scheitel dreht, so beschreiben seine Schenkel auf einer Geraden zwei in Involution liegende Punktreihen.

Die drei Paare von Gegenseiten eines vollständigen Vierecks werden von einer beliebigen Transversalen in drei Paaren von involutorisch conjugirten Punkten geschnitten.

Wenn man die drei Paare von Gegenecken eines vollständigen Vierseits von einem beliebigen Centrum aus auf eine Gerade projicirt, so bilden die so erhaltenen sechs Punkte drei Paare einer Involution.

Sind in zwei conlocalen homographischen Punktreihen A, A'; B, B' Paare sich entsprechender Elemente und E, F die beiden (verschiedenen oder nicht verschiedenen) Doppelpunkte, so sind E, F; A, B'; B, A' drei Paare involutorisch verbundener Punkte.

Eine Projectivität conlocaler Punktreihen kann *cyclisch von der Ordnung n* sein, d. h. derart, dass man, wenn zu einem Punkt A der entsprechende A', alsdann zu dem Punkt A', den man jetzt als der ersten Punktreihe zugehörig betrachtet, der entsprechende A'' aufgesucht wird u. s. f., nach n solchen Operationen jedesmal wieder zu dem Punkt A zurückkehrt.

Die Involution ist eine cyclische Projectivität zweiter Ordnung.

Nimmt man die Doppelpunkte zu Fundamentalpunkten projectiver (nicht homogener) Coordinaten, so lässt sich die Gleichung der cyclischen Projectivität n^{ter} Ordnung $y - \varepsilon x = 0$ schreiben, worin ε eine primitive n^{te} Wurzel aus der Einheit ist.

Die cyclischen Projectivitäten erhielten ihren Namen von Clebsch, *Crelle*, 68; zuerst hatten sich mit ihnen beschäftigt: Möbius, ges. Werke 2 Bde, 1ter Bd. von R. Baltzer, 2ter Bd. von F. Klein herausgeg., Leipzig 1886, Bd. 2 und Battaglini, *Acc. Napoli*, 1863, der sie *Involutionen höherer Ordnung (involuzioni di ordine superiore)* nannte.

Für die allgemeinen Zuordnungen zwischen zwei conlocalen Punktreihen (oder überhaupt zwischen zwei conlocalen Grundgebilden 1ter Stufe) ist der folgende Satz, *das sogenannte Correspondenzprincip von* Chasles, wichtig:

Wenn zwischen den Punkten zweier conlocaler Punktreihen eine solche Beziehung festgestellt wird, dass jedem Punkt der ersten m Punkte der zweiten und jedem Punkt der zweiten n der ersten entsprechen, so sind $m + n$ Punkte vorhanden, die sich selbst entsprechen. Chasles, *Compt. Rend.*, 1864, 1866. Ueber dieses Correspondenzprincip siehe auch Kap. 15, § 3.

---

2. Das Strahlenbüschel. — Setzt man in einem Büschel einen gewissen Strahl als *Anfangsstrahl* fest, so lässt sich das Büschel beschreiben, indem man diesen Strahl um den Scheitel des Büschels dreht. Die Rotation kann in zweierlei Sinn stattfinden; wir wollen die Rotation, die in einem gewissen Sinne erfolgt, die *positive* und die entgegengesetzte die *negative* nennen. Wenn a und b zwei Strahlen des Büschels sind, so verstehen wir unter dem *Winkel* (ab) den kleinsten Winkel, welchen der Strahl a, *in positivem Sinne* rotirend, beschreiben muss, um zum Zusammenfallen mit b zu kommen. Die Zahl, welche den Winkel misst, den die Anfangsgerade mit irgend einer Geraden des Büschels macht, kann man *die gewöhnliche Coordinate* oder *Anomalie* der Geraden des Büschels nennen. Auf diese Art ist $(ba) + (ab) = \pi$.

Das *Doppelverhältniss* von vier Strahlen des Büschels ist das Doppelverhältniss der vier Punkte, in welchen eine beliebige Transversale die vier Strahlen schneidet. *Es wird dargestellt durch*

$$(abcd) = \frac{\sin(ac)}{\sin(bc)} : \frac{\sin(ad)}{\sin(bd)},$$

oder durch

$$(abcd) = \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB},$$

worin CA, CB, DA, DB die Abstände zweier Punkte C, D der Strahlen c, d von den Strahlen a, b bezeichnen.

Setzt man $(abcd) = \lambda$, so ist

$$\frac{\lambda - 1}{\operatorname{tg}(ab)} = \frac{\lambda}{\operatorname{tg}(ac)} - \frac{1}{\operatorname{tg}(ad)} \quad \text{(Möbius)}.$$

Ist $(abcd) = -1$, so nennt man die vier Geraden *harmonisch*.

Vier Strahlen a, b, c, d eines Büschel sind harmonisch, wenn sich ein vollständiges Vierseit derart construiren lässt, dass zwei Gegenecken auf a, zwei Gegenecken auf b, eine fünfte Ecke auf c und die sechste auf d liegt.

Kann man ein solches Vierseit construiren, so lassen sich unendlich viele construiren.

Legt man in dem Büschel zwei Strahlen a, b fest, so kann das Verhältniss $\frac{\sin(ac)}{\sin(cb)}$ zur Coordinate eines Strahls c genommen werden; man erhält so ein Coordinatensystem, welches dem bei der Punktreihe *barycentrisch* genannten analog ist.

Wenn dagegen drei Strahlen a, b, c in dem Büschel festgelegt werden, so kann man als Coordinate eines Strahles d das anharmonische Verhältniss $(abcd)$ wählen; es ergibt sich dann das System *projectiver Coordinaten.*

Legt man der Coordinate imaginäre Werthe bei, so werden dadurch die *imaginären Strahlen* des Büschels definirt.

Zwei Strahlenbüschel sind homographisch oder collinear verwandt oder projectiv (vergl. § 1), *wenn sie sich derart entsprechen, dass jedes anharmonische Verhältniss von vier Strahlen des einen Büschels dem anharmonischen Verhältniss der entsprechenden (conjugirten) Strahlen des anderen immer gleich ist.*

Ebenso, wie bei den Punktreihen, kann diese Eigenschaft auch hier als Definition der projectiven Büschel dienen.

Als weitere Definition lässt sich auch die folgende von Staudt benutzen: *Zwei Büschel sind projectiv, wenn sie sich so entsprechen, dass harmonischen Gruppen in dem einen harmonische Gruppen in dem anderen zugeordnet sind.*

Wenn die beiden Büschel denselben Scheitel (Träger) haben, gibt es immer zwei (reelle oder imaginäre) Strahlen, die sich selbst entsprechen (Doppelstrahlen).

Ist ferner die Zuordnung *involutorisch* (ohne jedoch so zu sein, dass jeder Strahl sich selbst entspricht), so sagt man, die Paare sich entsprechender Strahlen bilden eine *Involution. Zwei conjugirte (sich entsprechende) Strahlen sind in diesem Fall harmonisch zu den beiden Doppelstrahlen.*

Wie bei den Punktreihen lassen sich auch hier *cyclische Projectivitäten von der n^{ten} Ordnung* definiren.

Ein rechter Winkel, welcher in einer Ebene um seinen Scheitel rotirt, beschreibt mit seinen Schenkeln zwei Strahlenbüschel, die eine Involution bilden. Die Doppelstrahlen sind imaginär; sie sind die Strahlen, die nach den beiden Kreispunkten führen (vergl. § 3).

Die drei Paare von Gegenecken eines vollständigen Vierseits werden von einem beliebigen Centrum aus durch drei Paare involutorisch conjugirter Strahlen projicirt.

Die Homographie zwischen zwei Strahlenbüscheln wird durch drei Paare sich entsprechender Elemente bestimmt.

Wenn zwei homographische Büschel mit verschiedenen Scheiteln einen Doppelstrahl haben, so sind sie perspectiv (vergl. § 1).

Um die Homographie zweier Strahlenbüschel zu construiren, wenn drei Paare aa', bb', cc' sich entsprechender Strahlen gegeben sind, schlägt man ein Verfahren ein, das dual zu dem bei zwei Punktreihen befolgten ist. *Durch den Punkt, welche zweien sich entsprechenden Strahlen a, a' gemeinsam ist, werde zwei Gerade s, s' gezogen; b'' sei die Gerade, welche die Punkte sb, $s'b'$ verbindet, und c'' die durch die Punkte sc, $s'c'$ gehende Gerade. Der Punkt $b''c''$ ist der Scheitel eines zu den beiden gegebenen Büscheln perspectiven Büschels. Ist mithin ein Strahl des ersten Büschels gegeben, so suche man seinen Schnittpunkt mit s, verbinde diesen Schnittpunkt mit dem Punkt $b''c''$ und ermittele den Schnitt dieses Strahls mit s'; die Gerade, welche den Scheitel des zweiten Büschels mit diesem Punkt verbindet, ist der entsprechende Strahl d'.*

Wenn man als s, s' die Geraden a', a wählt, so treffen sich die Geraden, welche die Punkte ab', $a'b$; ac', $a'c$; bc', b'

verbinden, in demselben Punkt, welcher das *Directions-, Projectivitäts-* oder *Homographiecentrum* der beiden Büschel genannt wird.

Das Directionscentrum besitzt die Eigenschaft, dass jede durch es gehende Gerade die Büschel in zwei in Involution liegenden Punktreihen schneidet, und umgekehrt geht jede so beschaffene Gerade durch dieses Centrum.

Die Directionsaxe zweier projectiver Punktreihen (S. 13) besitzt die correlative Eigenschaft; wir sehen davon ab, den entsprechenden Satz besonders zu formulieren.

Zwei Strahlenbüschel heissen *ähnlich*, wenn ihre Scheitel im Unendlichen liegen und ein Schnitt des einen einem Schnitt des anderen ähnlich ist (vergl. § 2).

Zwei Strahlenbüschel heissen *congruent* (*gleich*), wenn das erste sich nur dadurch vom zweiten unterscheidet, dass seine Lage eine andere ist.

Zwei gleiche Büschel sind projectiv.

---

3. Das Ebenenbüschel. — Die Geometrie des Ebenenbüschels ist nicht wesentlich von der Geometrie der geraden Punktreihe und des Geradenbüschels verschieden. Es werden dieselben Begriffe von Coordinaten, Doppelverhältniss, Harmonie, Homographie und Involution eingeführt, wie es auch in dem Vorstehenden geschehen ist.

§ 3. Die Geometrie der Gebilde 2ter Stufe. Das ebene Punkt- und Strahlensystem.

Zwischen den Flächeninhalten der Dreiecke, welche drei von fünf gegebenen Punkten A, B, C, D, E der Ebene zu Eckpunkten haben, besteht die Relation:

$$ABE \cdot CDE + BCE \cdot ADE + CAE \cdot BDE = 0,$$

und ähnlich für sechs Punkte der Ebene:

$$ABC \cdot DEF + ACD \cdot BEF + ADB \cdot CEF = BCD \cdot AEF$$

(Monge, Möbius).

Nennt man δ_{12}, $\delta_{13}, \cdots$ die Abstände je zweier der vier Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 einer Ebene, so gilt die Beziehung

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \delta_{14}^2 & \delta_{24}^2 & \delta_{34}^2 \\ 1 & \delta_{41}^2 & 0 & \delta_{21}^2 & \delta_{31}^2 \\ 1 & \delta_{42}^2 & \delta_{12}^2 & 0 & \delta_{32}^2 \\ 1 & \delta_{43}^2 & \delta_{13}^2 & \delta_{23}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Wir wollen uns in der Ebene zwei Gerade (*Coordinatenaxen*) gezogen denken, die sich in einem Punkt O, dem sogenannten *Anfangspunkt*, schneiden. Es seien auf diesen beiden Geraden zwei Systeme gewöhnlicher Coordinaten, wie in § 2, auf beliebige Art festgesetzt und der Punkt O als Anfangspunkt in einem jeden angenommen. Durch jeden Punkt P der Ebene geht eine Parallele zur ersten und eine Parallele zur zweiten Geraden jeder Punkt der Ebene wird durch eine der zweiten Geraden parallele Projection in einen und nur einen Punkt P' der ersten und durch eine der ersten Geraden parallele Projection in einen und nur einen Punkt P'' der zweiten projicirt. Die Coordinaten von P' und P'' können dann als *Coordinaten* von P angesehen werden; sie heissen *Cartesische Coordinaten*. Der gewöhnliche und einfachste Fall ist derjenige, in welchem vorausgesetzt wird, die beiden gegebenen Geraden seien rechtwinklig zueinander und die Masseinheiten, nach welchen die Coordinaten von P' und P'' auf beiden Geraden gerechnet werden, seien gleich. Nennt man x, y die Coordinaten der Punkte der ersten bez. der zweiten Geraden, so heisst die erste Gerade *die x-Axe*, die zweite *die y-Axe*.

Ein anderes Coordinatensystem für die Punkte der Ebene ist das der sogenannten *Polarcoordinaten*. Man legt einen Punkt O, den *Pol*, und eine von ihm ausgehende Gerade OA in der Ebene fest und bestimmt die positive Richtung dieser Geraden (*die Polaxe*). Ein Punkt P der Ebene kann dann durch den (immer positiven) Abstand des Punktes P vom Pol O und durch die Grösse des (positiven oder negativen) Winkels bestimmt werden, den die positive Richtung der Geraden OA in positivem oder negativem Sinne (vergl. § 2, das Strahlenbüschel) beschreiben muss, um mit dem Strahl OP zur Deckung zu kommen.

Ein weiteres Coordinatensystem ist das sogenannte *bipolare*. Man nimmt in der Ebene zwei feste Punkte O, O' als die Scheitel zweier Büschel an; durch jeden Punkt P der Ebene

eht ein Strahl des ersten und ein Strahl des zweiten Büschels; ie Coordinaten dieser beiden Strahlen in jedem der Büschel ann man als Coordinaten von P ansehen.

Wenn man den beiden Coordinaten x, y eines Punkts in iner Ebene die Form $x = \frac{x_1}{x_3}$, $y = \frac{x_2}{x_3}$ gibt, so werden die rössen x_1, x_2, x_3 *homogene Coordinaten* der Punkte der Ebene enannt. Unter den homogenen Coordinatensystemen sind die ogenannten *Dreieckscoordinaten (trilineare, trimetrische)* beson- ers bemerkenswerth.

Wir betrachten drei Gerade der Ebene, die nicht durch inen Punkt gehen, und bezeichnen mit p, q, r die Abstände ines beliebigen Punkts P der Ebene von den drei Geraden und nit a, b, c drei beliebige Constante; wir nehmen ferner x_1, x_2, x_3 roportional zu den Verhältnissen

$$\frac{p}{a}, \quad \frac{q}{b}, \quad \frac{r}{c} \quad \text{an.}$$

Man kann zeigen, dass *auf diese Art jedem Tripel von Werthen* ϱx_1, ϱx_2, ϱx_3, *worin* ϱ *ein beliebiger Proportionalitäts- factor ist, ein einziger Punkt der Ebene entspricht und um- gekehrt.* Die Grössen x_1, x_2, x_3 können daher ein System homogener Coordinaten darstellen. Die Ecken A, B, C des aus den drei Geraden gebildeten Dreiecks haben bez. die Coor- linaten

$$0, \quad 0, \quad x_3;$$
$$0, \quad x_2, \quad 0;$$
$$x_1, \quad 0, \quad 0.$$

Das Dreieck ABC heisst das *Fundamentaldreieck der Coor- dinaten.*

Es existirt in der Ebene ein Punkt U, dessen Abstände von den drei Geraden proportional zu a, b, c sind; er hat die homo- genen Coordinaten 1, 1, 1 und heisst daher *der Einheitspunkt.*

Die Verhältnisse zweier der Coordinaten eines Punkts P zur dritten, z. B. $\frac{x_1}{x_3}$, $\frac{x_2}{x_3}$ *kann man als Doppelverhältnisse von Strahlenbüscheln ansehen.* Denn es ist:

$$\frac{x_1}{x_3} = \frac{c}{a} : \frac{r}{p},$$
$$\frac{x_2}{x_3} = \frac{c}{b} : \frac{r}{q},$$

worin die rechten Seiten den Doppelverhältnissen der vier Strahlen der Büschel

$$B(A, C, U, P) \text{ und } A(B, C, U, P)$$

gleich sind.

Das hier besprochene Coordinatensystem ist mithin *ein System projectiver homogener Coordinaten.*

Wenn der Einheitspunkt U das Centrum des dem Fundamentaldreieck eingeschriebenen Kreises ist, so sind die Coordinaten x_1, x_2, x_3 von P den Abständen des Punktes P von den drei Seiten des Fundamentaldreiecks proportional.

Ist eine der Seiten des Fundamentaldreiecks die unendlich ferne Gerade der Ebene, so wird das System von (homogenen) Dreieckscoordinaten ein System von (nicht homogenen) Cartesischen Coordinaten.

Die allgemeinen Formeln für die Verwandlung eines Cartesischen Coordinatensystems in ein anderes, ebenfalls Cartesisches, lauten, wie folgt: *Wenn (x, y) die Coordinaten eines Punkts in Bezug auf zwei durch einen Punkt O gehende Axen sind, die den Winkel ω miteinander bilden, und wenn (X, Y) die Coordinaten desselben Punkts in Bezug auf zwei andere durch einen anderen Punkt O' gehende Axen bezeichnen, und O' bezüglich der ersten Axen die Coordinaten (a, b) hat, so gelten die Relationen*

$$x = a + X\frac{\sin\beta}{\sin\omega} + Y\frac{\sin\beta'}{\sin\omega},$$

$$y = b + X\frac{\sin\alpha}{\sin\omega} + Y\frac{\sin\alpha'}{\sin\omega},$$

worin α, β die Winkel bedeuten, welche die neue X-Axe mit den alten Axen macht, und α', β' die Winkel zwischen der neuen Y-Axe und den alten Axen sind. Dabei ist

$$\alpha + \beta = \alpha' + \beta' = \omega$$

und es wird, wie auch später, unter dem Winkel zwischen den Axen der Winkel verstanden, den die positiven Richtungen der Axen miteinander bilden.

Die Determinante der Coefficienten von X und Y in diesen Formeln hat den Wert $\frac{\sin\Omega}{\sin\omega}$, worin Ω der Winkel der neuen Axen ist.

Wenn beide Coordinatensysteme rechtwinklig sind und α den Winkel bezeichnet, den die neue x-Axe mit der alten x-Axe macht, so vereinfachen sich die Transformationsformeln und werden:

$$x = a + X\cos\alpha \mp Y\sin\alpha,$$
$$y = b + X\sin\alpha \pm Y\cos\alpha.$$

Darin hat man die oberen oder unteren Zeichen zu nehmen, je nachdem die positiven Richtungen von Y und y den Winkel α oder den Winkel $\pi - \alpha$ mit einander machen.

Die Formeln für die Verwandlung rechtwinkliger Cartesischer Coordinaten in Polarcoordinaten lauten:

$$x = \varrho\cos\varphi, \qquad y = \varrho\sin\varphi,$$

$$\varrho = +\sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x},$$

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

worin ϱ, φ die Polarcoordinaten des Punkts bedeuten, dessen Cartesische Coordinaten x, y sind, und worin vorausgesetzt wird, dass der Pol mit dem Coordinatenanfang und die Polaxe mit der Axe zusammenfällt, auf welcher die x gerechnet werden.

Wenn (x, y), (x', y') die Cartesischen Coordinaten zweier Punkte sind, so wird der Abstand der beiden Punkte durch die Formel gegeben:

$$\varrho^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + 2(x' - x)(y' - y)\cos\omega;$$

dabei ist ω der Winkel, den die Axen miteinander machen.

Sind α, β die Winkel, welche eine Gerade der Ebene mit den Coordinatenaxen bildet, so besteht die Fundamentalbeziehung:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\omega = \sin^2\omega.$$

Sind α, β und α', β' die Winkel, welche zwei Gerade mit den Coordinatenaxen machen, so ist der Winkel der beiden Geraden durch die Formeln gegeben:

$$\cos(rr') = -\frac{1}{\sin^2\omega}\begin{vmatrix} 1 & \cos\omega & \cos\alpha \\ \cos\omega & 1 & \cos\beta \\ \cos\alpha' & \cos\beta' & 1 \end{vmatrix},$$

$$\sin(rr') = -\frac{1}{\sin\omega}\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha' & \cos\beta' \end{vmatrix}.$$

Die Bedingung, damit zwei Gerade senkrecht auf einander stehen, ist:

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\omega & \cos\alpha \\ \cos\omega & 1 & \cos\beta \\ \cos\alpha' & \cos\beta' & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

und die Bedingung, damit sie parallel sind:

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha' & \cos\beta' \end{vmatrix} = 0.$$

Bei rechtwinkligen Axen wird:

$$\cos(rr') = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta',$$
$$\sin(rr') = \cos\alpha\cos\beta' - \cos\alpha'\cos\beta.$$

Wenn (x, y), (x', y'), (x'', y'') die Coordinaten der drei Ecken eines Dreiecks bezeichnen, so ist der Flächeninhalt des Dreiecks seinem absoluten Werth nach durch

$$\frac{1}{2}\sin\omega \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x' & y' & 1 \\ x'' & y'' & 1 \end{vmatrix} \text{ gegeben.}$$

Die Bedingung, damit drei Punkte mit den Coordinaten

$$(x, y),\ (x', y'),\ (x'', y'')$$

in einer Geraden liegen, lautet:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x' & y' & 1 \\ x'' & y'' & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Eine Gleichung zwischen den Coordinaten eines Punkts in der Ebene stellt einen *Ort von Punkten* dar.

Zwischen den Coordinaten (x, y) eines einer Geraden angehörigen Punkts besteht eine Relation 1ten Grads (die Gleichung der Geraden) vom Typus:

$$ax + by + c = 0,$$

worin a, b, c constante Coefficienten sind.

Der Gleichung der Geraden, welche durch zwei Punkte (x', y'), (x'', y'') geht, kann man eine der Formen geben:

$$\frac{x - x'}{x'' - x'} = \frac{y - y'}{y'' - y'},$$

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x' & y' & 1 \\ x'' & y'' & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Die Coordinaten eines Punkts, welcher auf der durch die Punkte $(x'y')$, $(x''y'')$ bestimmten Geraden liegt, sind

$$\left(\frac{x' + \lambda x''}{1 + \lambda}, \quad \frac{y' + \lambda y''}{1 + \lambda}\right).$$

Die Punkte

$$\left(\frac{x' + \lambda x''}{1 + \lambda}, \frac{y' + \lambda y''}{1 + \lambda}\right), \quad \left(\frac{x' - \lambda x''}{1 - \lambda}, \frac{y' - \lambda y''}{1 - \lambda}\right)$$

theilen die von den Punkten (x', y'), (x'', y'') begrenzte Strecke harmonisch.

Nimmt man die Axen rechtwinklig an und gibt der Gleichung der Geraden die Form

$$y = Ax + B,$$

so kann man den Coefficienten A den Winkelcoefficienten der Gleichung der Geraden nennen; er stellt die trigonometrische Tangente des Winkels dar, den die Gerade mit der x-Axe bildet.

Bezeichnet man mit α, β die Winkel, welche das Loth auf die Gerade mit den Coordinatenaxen macht, und mit ϱ den Abstand des Coordinatenanfangs von der Geraden, so lässt sich die Gleichung der Geraden schreiben:

$x \cos\alpha + y \cos\beta - \varrho = 0$ *(die Gleichung der Geraden in der Normalform).*

Um die Gleichung $ax + by + c = 0$ auf die Normalform zu bringen, braucht man ihre linke Seite nur mit

$$\frac{\sin\omega}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\omega}}$$

zu multipliciren, worin das Wurzelzeichen positiv oder negativ zu nehmen ist, je nachdem das Product $c \sin\omega$ negativ oder positiv ausfällt.

Wenn die Gleichung einer Geraden $ax + by + c = 0$ lautet, und unter ω der Winkel der Axen verstanden wird, so sind die Winkel, welche das Loth auf die Gerade mit den Axen bildet, durch die Formeln gegeben:

$$\cos\alpha = \frac{a \sin\omega}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\omega}},$$

$$\cos\beta = \frac{b \sin\omega}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\omega}},$$

und der Abstand des Coordinatenanfangs von der Geraden ist

$$\varrho = -\frac{c \sin\omega}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\omega}},$$

worin für das Vorzeichen des Radicals die oben gemachte Bemerkung gilt.

Der Abstand eines Punkts mit den Coordinaten X, Y von einer Geraden, deren Gleichung

$$ax + by + c = 0$$

lautet, wird durch die Formel

$$-\frac{(aX + bY + c)\sin\omega}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\omega}}$$

angegeben, worin für das Vorzeichen des Radicals wieder dasselbe gilt, wie vorher; dieser Abstand ist positiv oder negativ, je nachdem der Punkt auf derselben oder der entgegengesetzten Seite der Geraden liegt, wie der Coordinatenanfang.

Die Coordinaten des Schnittpunkts zweier Geraden

$$ax + by + c = 0$$
$$a'x + b'y + c' = 0$$

sind:

$$x = \frac{bc' - b'c}{ab' - a'b}, \quad y = \frac{a'c - ac'}{ab' - a'b}.$$

Der zwischen zwei Geraden enthaltene Winkel φ ist durch

$$\sin\varphi = \frac{(ab' - a'b)\sin\omega}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\omega}\cdot\sqrt{a'^2 + b'^2 - 2a'b'\cos\omega}},$$

$$\cos\varphi = \frac{aa' + bb' - (ab' + a'b)\cos\omega}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\omega}\cdot\sqrt{a'^2 + b'^2 - 2a'b'\cos\omega}}$$

gegeben.

Die nothwendige und ausreichende Bedingung, damit die beiden Geraden parallel seien, ist:

$$ab' - a'b = 0.$$

Die nothwendige und ausreichende Bedingung, damit die beiden Geraden senkrecht aufeinander stehen, ist:

$$aa' + bb' - (ab' + a'b)\cos\omega = 0.$$

Die Gleichung der Geraden, welche durch den Punkt (x', y') geht und senkrecht auf der Geraden $ax + by + c = 0$ steht lautet

$$\frac{x - x'}{a - b\cos\omega} = \frac{y - y'}{b - a\cos\omega}.$$

Damit drei Gerade

$$ax + by + c = 0,$$
$$a'x + b'y + c' = 0,$$
$$a''x + b''y + c'' = 0$$

urch denselben Punkt gehen, ist nothwendig und ausreichend, dass

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0 \text{ sei.}$$

Der Flächeninhalt des von diesen drei Geraden begrenzten Dreiecks ist:

$$\frac{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}^2}{(ab' - a'b)(a'b'' - a''b')(a''b - ab'')} \sin\omega.$$

Setzt man $\frac{a}{c} = u$, $\frac{b}{c} = v$, *so wird die Gleichung der Geraden:*

$$ux + vy + 1 = 0.$$

Betrachtet man in dieser Gleichung u, v als festliegend und x, y als variabel, so ergibt sich eine Beziehung zwischen den Coordinaten eines jeden Punkts einer Geraden; nimmt man dagegen u, v als variabel an und x, y als festliegend, *so erhält man eine Relation, welcher die Grössen u, v, die einer beliebigen, durch den festen Punkt mit den Coordinaten x, y gehenden Geraden entsprechen, genügen müssen.* Sind die Grössen u, v gegeben, so wird dadurch eine Gerade gekennzeichnet; man kann daher u, v *Coordinaten der Geraden* nennen.

Die Geraden, deren Coordinaten derselben linearen Gleichung genügen, gehen sämmtlich durch einen Punkt.

Die nothwendige und ausreichende Bedingung, damit die drei Geraden (u, v), (u', v'), (u'', v'') durch einen Punkt gehen, lautet

$$\begin{vmatrix} u & v & 1 \\ u' & v' & 1 \\ u'' & v'' & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Die Coordinaten einer Geraden, welche durch den Schnittpunkt zweier Geraden mit den Coordinaten (u', v'), (u'', v'') *geht, sind vom Typus:*

$$\frac{u' + \lambda u''}{1 + \lambda}, \quad \frac{v' + \lambda v''}{1 + \lambda}.$$

Die Geraden mit den Coordinaten

$$\left(\frac{u' + \lambda u''}{1+\lambda}, \quad \frac{v' + \lambda v''}{1+\lambda}\right) \quad \text{und} \quad \left(\frac{u' - \lambda u''}{1-\lambda}, \quad \frac{v' - \lambda v''}{1-\lambda}\right)$$

theilen den Winkel der Geraden

$$(u', v'), \ (u'', v'') \quad \textit{harmonisch.}$$

Eine Beziehung zwischen den Geradencoordinaten u, v stellt im Allgemeinen eine Gesammtheit von unendlich vielen Tangenten an eine Curve, eine sogenannte Enveloppe, Einhüllende dar.

Der Winkel zwischen zwei Geraden (u, v), (u', v') ist, falls die Coordinatenaxen rechtwinklig auf einander stehen, also $\omega = \frac{\pi}{2}$ ist, durch die Formel

$$\cos\alpha = \frac{uu' + vv'}{\sqrt{u^2 + v^2}\ \sqrt{u'^2 + v'^2}} \quad \textit{gegeben.}$$

Bemerkenswerth sind die beiden imaginären unendlich fernen Punkte der Ebene, welche durch die Gleichung (in Geradencoordinaten) $u^2 + v^2 = 0$ dargestellt werden. Sie heissen *Kreispunkte,* weil *alle Kreise der Ebene durch sie gehen.* (Siehe Kap. 3 über die Kegelschnitte.)

Man beachte die folgende projective Definition des Winkels zweier Geraden, bei welcher die Kreispunkte der Ebene benutzt werden:

Der Winkel zweier Geraden ist dem Product aus $\frac{\sqrt{-1}}{2} = \frac{i}{2}$ mit dem natürlichen Logarithmus des anharmonischen Verhältnisses des Quadrupels gleich, welches aus den beiden gegebenen Geraden und den zwei Geraden, die nach den beiden Kreispunkten führen gebildet ist. Theorem von Laguerre, *Nouv. Ann. 12,* 1853 p. 64. Vergl. z. B. A. Clebsch, *Vorlesungen über Geometrie* herausgeg. von Lindemann, mit Vorw. von Klein, in 2 Bdn. Leipzig 1875, 1891, 1. Bd. Siehe auch weiter unten Kap. 21, § 3

Zwei ebene Systeme (ebene Punkt- und Strahlensysteme heissen *homographisch* oder *collinear verwandt* oder *projectiv* wenn sich zwischen ihren (reellen) Punkten und ihren (reellen) Geraden eine Zuordnung derart herstellen lässt, dass jeder Punkt P ein Punkt P' und jeder Geraden p eine Gerade p' entspricht und dass, wenn P der Geraden p, auch P' der Gerade p' angehört.

In dem allgemeineren Fall, in welchem es sich um reelle und imaginäre Elemente handelt, lautet die analytische Definition der Homographie zweier ebener Systeme, wie folgt: Werden mit x, y die Cartesischen Coordinaten eines Punkts der einen Ebene und mit x', y' die Coordinaten des entsprechenden Punkts der zweiten bezeichnet, so sind die beiden Systeme homographisch, wenn die Relationen

$$x' = \frac{ax + by + c}{a''x + b''y + c''}, \quad y' = \frac{a'x + b'y + c'}{a''x + b''y + c''}$$

gelten, und die Determinante $(ab'c'')$ von Null verschieden ist.

Oder auch: Sind u, v die Coordinaten einer Geraden der ersten und u', v' die Coordinaten der entsprechenden Geraden der zweiten Ebene, so sind die beiden Systeme homographisch, wenn Relationen vom Typus

$$u' = \frac{au + bv + c}{a''u + b''v + c''}, \quad v' = \frac{a'u + b'v + c'}{a''u + b''v + c''}$$

bestehen.

Zwei sich entsprechende gerade Punktreihen oder zwei sich entsprechende Strahlenbüschel, welche in zwei homographischen ebenen Systemen enthalten sind, müssen immer projectiv sein.

Die Homographie zwischen zwei ebenen Systemen ist bestimmt, wenn festgestellt ist, dass den vier Ecken eines Vierecks in der einen die vier Ecken eines Vierecks in der anderen oder den vier Seiten eines Vierseits in der einen die vier Seiten eines Vierseits in der anderen Ebene entsprechen.

Zwei homographische ebene Systeme heissen *affin*, wenn der unendlich fernen Geraden des einen die unendlich ferne Gerade des anderen entspricht.

Die Affinitätsgleichungen haben den Typus

$$x' = ax + by + c, \quad y' = a'x + b'y + c'.$$

Die Affinität ist bestimmt, wenn die Zuordnung zwischen drei nicht in einer Geraden liegenden Punkten der einen und drei nicht in einer Geraden gelegenen Punkten der anderen Ebene oder auch zwischen drei nicht demselben Büschel angehörigen Strahlen der einen und drei Strahlen der anderen Ebene festgestellt ist.

Bei affiner Zuordnung sind zwei sich entsprechende Punktreihen ähnlich und ist das Verhältniss zwischen den Flächeninhalten zweier sich entsprechender Dreiecke constant.

Ein specieller Fall der Affinität ist die *Aehnlichkeit*. Zwei ebene Systeme heissen *ähnlich*, wenn die sich entsprechenden Winkel jedesmal gleich sind.

In zwei ähnlichen Systemen ist das Aehnlichkeitsverhältniss zwischen zwei sich entsprechenden Punktreihen immer dasselbe und sind die sich entsprechenden Strahlenbüschel gleich.

Wenn die beiden homographischen ebenen Systeme conlocal sind (ineinander liegen), so kann man sich die Aufgabe stellen, die Punkte (oder Geraden), die sich selbst entsprechen, (Doppelpunkte bez. -Gerade) aufzufinden.

Es gibt im Allgemeinen drei Doppelpunkte und drei Doppelstrahlen, welche die Ecken bez. Seiten desselben Dreiecks sind.

Man erhält die drei Doppelpunkte, indem man zuerst die Wurzeln t der cubischen Gleichung

$$\begin{vmatrix} a-t & b & c \\ a' & b'-t & c' \\ a'' & b'' & c''-t \end{vmatrix} = 0$$

ermittelt und alsdann den einzigen Punkt sucht, welcher den drei Geraden

$$\begin{aligned} ax + by + c &= tx \\ a'x + b'y + c' &= ty \\ a''x + b''y + c'' &= t \end{aligned}$$

gemeinschaftlich ist.

Vertauscht man darin x, y mit u, v, so ergibt sich das Verfahren zur Ermittelung der Doppelstrahlen, wenn die Homographie in Geradencoordinaten ausgedrückt ist.

Zwei homographische ebene Systeme sind *homolog oder perspectiv*, wenn die Verbindungslinien der sich entsprechenden Punkte durch denselben Punkt, *das Centrum der Perspectivität oder der Homologie* gehen. *In diesem Fall schneiden sich die entsprechenden Strahlen in Punkten einer Geraden (des perspectiven Durchschnitts* oder *der perspectiven Axe* oder *der Homologieaxe)*. Man kann auch diese zweite Eigenschaft der Definition zu Grunde legen; die erste würde sich dann als Folge aus ihr ableiten lassen.

Die perspective Verwandtschaft oder Homologie ist eine Homographie, bei welcher eine Gerade von Doppelpunkten (die Homologieaxe) und ein Büschel von Doppelstrahlen existirt, dessen Scheitel das Homologiecentrum ist.

Wenn in zwei homographischen ebenen Systemen drei Punkte einer Geraden sich selbst zu entsprechenden Punkten haben, so sind die beiden Systeme perspectiv.

Die Homologie findet statt, wenn die Minoren 2ter Ordnung der Determinante

$$D = \begin{vmatrix} a - t & b & c \\ a' & b' - t & c' \\ a'' & b'' & c'' - t \end{vmatrix}$$

für einen gewissen Werth von t sämmtlich Null werden. Dieser Werth von t ist alsdann die zweifache oder dreifache Wurzel der Gleichung $D = 0$; in dem letzteren Fall liegt das Centrum der Homologie auf der Homologieaxe.

Zwei homographische (nicht affine) ebene Systeme lassen sich immer in eine solche Lage bringen, dass sie homolog werden.

Zwei homologe ebene Systeme werden durch das Centrum, die Axe der Homologie und ein Paar sich entsprechender Punkte definirt.

Zwei homographische und conlocale ebene Systeme lassen sich durch eine endliche Anzahl von Homologien wie auch durch eine endliche Anzahl von Projectionen und Schnitten auseinander ableiten.

Die Grenz- oder Fluchtgeraden zweier homologer ebener Systeme, d. h. die Geraden einer Ebene, welche den unendlich fernen Geraden der anderen entsprechen, sind der Homologieaxe parallel.

Eine Homologie zweier conlocaler ebener Systeme heisst *harmonisch* oder *involutorisch*, wenn zwei Punkte (und zwei Strahlen) sich auf doppelte Art entsprechen, d. h. einem Punkt P immer derselbe andere Punkt P' entspricht, mag man nun annehmen, P gehöre der einen oder der anderen Ebene an, und wenn dasselbe für die beiden Strahlen gilt.

Bei der involutorischen Homologie werden zwei sich entsprechende Punkte harmonisch durch das Centrum und die Axe der Homologie getrennt. (Daher kommt die Benennung *harmonisch.*) *Dasselbe gilt für zwei sich entsprechende Gerade.*

Bemerkenswerth ist der Satz: *Eine (ebene) Homographie, bei welcher die Verwandtschaft (in dem oben angegebenen Sinn) involutorisch ist, muss nothwendiger Weise eine Homologie sein.*

Wenn die Homologieaxe die unendlich ferne Gerade ist, heissen die beiden ebenen Systeme *homothetisch* (ähnlich und ähnlich gelegen). Liegt auch das Centrum im Unendlichen, so sagt man, die beiden Systeme seien *congruent*.

Bei der homothetischen Verwandtschaft fallen die Grenzgeraden im Unendlichen zusammen.

Bei dieser Verwandtschaft ist das Verhältniss zweier geradliniger sich entsprechender Strecken constant (das Homothetieverhältniss).

Die homothetischen Systeme sind ein specieller Fall der ähnlichen Systeme.

Ein allgemeinerer Fall der involutorischen Homographie ist *die cyclische Homographie n^{ter} Ordnung* zweier conlocaler ebener Systeme. Man erhält sie, wenn man zu einem Punkt A der entsprechenden A' sucht, alsdann annimmt, A' gehöre dem ersten ebenen System an und unter dieser Annahme den A' entsprechenden Punkt sucht u. s. w., und wenn man nach n solchen Operationen wieder zu dem Punkt A zurückkehrt.

Benutzt man homogene Coordinaten für die Punkte der Ebene und wählt das Fundamentaldreieck so, dass seine Ecken in drei Doppelpunkte der cyclischen Homographie n^{ter} Ordnung fallen, so lassen sich die Gleichungen dieser Homographie immer auf die Form

$$x_1' = \varepsilon_1 x_1, \quad x_2' = \varepsilon_2 x_2, \quad x_3' = \varepsilon_3 x_3$$

reduciren, worin die ε, n^{te} primitive Wurzeln aus der Einheit sind.

Wenn die (reellen) Elemente zweier conlocaler oder nicht conlocaler ebener Systeme so einander zugeordnet werden, dass den Punkten des einen die Geraden des anderen entsprechen und umgekehrt, und dass Punkten, welche in der Geraden p der einen Ebene liegen, in der anderen Gerade entsprechen, die durch den p entsprechenden Punkt P gehen und umgekehrt, so sagt man die beiden Ebenen stehen in *correlativer* oder *dualer* oder *reciproker Correspondenz*.

In dem allgemeineren Fall, in welchem reelle und imaginäre Elemente in Betracht kommen, wird die *Dualität* analytisch durch Relationen vom Typus

$$u' = \frac{ax + by + c}{a''x + b''y + c''}, \quad v' = \frac{a'x + b'y + c'}{a''x + b''y + c''}$$

definirt, worin x, y Coordinaten von Punkten, u', v' Coordinaten von Geraden sind und die Determinante $(ab'c'')$ von Null verschieden ist.

Die Dualität ist bestimmt, wenn man den vier Ecken eines Vierecks die vier Seiten eines Vierseits entsprechen lässt.

Zwei ebene zu einem dritten duale Systeme sind homographisch zueinander.

Eine Reciprocität oder Dualität zweier conlocaler ebener Systeme kann *involutorisch* sein, d. h. so, dass einem Punkt immer dieselbe Gerade entspricht, mag man den Punkt als zum ersten oder als zum zweiten ebenen System gehörig betrachten; eine solche involutorische Dualität wird *Polarität* genannt.

Der Punkt und die Gerade, welche sich entsprechen, heissen in diesem Fall *Pol* bez. *Polare.*

Eine Dualität, bei der ein Dreieck existirt, dessen Ecken, als Punkte eines der beiden ebenen Systeme betrachtet, in dem anderen System die gegenüberliegenden Seiten entsprechen (Polardreieck, zu sich selbst reciprokes, sich selbst conjugirtes Dreieck), ist eine Polarität.

In jeder Polarität gibt es unendlich viele Polardreiecke.

Eine Polarität wird dadurch bestimmt, dass man ein Polardreieck feststellt, also ein solches, welches die vorstehend angegebene Eigenschaft besitzt, und die Polare eines Punktes angibt, der nicht auf einer Seite dieses Dreiecks liegt.

In einer Polarität heissen zwei Punkte *reciprok*, wenn der eine auf der Polaren des anderen liegt.

Eine ähnliche Definition gilt für *zwei reciproke Gerade.*

Wenn die Polare eines Punkts durch den Punkt selbst geht, so heisst der Punkt *Doppelpunkt* und seine Polare *Doppelgerade* der Polarität.

Analytisch wird die Polarität durch ähnliche Relationen definirt, wie die Dualität, wobei jedoch

$$a' = b,\ a'' = c,\ b'' = c' \text{ ist.}$$

Benutzt man homogene Coordinaten für die Punkte und die Geraden der Ebene, so lauten die Gleichungen der Dualität:

$$u_i = \sum_k a_{ik} x_k,\ (i, k = 1, 2, 3);$$

die Gleichungen der Polarität sind dieselben, nur ist $a_{ik} = a_{ki}$.

Die Doppelpunkte sind durch die Relation gegeben:

$$\sum a_{ik} x_i x_k = 0,$$

und liegen daher auf einem Kegelschnitt (siehe Kap. 3).

Wenn das Fundamentaldreieck der Coordinaten zu sich selbst reciprok ist, hat dieser Ausdruck den Typus

$$\sum a_{ii} x_i^2 = 0.$$

Wir halten es nicht für nöthig, die Geometrie der beiden anderen Grundgebilde 2ter Stufe, des Strahlen- und Ebenenbündels eingehend zu besprechen und bemerken nur, dass sich die Eigenschaften des Bündels aus denen des ebenen Systems ableiten lassen, wenn man sich das letztere von einem ausserhalb desselben liegenden Punkt projicirt denkt. Die Definitionen von *homographischen oder projectiven, correlativen oder reciproken* etc. *Bündeln* und die Grundeigenschaften dieser Beziehungen sind analog, wie bei den ebenen Systemen.

§ 4. Die Geometrie der Grundgebilde 3ter Stufe. Das räumliche Punkt- und Ebenensystem.

Zwischen den Tetraedern, welche zu Ecken vier von sechs gegebenen Punkten A, B, C, D, E, F des Raums haben, besteht die Relation:

$$ABEF \cdot CDEF + BCEF \cdot ADEF + CAEF \cdot BDEF = 0$$

für sieben Punkte ist:

$$ABCG \cdot DEFG + ACDG \cdot BEFG + ADBG \cdot CEFG = \\ = BCDG \cdot AEFG,$$

und für acht Punkte schliesslich:

$$BCDE \cdot AFGH + ACED \cdot BFGH + ADEB \cdot CFGH + \\ + ABEC \cdot DFGH + ABCD \cdot EFGH = 0$$

(Monge, Möbius).

Bezeichnet man mit $\delta_{12}, \delta_{13}, \cdots$ die Abstände zwischen fünf Punkten des Raums, so ist:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \delta_{51}^2 & \delta_{52}^2 & \delta_{53}^2 & \delta_{54}^2 \\ 1 & \delta_{15}^2 & 0 & \delta_{12}^2 & \delta_{13}^2 & \delta_{14}^2 \\ 1 & \delta_{25}^2 & \delta_{21}^2 & 0 & \delta_{23}^2 & \delta_{24}^2 \\ 1 & \delta_{35}^2 & \delta_{31}^2 & \delta_{32}^2 & 0 & \delta_{34}^2 \\ 1 & \delta_{45}^2 & \delta_{41}^2 & \delta_{42}^2 & \delta_{43}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Die letztere Relation hat Lagrange, *Mém. de Berlin,* 1773 igegeben, jedoch in anderer Form. Später beschäftigte sich it ihr: Carnot in einer speciellen Arbeit, *Sur la relation, qui iste* etc., Paris 1806 und Cayley, welcher ihr die Gestalt einer eterminante gab, *Cambr. math. Journ.,* 2.

Diese Beziehungen in Verbindung mit den analogen für e Gerade und Ebene wurden auch von Schering untersucht, ött. *Nachr.*, 1870; D'Ovidio, *Giorn. di Batt.*, 11; Study, eitschr. *für Math. und Physik,* 27 und neuerdings von De Tilly, Mém. *de Belg.*, 1893 und Mansion, *Société scient. de Bruxelles*, 1895.

Wir wollen annehmen, es seien im Raum drei Gerade Coordinatenaxen) festgesetzt, die sich in einem Punkt O (dem Coordinatenanfang) treffen. Die drei Geraden bestimmen drei benen (*Coordinatenebenen*) und durch jeden Punkt P des Raums ehen drei andere den drei ersten bez. parallele Ebenen.

Die Schnitte dieser letzteren mit den Coordinatenaxen er- eben drei Punkte auf den Axen, die man als Projectionen des egebenen Punkts des Raums ansehen kann; jedem Punkt des aums entsprechen so drei Projectionspunkte, je einer auf jeder er drei gegebenen Geraden; wenn man daher in jeder dieser eraden ein Coordinatensystem zur Bestimmung der Punkte dieser eraden festsetzt, *so kann man die drei Coordinaten der drei Projectionen von P als Coordinaten von P annehmen.* Man erhält) das Coordinatensystem, welches man das *Cartesische* zu nennen flegt.

Am häufigsten kommt es vor, dass die Coordinaten auf den rei geraden Punktreihen Cartesische Coordinaten sind, die den emeinschaftlichen Anfangspunkt O haben und durch dieselbe lasseinheit gemessen werden.

Stehen die drei Axen zu je zweien senkrecht aufeinander, o heisst das Coordinatensystem *rechtwinklig* oder *orthogonal.*

Wir wollen ferner annehmen, es sei ein Punkt O (der *Pol*) egeben, eine durch ihn gehende Gerade (die *Polaxe*) und eine urch diese gelegte Ebene (die *Polebene*).

Jeder Punkt P des Raums kann bestimmt werden, wenn ein Abstand ϱ von O, der Winkel θ, den die Gerade OP mit er Polaxe macht, und der Winkel φ bekannt ist, der den lächenwinkel misst, welcher von der Polebene und der durch und die Polaxe gelegten Ebene eingeschlossen wird.

Die drei Zahlen ϱ, θ, φ kann man zu Coordinaten von P nehmen; man erhält so das *Polarcoordinatensystem.* Man kann festsetzen, dass ϱ eine immer positive Grösse sein, θ immer zwischen 0 und π, φ dagegen zwischen 0 und 2π liegen soll.

Gibt man nun weiter den drei Coordinaten eines Punktes des Raums die Form

$$x = \frac{x_1}{x_4},\quad y = \frac{x_2}{x_4},\quad z = \frac{x_3}{x_4},$$

so heissen die Grössen x_1, x_2, x_3, x_4 *homogene Coordinaten.*

Von Systemen solcher Coordinaten ist besonders das der *Tetraedercoordinaten* bemerkenswerth, welches auch den Namen der *quadriplanaren (Vierebenen-)* oder *tetrametrischen Coordinaten* führt.

Nehmen wir vier Ebenen des Raums, welche ein (*Fundamental-*) *Tetraeder* bilden. Es seien p, q, r, s die Abstände eines Punktes P von den vier Ebenen, a, b, c, d vier Constanten und x_1, x_2, x_3, x_4 mögen proportional zu

$$\frac{p}{a},\quad \frac{q}{b},\quad \frac{r}{c},\quad \frac{s}{d} \quad \text{gesetzt werden.}$$

Die vier Ecken des Tetraeders heissen die *Fundamentalpunkte*, die vier Ebenen die *Fundamentalebenen.* Der Punkt E, dessen Coordinaten sämmtlich gleich sind, der Punkt also, dessen Abstände von den vier Seitenflächen proportional zu a, b, c, d sind, heisst der *Einheitspunkt.*

Aehnlich, wie in § 3, erkennt man, dass *die Verhältnisse zweier beliebiger dieser homogenen Coordinaten den Doppelverhältnissen der vier Ebenen eines Büschels gleich sind, welches eine der Kanten des Tetraeders zur Axe hat, und dessen vier Ebenen die folgenden sind: die zwei Seitenflächen des Tetraeders, welche durch diese Kante gehen, sowie die durch U und die durch V gehende Ebene.*

Die so definirten Coordinaten sind daher *projective.*

Wenn eine der Ebenen des Tetraeders die unendlich ferne Ebene ist, so reducirt sich das Tetraedercoordinatensystem auf ein Cartesisches, wie in § 3.

Wie bei der Ebene, so tritt uns auch hier zuerst das Problem der *Coordinatentransformation* entgegen, d. h. die Vermittelung der Formeln, mittelst welcher sich die Coordinaten eines gewissen Systems durch die eines anderen ausdrücken lassen

Sind die beiden Systeme Cartesische, so bestehen die Relationen:

$$x = \frac{X\cos(Xx') + Y\cos(Yx') + Z\cos(Zx')}{\cos(xx')} + a,$$

$$y = \frac{X\cos(Xy') + Y\cos(Yy') + Z\cos(Zy')}{\cos(yy')} + b,$$

$$z = \frac{X\cos(Xz') + Y\cos(Yz') + Z\cos(Zz')}{\cos(zz')} + c,$$

worin (x, y, z), (X, Y, Z) *die Coordinaten desselben Punkts in dem einen und in dem anderen System bedeuten,* (a, b, c) *die Coordinaten des Anfangspunkts des zweiten Systems in Bezug auf das erste bezeichnen,* x', y', z' *die Richtungen der Lothe auf die Ebenen* yz, zx, xy *und*

$$\cos(xx'), \cdots, \cos(Xx'), \cdots$$

die Cosinus der von den Geraden $x, x', \cdots$ *bez.* $X, x', \cdots$ *gebildeten Winkel sind.*

Für rechtwinklige Systeme werden die Formeln einfacher:

$$x = a + X\cos(Xx) + Y\cos(Yx) + Z\cos(Zx),$$
$$y = b + X\cos(Xy) + Y\cos(Yy) + Z\cos(Zy),$$
$$z = c + X\cos(Xz) + Y\cos(Yz) + Z\cos(Zz).$$

In diesem Fall gibt es zwischen den neun Cosinus $\cos(Xx), \cdots$ *verschiedene Beziehungen, nämlich:*

(1) $\cos^2(Xx) + \cos^2(Xy) + \cos^2(Xz) = 1,$

(2) $\cos^2(Xx) + \cos^2(Yx) + \cos^2(Zx) = 1,$

(3) $\cos(Yx)\cos(Zx) + \cos(Yy)\cos(Zy) + \cos(Yz)\cos(Zz) = 0,$

(4) $\cos(Xy)\cos(Xz) + \cos(Yy)\cos(Yz) + \cos(Zy)\cos(Zz) = 0,$

und je zwei weitere, die man durch Vertauschung von X *mit* Y *bez.* Z *aus der ersten, von* x *mit* y *bez.* z *aus der zweiten und durch cyclische Vertauschung von* X, Y, Z *aus der dritten und von* x, y, z *aus der vierten Gleichung erhält.*

Im Ganzen sind es also 12 Relationen, von denen jedoch nur 6 unabhängig voneinander sind.

Die Formeln, mittelst welcher die Polarcoordinaten durch orthogonale Cartesische und umgekehrt ausgedrückt werden, lauten, wenn man annimmt, der Anfangspunkt der orthogonalen Cartesischen Coordinaten falle mit dem Pol des Polarcoordinatensystems, die Polaxe mit der z-Axe und die Polebene mit der xz-Ebene zusammen:

$$x = \varrho \sin\theta \cos\varphi, \qquad \varrho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$
$$y = \varrho \sin\theta \sin\varphi, \quad \cos\theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$
$$z = \varrho \cos\theta, \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}.$$

Bei dem Cartesischen Coordinatensystem liegen drei Punkte mit den Coordinaten (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) *in einer Geraden, wenn*

$$\frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_3} = \frac{y_1 - y_2}{y_1 - y_3} = \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3}$$

ist, oder, was dasselbe bedeutet, wenn die Determinanten der Matrix

$$\begin{Vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{Vmatrix}$$

verschwinden. Dabei reicht es aus, wenn nur zwei dieser Determinanten Null werden.

Der Abstand eines Punktes (x, y, z) *vom Coordinatenanfang ist durch die Formel*

$$\varrho^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy\cos(xy) + 2yz\cos(yz) + 2zx\cos(zx)$$

gegeben.

Zwischen den Cosinus der Winkel, welche eine Gerade r *mit den drei Coordinatenaxen bildet, besteht die Relation:*

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos(rx) & \cos(ry) & \cos(rz) \\ \cos(xr) & 1 & \cos(xy) & \cos(xz) \\ \cos(yr) & \cos(yx) & 1 & \cos(yz) \\ \cos(zr) & \cos(zx) & \cos(zy) & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Für rechtwinklige Axen ist einfach

$$\cos^2(rx) + \cos^2(ry) + \cos^2(rz) = 1.$$

Der Winkel, den zwei Gerade r, r' *miteinander bilden, ist bei rechtwinkligen Axen durch die Formeln*

$$\cos(rr') = \cos(xr)\cos(xr') + \cos(yr)\cos(yr') + \cos(zr)\cos(zr')$$

$$\sin^2(rr') = \begin{Vmatrix} \cos(xr) & \cos(yr) & \cos(zr) \\ \cos(xr') & \cos(yr') & \cos(zr') \end{Vmatrix}^2$$

gegeben.

Der Flächeninhalt A des Dreiecks, dessen Ecken die Punkte mit den Coordinaten (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) *sind, wird in rechtwinkligen Coordinaten durch*

$$4A^2 = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}^2$$

bestimmt.

Das Volumen V des durch die vier Punkte x_1, y_1, z_1 *etc. bestimmten Tetraeders ist seinem absoluten Werth nach in beliebigen Cartesischen Coordinaten*

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & \cos(xy) & \cos(xz) \\ \cos(yx) & 1 & \cos(yz) \\ \cos(zx) & \cos(zy) & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}.$$

Für rechtwinklige Axen wird die erste Determinante gleich 1.

Die Cartesischen Coordinaten x, y, z *des Punkts einer Ebene genügen einer Gleichung* 1ten *Grads vom Typus:*

$$ax + by + cz + d = 0 \quad (\textit{Gleichung der Ebene})$$

und jede so beschaffene Gleichung stellt eine Ebene dar.

Die nothwendige und ausreichende Bedingung, damit vier Punkte in einer Ebene liegen, ist:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

worin die drei ersten Elemente jeder Zeile die Cartesischen Coordinaten eines der vier Punkte sind.

Die Ebene, welche durch die drei Punkte mit den Coordinaten

$$(x_1, y_1, z_1), \ (x_2, y_2, z_2), \ (x_3, y_3, z_3)$$

geht, wird durch dieselbe Gleichung dargestellt. Darin sind alsdann $(x\ y\ z)$ *die Coordinaten eines unbestimmten Punkts der Ebene (die laufenden Coordinaten).*

$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1$ *ist die Gleichung der Ebene, welche auf den Axen, vom Anfangspunkt aus gemessen, die Strecken* p, q, r *abschneidet.*

Zwei Ebenen

$$ax + by + cz + d = 0, \quad a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

sind dann und nur dann parallel, wenn

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \quad \textit{ist.}$$

Eine Gerade im Raum wird durch zwei Gleichungen dargestellt, welche die Gleichungen zweier durch sie gehender Ebenen sind.

Drei Ebenen gehören einem Büschel an, d. h. sie haben eine Gerade gemeinschaftlich, wenn die Determinanten 3ter Ordnung der Matrix

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{vmatrix}$$

verschwinden; dabei reicht es hin, wenn nur zwei Determinanten Null werden.

Vier Ebenen gehen durch einen Punkt, wenn die Determinante 4ter Ordnung der 16 Coefficienten der Gleichungen der vier Ebenen verschwindet.

Bezeichnet man mit α, β, γ die Winkel, welche das Loth auf die Ebene mit den Axen bildet, und mit ϱ den Abstand des Coordinatenanfangs von der Ebene, so lässt sich die Gleichung der Ebene schreiben:

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - \varrho = 0 \quad \textit{(die Normalform).}$$

Bei rechtwinkligen Axen reducirt sich die allgemeine Gleichung der Ebene auf die Normalform, wenn man sie mit

$$\frac{1}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

multiplicirt, wobei dem Radical das Vorzeichen gegeben werden muss, welches dem Vorzeichen des konstanten Terms der Gleichung entgegengesetzt ist.

Den Abstand eines Punkts X, Y, Z von einer Ebene erhält man, wenn in der negativ genommenen linken Seite der Normalgleichung der Ebene an die Stelle der laufenden Coordinaten diejenigen des Punkts gesetzt werden.

Der Winkel α zweier Ebenen ist für rechtwinklige Axen durch

$$\cos\alpha = \frac{aa' + bb' + cc'}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\,\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}},$$

$$\sin^2\alpha = \frac{\left\| \begin{matrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{matrix} \right\|^2}{(a^2 + b^2 + c^2)\,(a'^2 + b'^2 + c'^2)} \quad \textit{gegeben.}$$

Die Bedingung dafür, dass zwei Ebenen lothrecht aufeinander stehen, ist für rechtwinklige Axen:

$$aa' + bb' + cc' = 0.$$

Gibt man der Gleichung der Ebene die Form

$$ux + vy + wz + 1 = 0,$$

so können die Coefficienten u, v, w als *Coordinaten der Ebene* betrachtet werden.

Es lassen sich nun ähnliche Betrachtungen anstellen, wie über die Coordinaten von Geraden in der Ebene; doch wollen wir uns dabei nicht aufhalten.

Zwei Räume (von drei Dimensionen) sind *homographisch* oder *collinear* oder *projectiv*, wenn sie sich so entsprechen, dass jedem (reellen) Punkt P und jeder (reellen) Ebene p des einen Raums ein Punkt P' und eine Ebene p' des anderen zugeordnet ist, und dabei, wenn P in p liegt, auch der entsprechende Punkt P' der entsprechenden Ebene p' angehört; oder mit anderen Worten: wenn sich in dem ersten Raum ein Punkt in einer Ebene bewegt, so verschiebt sich auch der entsprechende Punkt in dem zweiten Raum in der Ebene, welche der ersten Ebene entspricht.

Die analytischen Definitionen (welche die vorstehende enthalten und auch den Fall imaginärer Elemente umfassen) für zwei homographische Räume sind die folgenden: Versteht man unter x, y, z und x', y', z' die Coordinaten der sich in den beiden Räumen entsprechenden Punkte, so heissen diese Räume *homographisch*, wenn die Beziehungen bestehen:

$$x' = \frac{ax + by + cz + d}{a'''x + b'''y + c'''z + d'''},$$

$$y' = \frac{a'x + b'y + c'z + d'}{a'''x + b'''y + c'''z + d'''},$$

$$z' = \frac{a''x + b''y + c''z + d''}{a'''x + b'''y + c'''z + d'''},$$

worin die Determinante $(a\,b'\,c''\,d''')$ von Null verschieden ist; oder auch: wenn zwischen den Coordinaten u, v, w; u', v', w' der zwei sich in den beiden Räumen entsprechenden Ebenen den vorstehenden ähnliche linear gebrochene Relationen bestehen.

Es gibt im Allgemeinen vier Doppelpunkte und -Ebenen (d. h. Punkte und Ebenen, die sich selbst entsprechen).

Die Homographie zwischen zwei Räumen ist bestimmt, wenn festgestellt ist, dass die vier Ecken (oder die vier Seitenflächen) eines Tetraeders in dem einen den Ecken (oder Seitenflächen) eines Tetraeders in dem anderen Raum zugeordnet sind, und dass ferner eine Ebene des ersten Raums, welche nicht durch einen der vier Punkte geht (oder ein Punkt, welcher nicht in einer der vier Seitenflächen liegt) einer Ebene des zweiten Raums zugeordnet ist, welche nicht durch einen der vier entsprechenden Punkte geht (oder einem Punkt, welcher nicht in einer der vier entsprechenden Seitenflächen liegt).

Wenn die unendlich fernen Ebenen zweier Räume sich entsprechen, so wird die Homographie zur *Affinität.*

Die Affinität zweier Räume wird bestimmt, indem man feststellt, dass vier Seitenflächen (oder Ecken) eines Tetraeders in dem einen vier Seitenflächen (oder Ecken) eines Tetraeders in dem anderen Raum entsprechen.

In zwei affinen Räumen sind zwei sich entsprechende Punktreihen ähnlich und zwei sich entsprechende Ebenen affin.

In zwei affinen Räumen haben die Abstände zweier sich entsprechender Punkte von zwei festen Ebenen ein constantes Verhältniss.

Die Volumina zweier sich entsprechender Körper in zwei affinen Räumen stehen in constantem Verhältniss.

Ein specieller Fall der Affinität ist die *Aehnlichkeit.* Zwei Räume heissen *ähnlich*, wenn die sich entsprechenden Winkel gleich sind.

In zwei ähnlichen Räumen sind zwei sich entsprechende ebene Systeme ebenfalls ähnlich (vergl. § 3).

Zwei homographische Räume, welche ein Bündel von Doppelelementen oder auch ein ebenes System von Doppelelementen enthalten (*das Eine ist die Folge des Anderen*) heissen *homolog*; der Mittelpunkt des Bündels heisst das *Centrum der Homologie* und die Ebene die *Homologieebene.* Wenn die Correspondenz zwischen den beiden Räumen involutorisch ist, so erhält man, wie gewöhnlich, die *involutorische oder harmonische Homologie.*

Zwei homologe Räume werden durch das Centrum, die Ebene der Homologie und die Zuordnung zweier Punkte definirt, die mit dem Centrum der Homologie nothwendiger Weise in einer Geraden liegen müssen, und von denen keiner mit diesem Centrum zusammenfällt.

Liegt das Centrum unendlich fern, so ergibt sich die *affine Homologie*, liegt dagegen die Homologieebene im Unendlichen, so erhält man die *Homothetie.*

Die Homothetie ist ein specieller Fall der Aehnlichkeit. Daher:

Im Fall der Homothetie ist das Verhältniss zweier sich entsprechender geradliniger Strecken constant.

Zwei ähnliche Räume können immer in homothetische Lage gebracht werden.

Bemerkenswert ist auch die *axiale Homographie*, welche alle Punkte zweier windschiefen Geraden (die dann auch Enveloppen von Doppelebenen sind) zu Doppelpunkten hat.

Bei der axialen Homographie liegen zwei sich entsprechende Punkte immer auf einer Geraden, welche die beiden Geraden der Doppelpunkte in zwei Punkten schneidet, die mit den ersteren in constantem anharmonischem Verhältniss stehen.

Eine solche Homographie wird involutorisch, wenn dieses Quadrupel von Punkten harmonisch ist.

Jede involutorische räumliche Homographie kann entweder eine involutorische Homologie oder eine involutorische axiale Homographie sein.

Ein allgemeinerer Fall der involutorischen Homographie ist auch hier die *cyclische Homographie von der n^{ten} Ordnung*, für welche die analoge Definition, wie in den vorigen Paragraphen, gilt.

Zwischen den Punkten und Ebenen eines Raums und den Ebenen und Punkten eines anderen kann man sich eine ein-eindeutige Zuordnung denken, welche derjenigen ähnlich ist, von der in § 3 die Rede war; sie heisst *Dualität* oder *Correlativität* oder *Reciprocität.*

In homogenen Coordinaten von Punkten und Ebenen lauten die Gleichungen der räumlichen Dualität

$$u_i' = \sum_k a_{ik}\, x_k, \quad (i, k = 1, 2, 3, 4).$$

Die Dualität ist in zwei Fällen involutorisch: wenn $a_{ik} = a_{ki}$ und wenn $a_{ik} = -a_{ki}$ ist, woraus $a_{ii} = 0$ folgt. In dem ersten

Fall heisst sie *gewöhnliche Polarität*, in dem zweiten *Nullpolarität* oder *Nullsystem*.

Bei der gewöhnlichen Polarität ist der Ort der Punkte, die auf den ihnen entsprechenden Ebenen liegen, eine Fläche zweiter Ordnung; vergl. Kap. 4.

Bei dem Nullsystem liegt jeder Punkt in der ihm entsprechenden Ebene, geht jede Ebene durch ihren eigenen Pol und ist die Gesammtheit der Doppelgeraden ein linearer Complex, vergl. Kap. 14, § 3.

Mit den *Nullpolaritäten* oder *Nullsystemen* haben sich zuerst Giorgini, *Mem. della Soc. it. delle scienze*, 20, 1827, später Möbius, Chasles, v. Staudt, etc. beschäftigt, vergl. Kap. 10, § 2.

Wir wollen nun die sogenannten *Antiprojectivitäten* Segre's kurz besprechen.

Es seien x_i die homogenen Coordinaten der (reellen oder complexen) Punkte eines Raums (von 2 oder 3 Dimensionen) und ähnlich u_i die homogenen Coordinaten des dem Punkt in diesem Raum dualen Elementes (d. h. der Geraden oder der Ebene, je nachdem der Raum 2 oder 3 Dimensionen hat). Wir bezeichnen die zu x_i, u_i *conjugirt complexen Grössen* mit $\bar{x}_i, \bar{u}_i$.

Wir ersetzen dann die gewöhnlichen Relationen der Homographie und der Dualität durch die folgenden:

$$x_i' = \sum_k a_{ik}\,\bar{x}_k,$$

$$u_i' = \sum_k a_{ik}\,\bar{x}_k.$$

Durch diese Formeln werden zwei ein-eindeutige Zuordnungen zwischen den Elementen x, x' oder x, u' zweier Räume festgestellt. Bei der ersten entsprechen Punkten einer Geraden oder einer Ebene wie bei der Homographie, wieder Punkte einer Geraden oder einer Ebene; bei der zweiten entsprechen Punkten einer Geraden oder Ebene, wie bei der Dualität, Gerade oder Ebenen eines Büschels oder auch Ebenen eines Bündels.

Diese Zuordnungen heissen *Anticollineation* (oder *Antiprojectivität*) bez. *Antidualität.*

Für sie bleibt die Eigenschaft bestehen, dass harmonischen Elementen harmonische Elemente entsprechen.

Sind diese Correspondenzen involutorisch, so erhält man die *Antiinvolutionen* und *Antipolaritäten.*

Die Betrachtung der Doppelelemente einer Antipolarität führt zu den sogenannten *Hyperkegelschnitten* und *Hyperquadriflächen*, welche durch eine Gleichung vom Typus

$$\sum a_{ik} x_i \bar{x}_k = 0$$

dargestellt werden, worin $a_{ik} = \bar{a}_{ki}$ ist.

Die linke Seite dieser Gleichung eines Hyperkegelschnitts oder einer Hyperquadrifläche führt zur Betrachtung von Formen:

$$\sum a_{ik} x_i \bar{x}_k,$$

wobei $a_{ik} = \bar{a}_{ki}$ ist; eine derartige Form heisst, welches auch immer die Zahl der Variabelen sei, eine Hermite'sche *Form*; Hermite, Crelle, 47, 52, 53. Siehe auch Repert. I, Kap. 12, §§ 15, 22.

Ueber diese Zuordnungen vergl. die vier Artikel von Segre, *Un nuovo campo di ricerche geometriche*, *Atti di Torino*, 1890 und *Math. Ann.* 40. Siehe auch C. Juel, *Ueber einige Grundgebilde der projectiven Geometrie, Acta math.*, 14, p. 1—30.

Die älteste analytische Geometrie ist wohl die im Jahr 1637 in erster Auflage erschienene *Géometrie* von Descartes gewesen, deren spätere Ausgabe mit Anmerkungen von De Beaune und Schooten versehen ist. Siehe das Namenregister.

In diesem Buch wird zum ersten Mal in wissenschaftlicher Art der Begriff der Coordinaten in der Ebene eingeführt, während der Begriff der Coordinaten in der geraden Punktreihe wohl von Vieta, 1540—1603 (siehe das Namenregister) herrührt. Die barycentrischen Coordinaten sind von Möbius, *der barycentrische Calcül*, Leipzig 1827, die projectiven von Staudt, *Beiträge zur Geometrie der Lage*, 2 Hfte., Nürnberg 1856, 1857 und von Fiedler, *Die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage*, 3. Aufl., 3 Thle., Leipzig 1883, 85, 88 eingeführt worden; die *homogenen* haben Möbius, Plücker und Hesse eingehend studirt.

Der Begriff des *Doppelverhältnisses* findet sich bei Möbius, der ihn *Doppelschnittverhältniss* nannte, und bei Chasles, der ihm den Namen *anharmonisches Verhältniss* gab. Andere Untersuchungen sind von Steiner und namentlich von Staudt, der den Begriff unabhängig von dem Begriff der Länge definirte.

Das Princip der Homologie hat Poncelet, *Propriétés projectives des figures*, Paris 1822 angewendet, das der Homographie

Möbius, Steiner und Chasles und das Princip der Dualität verdankt man speciell Gergonne, *Ann. des math.*, 1827, Chasles und Plücker.

Die *Involution* von Punkten wurde, abgesehen von den alten Griechen, unter den Neueren zuerst von Desargues (1593—1662) studirt, von welchem auch der Name herrührt.

Die *projective Geometrie*, d. h. diejenige, welche die projectiven Eigenschaften der Figuren behandelt, hat sich etwa in der ersten Hälfte dieses Jahrhunderts zur Wissenschaft ausgebildet. Die ersten wichtigen Werke sind von Poncelet, *Traité des propr. project. des figures,* Metz et Paris, 1822; Steiner, *System. Entwickl.* etc., Berlin 1832; auch in Ostwald's Klassikern, Nr. 82, 83, vergl. Namenregister; Staudt, *Geometrie der Lage,* Nürnberg, 1847; Chasles, *Traité de Géom. supér.*, Bruxelles 1852, *Traité de Sect. coniques*, Paris 1865. Von den Neueren citiren wir Clebsch-Lindemann, *Vorlesungen über Geometrie,* Leipzig 1876, 1891; Cremona, *Elementi di Geometria projettiva*, Torino 1878 (deutsch von Trautvetter), von welchen Uebersetzungen in verschiedenen Sprachen existiren; Reye, *Geometrie der Lage,* 2 Bde., Hannover 1877—1880; Pasch, *Vorlesungen über neuere Geometrie,* Leipzig 1882; Weyr, *Die Elemente der projectivischen Geometrie.* 2 Hfte., Wien 1883, 1887; die neuesten sind Sannia, Napoli. 1891, 1894 und Enriques, Bologna, 1898.

Zu diesen Werken könnte man die Bücher über *darstellende Geometrie* hinzufügen, die auch die projective Geometrie behandeln, wie z. B. die berühmten Werke von Fiedler, *Darstell Geom.*, Leipzig 1883—1888 und Wiener, *Lehrbuch der darst Geom.*, 2 Bde., Leipzig 1884, 1887. Man beachte, dass die projective Geometrie von den verschiedenen Autoren verschieden Namen erhalten hat; Chasles nannte sie *neue oder höhere Geometrie,* Carnot, Cayley, v. Staudt, Gergonne und Ander *Geometrie der Lage*, Cremona, Klein etc. *projective Geometrie*

Nahe verwandt mit der projectiven Geometrie ist die so genannte *darstellende*, deren Zweck es ist, räumliche Figure durch Centralprojectionen oder rechtwinklige Parallelprojectione auf einer Ebene darzustellen und die Eigenschaften dieser Ab bildungen zu untersuchen.

Man verdankt Monge, *Géom. descr.*, Paris 1795 auch i Ostwald's Klassikern, N. 117 (vergl. Namenregister) die erst systematische Behandlung der darstellenden Geometrie, di im Anfang des 19ten Jahrhunderts durch Monge, Lacroix Olivier, Hachette, Dupin weiter entwickelt wurde. Ein

ingehende Geschichte der darstellenden Geometrie findet man in lem ersten Kapitel des oben citirten Werks von Wiener und in inem neuen Buche von Obenrauch, *Gesch. der darst. und project. Geom.*, Brünn 1897.

Unter den Begriffen, die dazu gedient haben, den geometrischen Resultaten grössere Einheit und Einfachheit sowie allgemeinere Gültigkeit zu geben und unnöthige Classificationen von Ausnahmsfällen zu vermeiden, sind besonders die Begriffe der *unendlich fernen* und *der imaginären Elemente* hervorzuheben. Der erste geht bis auf Desargues zurück; der zweite ist eine Folge der Anwendung der Analysis auf die Geometrie.

Verschiedene Autoren haben versucht, den letzteren Begriff unabhängig von allen analytischen Begriffen in die reine Geometrie einzuführen. Dazu können die *elliptischen Involutionen* dienen, deren Doppelpunkte, wie man weiss, imaginär sind und deren Paare von reellen Punkten sich mithin zur Definition eines Paares imaginärer Punkte benutzen lassen. Untersuchungen dieser Art hat hauptsächlich Staudt angestellt; die modernen Darstellungen der projectiven Geometrie z. B. das oben citirte Buch von Sannia entwickeln diese Begriffe ins Einzelne.

Von den Werken über *analytische Geometrie* citiren wir die allgemein bekannten Bücher von Salmon, die verschiedene Ausgaben und Uebersetzungen erlebt haben (siehe Namenregister); Baltzer, *Analytische Geometrie,* Dresden 1882; Hesse, Leipzig 1866—76 (siehe Namenregister) und D'Ovidio, *Geometria analitica*, Torino 1896. Vergl. zu dem letzteren die Besprechung im *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, Berlin 1896, in welcher die Vorgeschichte des Buches behandelt wird, das aus zwei verschiedenen in den Jahren 1873 und 1885 erschienenen Büchern zusammengeschmolzen wurde.

Zur Einführung in die analytische Geometrie ist zu empfehlen: F. Schur, *Lehrbuch der analytischen Geometrie*, Leipzig 1898; Ganter und Rudio, *Analytische Geometrie der Ebene und des Raumes,* Leipzig 1897, 1899; M. Simon, *Analytische Geometrie der Ebene,* Leipzig 1897; derselbe, *Analytische Geometrie des Raums,* Leipzig 1898.

Kapitel II.

Die Geometrie der unstetigen Gebilde.

§ 1. Allgemeines.

Die Gebilde, die wir in diesem Kapitel betrachten werden sind Figuren, die aus Punkten, Geraden und Ebenen in endlicher Anzahl bestehen; man pflegt sie im Gegensatz zu den in vorigen Kapitel betrachteten Figuren *unstetige Gebilde* zu nennen weil man offenbar von einem ihrer Elemente zu einem anderen stetig nicht übergehen kann, wenn dabei immer nur in der Gebilde enthaltene Elemente derselben Art durchlaufen werden

Eine Gruppe einer endlichen Anzahl von Punkten eine Punktreihe oder einer Ebene oder eines Raums oder auch ein Gruppe einer endlichen Anzahl von Geraden oder Ebenen eine Büschels etc. sind *unstetige Gebilde.* Ausser ihnen gibt es noch di folgenden:

Ein vollständiges ebenes n-Eck ist ein System von n Punkten (*Ecken*) einer Ebene, von denen keine drei in derselbe Geraden liegen, in Verbindung mit den $\frac{n(n-1)}{2}$ Geraden (*Seiten* welche sie zu je zweien miteinander verbinden.

Der Schnitt zweier Seiten, welche nicht beide durch eine der n Punkte gehen, heisst *Diagonalecke.*

Die Anzahl dieser Ecken beträgt $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8}$.

Ein vollständiges ebenes n-Seit ist ein System von n Geraden (*Seiten*) einer Ebene, von denen keine drei sich in den selben Punkt treffen, in Verbindung mit den $\frac{n(n-1)}{2}$ Punkte (*Ecken*), in denen sie sich zu je zweien schneiden. Jede Gerad welche zwei nicht auf derselben Seite liegende Ecken verbinde heisst *Diagonale.*

Die Anzahl dieser Diagonalen beträgt $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8}$.

Ein einfaches ebenes n-Eck oder n-Seit ist ein System von n einer gegebenen cyclischen Reihenfolge betrachteten Punkten ner Ebene, wenn es mit dem System der n Geraden zusammen-fasst wird, welche jeden Punkt mit dem folgenden verbinden.

Projicirt man das vollständige ebene n-Eck von einem unkt ausserhalb seiner Ebene, so erhält man einen *vollständi-n n-kantigen Winkel* (ein *vollständiges n-Kant*) und durch rojection des n-Seits von einem Punkt ausserhalb seiner Ebene en *vollständigen n-flachigen Winkel* (das *vollständige n-Seit im trahlenbündel).*

Ein vollständiges windschiefes n-Eck ist ein System von Punkten, von denen keine vier in derselben Ebene liegen, i Verbindung mit den $\frac{n(n-1)}{2}$ Geraden, welche durch je zwei on ihnen gehen und mit den

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3}$$

benen (*Seitenflächen*), welche durch je drei von ihnen gelegt sind.

Ein vollständiges n-Flach ist die der vorigen correlative igur, d. h. das System von n Ebenen, von denen keine vier urch denselben Punkt gehen, in Verbindung mit allen ihren chnittgeraden und Schnittpunkten.

Zwei auf einander bezogene vollständige ebene n-Ecke eissen *perspectiv*, wenn die Verbindungsgeraden der sich ent-rechenden Ecken in demselben Punkt zusammenlaufen, sie eissen *homolog*, wenn sich die entsprechenden Seiten in Punkten erselben Geraden *(der Homologieaxe)* schneiden.

Zwei aufeinander bezogene vollständige ebene n-Seite nennt an *perspectiv*, wenn sich die entsprechenden Seiten in Punkten erselben Geraden treffen; sie heissen *homolog,* wenn die Ver-ndungsgeraden der entsprechenden Ecken durch denselben Punkt *las Homologiecentrum*) gehen.

Aehnliche Definitionen gelten für zwei n-Seite im Strahlen-ündel und für zwei n-Kante.

Zwei aufeinander bezogene windschiefe vollständige n-Ecke eissen *perspectiv*, wenn die Geraden, welche die entsprechen-en Ecken verbinden, durch denselben Punkt gehen, und heissen *omolog*, wenn die entsprechenden Seitenflächen sich in Geraden chneiden, die in derselben Ebene (der *Homologieebene*) liegen.

Zwei n-Ecke sind *projectiv*, wenn sich das eine aus de anderen durch eine endliche Anzahl von Projectionen u Schnitten ableiten lässt.

Zwei perspective in verschiedenen Ebenen gelegene n-Ec sind nothwendiger Weise auch homolog. Ein ähnlicher Satz gi für zwei perspective n-Flache mit verschiedenen Centren.

Zwei Dreiecke, zwei Dreiseite, zwei Dreiflache oder zw Dreikante sind, wenn sie perspectiv sind, auch homolog.

Zwei ebene Vierecke sind immer projectiv.

Zwei perspective vollständige windschiefe Vierecke sind au homolog.

Wenn in zwei vollständigen n-Ecken

$$A_1 A_2 \cdots A_n, \quad A_1' A_2' \cdots A_n',$$

welche aufeinander bezogen werden und entweder in derselb oder in verschiedenen Ebenen liegen, eine Seite $A_1 A_2$ des erst und alle übrigen $2n - 4$ Seiten, welche durch A_1 oder A_2 geh die entsprechenden Seiten des anderen n-Ecks in ebensoviel Punkten einer Geraden s schneiden, so sind die beiden n-Ec homolog; bezeichnet man mit S das Homologiecentrum, so lieg zwei beliebige sich entsprechende Diagonalecken P, P' der bei n-Ecke mit S in derselben Geraden.

Ein ähnlicher Satz gilt für zwei *vollständige ebene n-Se* zwei *vollständige n-flachige Winkel* und zwei *vollständige n-Ka*

Die Definitionen in diesem Paragraphen rühren zum gros Theil von Steiner her, *ges. Werke*, herausg. von Weierstra 2 Bde., Berlin 1882, 1, p. 288—396.

§ 2. Projective Eigenschaften der Gruppen von Punkt auf einer Geraden. Polarität. Harmonische Mittelpunk

Eine Gruppe von n Punkten auf einer Geraden kann a lytisch durch die Wurzeln einer binären Form von der n^{ten} G nung dargestellt werden. Das Studium der Invarianten Covarianten dieser Form führt zu der Ermittelung specie invarianter oder, geometrisch ausgedrückt, projectiver Eigensch ten der Gruppe von Punkten.

Für die Werthe $n = 2, 3, 4, \cdots$ haben wir in Bd Kap. 12 die Resultate angegeben, die man vom Standp der analytischen Theorie der Formen aus erhält. Wir wo im nächsten Paragraphen die geometrischen Resultate mitthe die jenen analytischen entsprechen, und bitten den Leser, sich damals gefundenen Ergebnisse, Begriffe und Benennungen ge

ärtig zu halten. Hier sollen zunächst die Polarität und die armonischen Mittelpunkte besprochen werden.

Polarität. Wenn eine Form a_x^n gegeben ist, so können wir e Polaren $a_x^{n-1}a_y$, $a_x^{n-2}a_y^2$, $\cdots$ bilden und die Wurzelpunkte eser gleich Null gesetzten Formen betrachten, wenn angenommen ird, y sei ein gegebener Punkt. Diese Gruppen von Punkten eissen bezüglich die 1te, 2te, $\cdots$ *Polargruppe von y.* Man ennt sie auch *harmonische Gruppen von y* oder *harmonische littelpunkte* vom $n-1^{ten}$, $n-2^{ten}$, $\cdots$ Grad. Jonquières, ourn. de Liouville, 1851. Die letzte Polargruppe wird durch nen einzigen Punkt gebildet, den Poncelet, *Crelle*, 3 *das entrum der harmonischen Mittel* nannte.

Wenn der Pol ins Unendliche rückt, so wird das Centrum er harmonischen Mittel das *Centrum der mittleren Abstände,* elches die Eigenschaft besitzt, dass *die algebraische Summe iner Abstände von den n Punkten Null ist.*

Wir wollen nun einige Grundeigenschaften der *harmoischen Mittelpunkte,* oder, wie man auch sagt, der *Polarsysteme* ngeben.

Ist M ein harmonischer Mittelpunkt r^{ten} Grades eines gebenen Systems von n Punkten in Bezug den Pol O, so ist umekehrt O ein harmonischer Mittelpunkt $(n-r)^{ten}$ Grads desselben ystems in Bezug auf den Pol M.

Sind $M_1, M_2, \cdots, M_r$ die harmonischen Mittelpunkte r^{ten} rades eines Systems von n Punkten bez. eines Pols O, so sind ie harmonischen Mittelpunkte vom s^{ten} Grad $(s<r)$ des Systems $_1, \cdots, M_r$ bez. des Pols O auch die harmonischen Mittelpunkte om s^{ten} Grad des gegebenen Systems bez. desselben Pols O.

Wenn $M_1, \cdots, M_r$ die harmonischen Mittelpunkte r^{ten} Grades ez. eines Pols O_r und $N_1, \cdots, N_s$ diejenigen s^{ten} Grads bez. ines Pols O_s sind, so fallen die harmonischen Mittelpunkte vom $r+s-n)^{ten}$ Grad des Systems $M_1, \cdots, M_r$ bez. des Pols O_s it den harmonischen Centren $(r+s-n)^{ten}$ Grades des Systems $_1, \cdots, N_s$ bez. des Pols O_r zusammen.

Ist A_1 der harmonische Mittelpunkt 1ten Grades des Systems $_2, A_3, \cdots, A_n$ bez. eines Pols O, so ist er auch der harmonische littelpunkt 1ten Grades des Systems $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$ bez. desselben Pols.

Fallen r Punkte des Systems $A_1, \cdots, A_n$ in einen einzigen zuammen, so fallen auch $r-p$ harmonische Mittelpunkte $(n-p)^{ten}$ rades bez. eines beliebigen Pols mit diesem Punkt zusammen.

Die harmonischen Mittelpunkte r^{ten} Grades bez. eines zu Pol genommenen s-fachen Punkts des gegebenen Systems besteh aus diesem s-mal gerechneten Punkt und den harmonisch Mittelpunkten $(r-s)^{\text{ten}}$ Grads der übrigen $n-s$ Punkte des g gebenen Systems bez. desselben Punkts.

Wenn in dem gegebenen System s Punkte in einen zusa menfallen, so sind die harmonischen Centren r^{ten} Grads $(r <$ bez. dieses Punkts als Pol unbestimmt.

Die Eigenschaften der harmonischen Mittelpunkte sind project

Wenn a_x^n symbolisch die binäre Form bezeichnet, welch gleich Null gesetzt, die Gruppe von n Punkten liefert, so ste $H = (ab)^2 a_x^{n-2} b_x^{n-2}$, worin a, b äquivalente symbolische Coe ficienten sind, die sogenannte *Hesse'sche Form* der gegeben Gruppe dar. Vergl. *Repert.* I, Kap. 12, § 5. Nun gilt der Sat

Es gibt eine Form vom $(2n-4)^{\text{ten}}$ Grad, die so b schaffen ist, dass die Gruppen harmonischer Mittelpunkte $(n-1)$ Ordnung ihrer Nullpunkte (der Steiner'schen Gruppe) die Nu punkte der Hesse'schen Form $H = 0$ zu Doppelpunkten hab Diese Form vom Grad

$$2n - 4$$

erhält man durch Elimination von z aus

$$a_x a_z^{n-2} a_1 = 0$$

und

$$b_x b_z^{n-2} b_2 = 0 .$$

Es existiren $3n-6$ Pole, deren Gruppen harmonisc Centren $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung bez. der gegebenen Form u $(2n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung bez. der Hesse'schen Form einen Punkt meinschaftlich haben. — Die gemeinschaftlichen Punkte sind, w die bei der symbolischen Rechnung üblichen Bezeichnungen bem werden, durch

$$T = (ab)(bc)^2 a_x^{n-1} b_x^{n-2} c_x^{n-3}$$

gegeben.

Das identische Verschwinden der Hesse'schen Form ist nothwendige und ausreichende Bedingung, damit die n Pun der gegebenen Gruppe in einen einzigen zusammenfallen.

Man beachte ferner:

Wenn die Wurzeln der gegebenen Form sämmtlich v schieden von einander und reell sind, so müssen alle Wurz der Hesse'schen Form imaginär sein. Gerbaldi und Schou *Rend. Palermo,* 3, 1889.

3. Lineare Systeme von Punktgruppen. Allgemeine volutionen. Geometrie der binären Formen ersten bis vierten Grads.

Es mögen $k+1$ linear unabhängige*) binäre Formen vom ade n, $(k \leqq n)$

$$a_x^n,\ b_x^n, \cdots$$

rliegen und man habe mit $k+1$ homogenen Parametern e Form

$$\lambda_1 a_x^n + \lambda_2 b_x^n + \lambda_3 c_x^n + \cdots$$

bildet.

Diese Form n^{ten} Grades, gleich Null gesetzt, stellt, so oft e Werthe für die Constanten λ gegeben sind, eine Gruppe n n Punkten dar; es wird mithin durch die $k+1$ gegebenen rmen ein k-fach unendliches lineares System oder es werden, wie an gewöhnlich sagt, ∞^k Gruppen von n Punkten durch diese rmen bestimmt. Dieses System heisst eine *Involution vom n^{ten} rad und der k^{ten} Stufe.* Die Gleichung

$$\lambda_1 a_x^n + \lambda_2 b_x^n + \cdots = 0$$

ird die *Gleichung der Involution* genannt.

Für $n = 2$, $k = 1$ erhält man die gewöhnliche Involution, h. die unendlich vielen Punktepaare, die sich in diesem Fall geben, sind die Paare conjugirter Punkte der gewöhnlichen In-lution, die durch die beiden Punktepaare bestimmt wird, welche n den zwei gegebenen quadratischen Formen dargestellt werden.

Eine Involution vom Grade n und der Stufe k wird durch $+1$ Gruppen von n Punkten bestimmt, die keiner Involution ringerer Stufe angehören.

Wenn r Punkte einer Gruppe einer Involution in einen unkt zusammenfallen, so sagt man, dieser Punkt sei für die ıvolution *r-fach.*

Jede Involution vom Grade n und der Stufe k besitzt eine end-che Anzahl von $(k+1)$fachen Punkten und zwar $(k+1)\,(n-k)$, remona, *Preliminari* etc., Bologna, Acc. Mem. 6, 7, 1866, 867, deutsch von Curtze.

---

*) Man sagt, die gegebenen Formen seien *linear unabhängig,* enn keine homogene lineare Relation identisch zwischen ihnen be-eht, d. h. wenn sich keine constanten Parameter $r_1, r_2, \ldots$ derart be-timmen lassen, dass durch bez. Multiplication der gegebenen Formen it ihnen die Summe der so gebildeten Producte identisch Null ist.

Eine Involution vom Grade n und der Stufe k enthält

$$\frac{2^k (n-k)(n-k-1)\cdots(n-2k+1)}{k!}$$

Gruppen, von denen jede mit k Doppelpunkten ausgestattet ist.

Besonderes Interesse bieten die Involutionen n^{ten} Grads un erster Stufe. *In ihnen gibt es* $2n-2$ *Doppelpunkte, welch durch die Funktionaldeterminante* (*Repert.* I, p. 280)

$$(ab)a_x^{n-1}b_x^{n-1} = 0$$

bestimmt werden.

Die Gesammtheit der ersten Polaren einer Gruppe von Punkten bildet eine Involution $(n-1)^{\text{ten}}$ *Grads und 1. Stufe.*

Die Involutionen kann man einander *projectiv* zuordne wenn man *bilineare* Relationen zwischen den Parametern d einen und denen einer anderen feststellt.

Bei zwei Involutionen 1. Stufe und von den Graden m un n, die superponirt und projectiv einander zugeordnet sind, komm es $m+n$ *mal vor, dass ein Punkt der einen mit einem der ih entsprechenden in der anderen zusammenfällt.* Dieses Theore ist ein specieller Fall des sogenannten *Correspondenzprincips* v Chasles; vergl. Kap. 1, § 2.

Quadratische Formen. Ermittelt man zu einem gegeben Punkt den Polpunkt bez. einer quadratischen Form (das ha monische Centrum 1. Grads), so liegen die beiden Elemente dies Form, der gegebene und der Polpunkt in Harmonie.

Das Verschwinden der Invarianten $A_{f\varphi}$ *der beiden quadr tischen Formen f und* φ *(vergl. Repert. I, p. 280) zeigt an, da die Nullpunkte der ersten Form harmonisch zu den Nullpunkt der zweiten liegen.*

Die durch die Covariante $\vartheta = 0$ *(die Funktionaldeterminan dargestellten Punkte sind Doppelpunkte einer Involution; zu Paare von conjugirten Punkten dieser Involution sind die Punk von* $f = 0$ *und* $\varphi = 0$.

Oder anders ausgedrückt: *Es giebt zwei Punkte, von den der eine bez. einer jeden zweier gegebener quadratischer Form der Pol des anderen und daher harmonisch mit ihm conjugirt i solche Punkte sind die von* $\vartheta = 0$.

Das Verschwinden der Invariante R dreier quadratisch Formen zeigt an, dass die drei Punktepaare derselben Involuti angehören.

Jede quadratische Form lässt sich durch lineare Transformation auf die canonische Form $X_1^2 + X_2^2$ zurückführen, d. h. auf eine solche Form, welche nur die Quadrate der Coordinaten enthält. Dazu reicht es aus: 1) als neue Fundamentalpunkte der homogenen Coordinaten zwei Punkte zu wählen, die einander conjugirt harmonisch bez. der quadratischen Form sind, d. h. den beliebigen Punkt y und den Punkt x, der die Wurzel von $a_x a_y = 0$ ist, und überdies 2) den Einheitspunkt auf passende Art annehmen.

Wählt man als Fundamentalpunkte der homogenen Coordinaten die beiden Wurzelpunkte von $\vartheta = 0$, so reducirt sich jede der beiden quadratischen Formen auf die canonische Form. Diese Theoreme sind auch deshalb von Interesse, weil ähnliche Sätze in der Theorie der Kegelschnitte und der Flächen 2. Grads vorkommen. Vergl. darüber Clebsch, *Theorie der binären algebraischen Formen,* Leipzig 1871, §§ 33, 37. Sie sind auch specielle Fälle der Sätze, die wir *Repert.* I, p. 303, 304 bei der Apolarität erwähnt haben. Siehe auch *Repert.* I, Kap. 12, § 15.

Cubische Formen. Die Punkte einer cubischen Form $f = 0$ seien a, b, c. Es gilt der Satz:

Von den beiden Punkten, aus denen die Polargruppe 1. Ordnung eines Punkts a der cubischen Form besteht, fällt der eine mit a zusammen, während der andere harmonisch conjugirt zu a in Bezug auf das Paar b, c ist.

Man erhält so drei andere Punkte a′, b′, c′, welche die Wurzelpunkte der Covariante $Q = 0$ sind.

Der Polpunkt eines jeden Elements von Q (Gruppe 2. Ordnung) in Bezug auf die cubische Form fällt mit einem Punkt dieser gegebenen cubischen Form f zusammen.

Die Punkte von f bilden in Verbindung mit denen von Q drei Punktepaare einer Involution, deren Doppelpunkte die Punkte der Hesse'schen Determinante $\Delta = 0$ sind.

Jeder der beiden Punkte von $\Delta = 0$ hat bez. der cubischen Form eine Polargruppe 1. Ordnung, welche aus zwei coincidirenden Elementen besteht, mit denen auch der Polpunkt 2. Ordnung des betreffenden Elements von $\Delta = 0$ bez. der cubischen Form zusammenfällt.

Wenn man in Bezug auf eine cubische Form und ihre Funktionaldeterminante die Paare von Polarelementen 1. Ordnung eines beliebigen Elements aufsucht, so sind diese Paare harmonisch

conjugiert zueinander und bilden bei der Variation des beliebige Elements eine Involution, deren Doppelpunkte die Punkte vo $\Delta = 0$ *sind.*

Wenn die beiden Polarelemente 1. Ordnung eines Punkt in Bezug auf die cubische Form miteinander zusammenfallen, s bildet dieser Punkt in Verbindung mit den drei Elementen de cubischen Form ein äquianharmonisches Quadrupel (siehe Kap. 1 § 2); *daher bildet jeder Punkt der Hesse'schen Determinant mit den drei Punkten der cubischen Form ein äquianharmonische Quadrupel.*

Nimmt man die Punkte von $\Delta = 0$ *zu Fundamentalpunkte homogener Coordinaten, so reducirt sich die cubische Form au die canonische Form, d. h. eine solche, welche nur die Cuben de beiden Variabelen enthält; dasselbe gilt alsdann auch für Q.* Sieh *Repert.* I, Kap. 12, § 8.

Die drei Elemente von f (wie auch die von Q) stehen zu einander in cyclischer Projectivität, deren Doppelelemente die Ele mente von $\Delta = 0$ *sind.*

In zwei zueinander apolaren Tripeln von Elementen abc $\alpha\beta\gamma$ *sind zwei beliebige Punkte der ersten Gruppe, z. B.* a, b *mi der ersten Polargruppe von* c *in Bezug auf das Tripel* $(\alpha\beta\gamma$ *harmonisch conjugirt.*

Zwei cubische Formen sind apolar zu einander, wenn di Invariante $J = (f, \varphi)^3$ *Null ist**).

Nimmt man zu jedem Element einer cubischen Form da harmonisch conjugirte in Bezug auf die beiden anderen, so erhäl man drei Punkte; die Bedingung, damit diese Punkte zu dene einer anderen cubischen Form apolar seien, besteht darin, das die Invariante $A_{\Delta\Theta}$ *oder* $A_{\nabla\Theta}$ *dritten Grads in den Coefficiente der einen cubischen Form und 1. Grads in den Coefficienten de anderen Form verschwinde.*

$\Omega = 0$ *ist die Bedingung, damit die zwei Punktetripel, di man auf diese eben angegebene Art aus jeder der beiden cubische Formen erhält, apolar seien.*

Das Verschwinden von $A_{\Delta\nabla}$ *zeigt an, dass das Paar vo Punkten, von denen jeder ein äquianharmonisches Quadrupel m den Elementen der ersten cubischen Form bildet, harmonisch z dem analogen Paar in Bezug auf die zweite cubische Form lieg*

---

*) Ueber die hier gebrauchten Bezeichnungen siehe *Repert.*, p. 284.

Biquadratische Formen). Verschwindet die Invariante j, so gen die vier durch eine binäre biquadratische Form dargestellten nkte harmonisch; ist dagegen i gleich Null, so liegen die vier nkte äquianharmonisch; in dem letzteren Fall ist f apolar zu h selbst.*

Die Hesse'sche Determinante einer biquadratischen Form llt vier Elemente dar; von jedem dieser Elemente fällt die olargruppe 3. Ordnung bez. der Form mit der aus coincidiren- n Elementen bestehenden Polargruppe 2ter Ordnung zusammen. der Punkt von H bildet mit den drei Punkten seiner eigenen sten Polargruppe ein äquianharmonisches Quadrupel.

Die Form $T = 0$ stellt sechs Elemente dar; die 3te Polar- uppe bez. f eines jeden dieser Elemente fällt mit einem der drei nkte der ersten Polargruppe zusammen, und das betreffende Ele- ent bildet mit den drei Punkten ein harmonisches Quadrupel.

Die drei durch die Elementepaare der biquadratischen Form er ihrer Hesse'schen Determinante bestimmten Involutionen haben e Elemente der Covariante T zu Doppelelementen und jedes eser drei Paare von Doppelelementen stellt auch die Doppel- mente der durch die beiden anderen bestimmten Involution dar.

Ist $j = 0$, so lässt sich f auf eine canonische Form reduciren, e nur die vierten Potenzen zweier linearer Formen, nämlich r Formen eines der Paare von T, enthält. In diesem Fall lden die Elemente von f eine cyclische Projectivität, deren Doppel- mente zwei der Elemente von T sind. Vergl. *Repert.* I, ap. 12, § 8.

Diese Betrachtungen über die geometrische Darstellung der nären Formen finden sich ausser bei den deutschen Autoren id ins Besondere in dem classischen Werk von Clebsch, *Bin. orm.*, Leipzig 1871 auch in älteren Abhandlungen von Batta- lini, *Acc. Napoli*, 1864 u. ff.

4. Projective Eigenschaften der Dreiecke, Vierecke, Sechsecke etc.

Wenn in zwei vollständigen ebenen aufeinander bezogenen ierecken fünf Seiten des ersten die entsprechenden Seiten des veiten in fünf Punkten einer Geraden schneiden, so treffen sich uch die sechsten Seiten in einem Punkt derselben Geraden und

*) Wir geben hier die bereits in Bd. 1 des Repertoriums mit- etheilten Sätze nicht noch einmal an.

die Verbindungslinien der sich entsprechenden Ecken gehen durch einen einzigen Punkt; die Diagonaldreiecke ferner liegen homolog

Daraus folgt: *Wenn ein vollständiges Viereck derart deformirt wird, dass fünf seiner Seiten durch feste Punkte einer Geraden gehen, so rotirt auch die sechste um einen festen Punkt derselben Geraden, und dieser bildet mit den fünf ersten eine Involution von sechs Punkten.*

Die drei Paare von Gegenseiten eines vollständigen Viereck werden von einer beliebigen Transversalen in drei Paaren involutorisch conjugirter Punkte geschnitten.

Daher: *Wenn eine Transversale die drei Paare von Gegenseiten eines vollständigen Vierecks in A und A', B und B', und C' trifft, so besteht zwischen den Strecken der Transversale die Relation:*

$$AB' \cdot BC' \cdot CA' + A'B \cdot B'C \cdot C'A = 0.$$

Selbstverständlich lassen sich für das Vierseit den vo stehenden correlative Sätze aufstellen.

Die drei Kreise, welche zu Durchmessern die drei Diagonalen eines vollständigen Vierseits haben, gehen durch dieselben Punkte.

Die drei Mittelpunkte der drei Diagonalen eines vollständigen Vierseits liegen in einer Geraden.

In einem vollständigen Viereck werden zwei sich in einer Diagonalecke schneidende Seiten harmonisch durch die beiden anderen getrennt.

In einem vollständigen Vierseit wird jede Diagonale harmonisch durch die beiden anderen getheilt.

Bezeichnet man mit L, L'; M, M'; N, N' die Punkte, welche in Verbindung mit einer Transversalen s die Seiten AB, CD, AB, AD, BC eines vollständigen Vierecks harmonisch theilen, gehen die Geraden LL', MM', NN' durch einen Punkt, der in Verbindung mit s die Geraden LL', MM', NN' harmonisch the

Wenn eine Transversale die Seiten eines Dreiecks RSQ drei Punkten A', B', C' schneidet, die bez. paarweise mit d anderen Punkten A, B, C derselben Transversalen in Involuti liegen, so treffen sich die Geraden RA, SB, QC in einem Pun dem *harmonischen Pol* der Transversalen in Bezug auf Dreieck.

Wenn man von einem Punkt S aus die Ecken eines Dr seits rsq durch drei Strahlen a', b', c' projicirt, welche paarwe mit drei anderen von S ausgehenden Strahlen a, b, c in Involut

nd, so liegen die Punkte ra, sb, qc in einer Geraden, der *harmonischen Polaren* von S in Bezug auf das Dreiseit.

Wenn die Seiten eines Dreiecks von einer beliebigen Transversalen geschnitten werden, und wenn die Ecken von einem beliebigen Punkt aus auf die gegenüberliegenden Seiten projicirt werden, so ist das Product der anharmonischen Verhältnisse der Gruppen von vier Punkten, welche man auf den drei Seiten erhält, die negative Einheit.

Wenn drei von einem Punkt aus gezogene Gerade durch die Ecken eines Dreiecks ABC gehen und die gegenüberliegenden Seiten in A', B', C' treffen, so besteht zwischen den Segmenten der Seiten die Relation

$$AB' \cdot BC' \cdot CA' + AC' \cdot CB' \cdot BA' = 0$$

oder

$$\frac{AB'}{CB'} \cdot \frac{BC'}{AC'} \cdot \frac{CA'}{BA'} = -1 \text{ (das Ceva'sche Theorem, 1678);}$$

und umgekehrt: wenn für drei Punkte A', B', C' auf den Seiten eines Dreiecks die vorstehende Relation besteht, so laufen die Verbindungslinien AA', BB', CC' in einen Punkt zusammen.

Schneidet eine Transversale die Seiten eines Dreiecks ABC in drei Punkten A', B', C', so gilt für die Segmente der Seiten die Beziehung:

$$AB' \cdot BC' \cdot CA' - AC' \cdot CB' \cdot BA' = 0$$

oder

$$\frac{AB'}{CB'} \cdot \frac{BC'}{AC'} \cdot \frac{CA'}{BA'} = 1 \text{ (Satz von Menelaus)} \cdot$$

und umgekehrt.

Wenn man die Seiten eines Dreiecks ABC in den Punkten A', B', C', A'', B'', C'' derart harmonisch theilt, dass

$$\frac{AB'}{CB'} \cdot \frac{BC'}{AC'} \cdot \frac{CA'}{BA'} = \frac{AB''}{B''C} \cdot \frac{BC''}{C''A} \cdot \frac{CA''}{A''B} = 1 \quad \textit{ist,}$$

so gehen die Kreise mit den Durchmessern AA'; BB'; CC' durch dieselben beiden Punkte P, P', für welche

$$AP : BP : CP = AP' : BP' : CP' \quad \textit{ist,}$$

und die Sehne PP' wird harmonisch und senkrecht von dem Kreis geschnitten, der durch die drei Punkte A, B, C bestimmt wird.

Liegen die Eckpunkte ungerader Ordnung eines einfachen ebenen Sechsecks in einer Geraden und diejenigen gerader Ordnung in einer anderen, so schneiden sich die drei Paare von Gegenseiten in Punkten, die ebenfalls in einer Geraden liegen.

Wenn sich in einem einfachen ebenen Sechsseit die Seiten ungerader Ordnung in einem Punkt treffen und die gerader Ordnung in einem anderen, so gehen auch die Verbindungslinien der drei Paare von Gegenecken durch einen und denselben Punkt.

Diese beiden Sätze sind specielle Fälle der sogenannten Pascal'schen und Brianchon'schen Theoreme über die Kegelschnitte (vergl. weiter unten Kap. 3, § 2) und lassen sich aus dem allgemeinen Fall ableiten, wenn man annimmt, der zu Grunde liegende Kegelschnitt zerfalle in zwei Gerade oder in zwei Punkte.

§ 5. Die metrische Geometrie des ebenen Dreiecks. Formeln der ebenen Trigonometrie.

Bezeichnet man mit a, b, c die drei Seiten und mit A, B, C die gegenüberliegenden Winkel eines geradlinigen Dreiecks, so *bestehen die Relationen:*

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C},$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

und die beiden anderen, die man aus der letzteren durch Vertauschen der Buchstaben a, b, c, A, B, C erhält.

Wenn man ferner mit s die halbe Summe der Seiten bezeichnet, so gelten die Formeln:

$$\begin{aligned}
a &= \frac{b}{\cos C + \sin C \operatorname{cotg} A}, \\
&= b\cos C + b\sin C \operatorname{cotg} B, \\
&= b\cos C \pm \sqrt{c^2 - b^2\sin^2 C}, \\
&= b\cos C + c\cos B, \\
&= \frac{2s\sin A}{\sin A + \sin B + \sin C}, \\
&= \frac{s\sin \tfrac{1}{2}A}{\cos \tfrac{1}{2}B\cos \tfrac{1}{2}C}, \\
\sin A &= \frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \\
&= \frac{\sqrt{2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4}}{2bc}, \\
\sin \tfrac{1}{2}A &= \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}, \\
\operatorname{tg} A &= \frac{a\sin C}{b - a\cos C},
\end{aligned}$$

$$\iota - b) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A + B) = (a + b) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A - B)$$

(die Napiersche Analogie),

$$- a) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} A = (s - b) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} B = (s - c) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} C,$$

$$= (s - a) \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} B \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} C,$$

$$\sin (A - B) = a \sin A - b \sin B,$$

$$\cos \tfrac{1}{2}(B - C) = (b + c) \cos \tfrac{1}{2}(B + C)$$

$$\sin \tfrac{1}{2}(B - C) = (b - c) \sin \tfrac{1}{2}(B + C)$$

(das Doppeltheorem von Gauss),

$$^2 \sin (B - C) = (b^2 - c^2) \sin (B + C),$$

$$\text{n } A + \sin B + \sin C = 4 \cos \tfrac{1}{2} A \cos \tfrac{1}{2} B \cos \tfrac{1}{2} C,$$

$$\text{in } 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C,$$

$$\text{os } A + \cos B + \cos C = 4 \sin \tfrac{1}{2} A \sin \tfrac{1}{2} B \sin \tfrac{1}{2} C + 1,$$

$$\text{os } 2A + \cos 2B + \cos 2C = -4 \cos A \cos B \cos C - 1,$$

$$\text{g } A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C,$$

$$\text{otg } A + \operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C = \operatorname{cotg} A \operatorname{cotg} B \operatorname{cotg} C + \operatorname{cosec} A \operatorname{cosec} B \operatorname{cosec} C,$$

$$\text{in}^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C = 2 \sin A \sin B \cos C,$$

$$\text{in}^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 1 - 2 \cos A \cos B \cos C.$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks lässt sich durch die folgenden Formeln ausdrücken:

$$F = \tfrac{1}{2} \frac{c^2 \sin A \sin B}{\sin C},$$

$$= \tfrac{1}{2} a b \sin C,$$

$$= \sqrt{s (s - a) (s - b) (s - c)}.$$

§ 6. Die metrische Geometrie des Dreiflachs und des sphärischen Dreiecks. Formeln der sphärischen Trigonometrie.

Wir wollen drei Ebenen betrachten, die *nicht* durch dieselbe Gerade gehen, also einem Bündel und nicht einem Büschel angehören. Nimmt man an, die drei Ebenen seien durch die Geraden begrenzt, in welchen sie sich zu je zweien schneiden, und durch den gemeinschaftlichen Schnittpunkt, so erhält man ein *Dreiflach* (*Trieder*), *körperliches Dreieck, dreiseitige Ecke*; denkt man sich dieses Dreiflach mit einer Kugel vom Radius 1 geschnitten, deren Mittelpunkt mit dem Centrum des Bündels zusammenfällt, so ergibt sich auf der Kugel ein *sphärisches Dreieck*, dessen Seiten Bogen von grössten Kreisen sind und durch die Winkel am Centrum der Kugel, d. h. durch die in den

Seitenflächen des Dreiflachs liegenden Winkel gemessen werden. Die Winkel des sphärischen Dreiecks ferner sind die Winkel, welche die in den Ecken des Dreiecks an die Seiten gezogenen Tangenten mit einander machen; sie sind also die Winkel zwischen den Seitenflächen des Dreiflachs, d. h. die Winkel der in dem Dreiflach enthaltenen Zweiflache. Die metrische Geometrie des Dreiflachs, die sogenannte *Triedrometrie*, fällt auf diese Art mit der des sphärischen Dreiecks, der *sphärischen Trigonometrie* zusammen.

Man unterscheidet rechtwinklige, doppelt und dreifach rechtwinklige sphärische Dreiecke. Die letzteren werden durch drei Bogen grösster Kreise gebildet, die zu je zweien senkrecht auf einander stehen; *alle Seiten und alle Winkel betragen neunzig Grade.*

In jedem rechtwinkligen sphärischen Dreieck ist jede der drei Seiten kleiner als 90 Grade oder nur eine der Seiten ist kleiner als 90 Grade.

In jedem rechtwinkligen sphärischen Dreieck sind ein nicht rechter Winkel und seine gegenüberliegende Seite beide grösser oder beide kleiner als 90 Grade.

Auch wenn in einem sphärischen Dreieck jede Seite und jeder Winkel kleiner als 180^0 ist, so beträgt doch die Summe der Winkel immer mehr als 180^0. Die Differenz zwischen dieser Summe und 180^0 heisst der sphärische Excess.

Das sphärische Dreieck ist in diesem Fall einem anderen doppelt-rechtwinkligen sphärischen Dreieck flächengleich, dessen dritter Winkel der sphärische Excess des gegebenen Dreiecks ist. Dieses Theorem wurde im Jahr 1629 unvollständig von Girard, 163 dann auf einfache Art von Cavalieri bewiesen.

Nimmt man als *Einheit* zum Messen der Flächeninhal sphärischer Dreiecke das doppelt-rechtwinklige Dreieck, dessen dritter Winkel die *Winkeleinheit* ist, so ergibt sich der Satz, *da der Flächeninhalt eines sphärischen Dreiecks seinem sphärische Excess gleich ist.*

Ist ein grösster Kreis auf der Kugel gegeben, so werde die beiden Endpunkte des auf ihm senkrechten Durchmessers *d Pole des grössten Kreises* genannt. Denkt man sich den grösste Kreis in einem gewissen Sinn (welcher der *positive* heissen ma von Jemand durchwandert, der die Füsse auf die Kugel set so heisst im engeren Sinn *Pol* des Kreises derjenige von de beiden, der zur Linken des Wanderers bleibt; wenn daher d Pol eines Kreises gegeben ist, so ist die positive Richtung d

egs auf ihm bestimmt. Die Seite der Ebene des grössten reises, welche dem Pol zugekehrt ist, heisst die *positive.*

Lässt man einen grössten Kreis um einen seiner Durchesser rotiren und dabei einen gewissen Winkel beschreiben, so rschiebt sich der Pol um denselben Winkel.

Es sei ein sphärisches Dreieck ABC gegeben; wir wollen e Pole bez. der Seiten BC, CA, AB suchen und annehmen, er positive Sinn gehe auf diesen Seiten in den Richtungen C, CA, AB.

Diese drei Pole, welche wir mit A', B', C' bezeichnen, bilden n zweites sphärisches Dreieck, welches das *zum gegebenen polare der reciproke* genannt wird.

Das Dreieck A', B', C' hat seinerseits zum polaren das Dreieck ABC.

Die Winkel eines Dreiecks sind die Supplemente der Seiten es Polardreiecks.

Der Flächeninhalt eines Dreiecks und der Umfang des Polarreiecks ergeben zusammen die Summe von 360^0.

Wir wollen annehmen, der Umfang eines sphärischen Dreicks werde in einem gewissen Sinn z. B. in der Richtung ABC urchlaufen, und dies sei der positive Sinn auf jedem der grössten Kreise AB, BC, CA; die *in diesem Sinn durchlaufenen* Seiten mögen die Werthe c, a bez. b haben.

Unter dem Winkel BAC verstehen wir den Winkel zwischen den beiden Richtungen AB, AC, von denen daher die eine positiv, die andere negativ ist; dasselbe gilt für die Winkel ACB, CBA. Man bezeichnet diese Winkel mit A, C, B.

Versteht man unter dem *Winkel zweier Ebenen des* dem sphärischen Dreieck entsprechenden *Dreiflachs* den zwischen den beiden Seiten, einer positiven und einer negativen, der zwei Ebenen enthaltenen Winkel, so gilt der Satz:

Die Winkel des spärischen Dreiecks sind die Supplemente der Winkel, welche die drei Ebenen des dem gegebenen Dreieck entsprechenden Dreiflachs mit einander bilden.

Nennt man *dagegen* den zwischen den beiden *positiven Seiten* enthaltenen Winkel den *Winkel der beiden Ebenen des Dreiflachs,* so sind die Winkel zwischen den drei Seitenflächen des Dreiflachs bezüglich den mit A, B, C bezeichneten gleich, welche *nicht* die von den *positiven* Richtungen der grössten Kreise gebildeten Winkel sind.

Unter der Annahme, es sei $A = 90^0$, lauten die wichtigsten Formeln für die *rechtwinkligen* sphärischen Dreiecke:

$$\cos a = \cos b \cos c,$$
$$\begin{cases} \cos b = \sin a \sin B, \\ \cos c = \sin a \sin C, \end{cases}$$
$$\begin{cases} \operatorname{tg} b = \operatorname{tg} a \cos C = \sin c \operatorname{tg} B, \\ \operatorname{tg} c = \operatorname{tg} a \cos B = \sin b \operatorname{tg} C, \end{cases}$$
$$\cos a = \operatorname{cotg} B \operatorname{cotg} C,$$
$$\begin{cases} \cos B = \cos b \sin C, \\ \cos C = \cos c \sin B. \end{cases}$$

Die Fundamentalformeln für *beliebige* sphärische Dreieck sind:

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C},$$
$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$
$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$$

und diejenigen, welche man aus den vorstehenden durch Ve tauschen der Buchstaben erhält.

Die erste dieser Formeln findet man schon in den Werke der alten Geometer, Menelaus, *Spherica*, 3, herausg. vc Halley, Oxonia (Oxford), 1707; die übrigen heissen *die Eule schen Formeln, Mém. de Berlin,* 1753. Aus ihnen lassen sic alle Formeln der sphärischen Trigonometrie ableiten; es gescha dies zum ersten Mal von Lagrange, *Journ. de l'Éc. polyt.*, 179 und von Gauss; siehe dessen *Zusätze* am Ende der 1810 i Altona erschienenen Schumacher'schen Uebersetung der *„Gé métrie de position* von Carnot, Paris 1803".

Setzt man $a + b + c = 2s$, $A + B + C = 2S$, so e hält man weiter:

$$\operatorname{cotg} a \sin b = \cos b \cos C + \sin C \operatorname{cotg} A,$$
$$\sin A = \frac{2\sqrt{\sin s \sin(s-a) \sin(s-b) \sin(s-c)}}{\sin b \sin c},$$
$$\sin \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin(s-b) \sin(s-c)}{\sin b \sin c}},$$
$$\cos \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-a)}{\sin b \sin c}},$$
$$\sin \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\frac{-\cos S \cos(S-A)}{\sin B \sin C}},$$
$$\cos \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\frac{\cos(S-B) \cos(S-C)}{\sin B \sin C}},$$

us welchen sich durch Division leicht die Formeln für $\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} A$, $\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} a$ ergeben, die sich besonders zur numerischen Berechnung nes Winkels aus den drei Seiten oder einer Seite aus den ei Winkeln eignen.

Wenn alle Winkel und Seiten des sphärischen Dreiecks leiner als 180^0 sind, so gelten die sogenannten Gauss'schen der Delambre'schen Formeln:

$$\sin \tfrac{1}{2}(A - B) \sin \tfrac{1}{2} c = \sin \tfrac{1}{2}(a - b) \cos \tfrac{1}{2} C,$$
$$\cos \tfrac{1}{2}(A - B) \sin \tfrac{1}{2} c = \sin \tfrac{1}{2}(a + b) \sin \tfrac{1}{2} C,$$
$$\sin \tfrac{1}{2}(A + B) \cos \tfrac{1}{2} c = \cos \tfrac{1}{2}(a - b) \cos \tfrac{1}{2} C,$$
$$\cos \tfrac{1}{2}(A + B) \cos \tfrac{1}{2} c = \cos \tfrac{1}{2}(a + b) \sin \tfrac{1}{2} C.$$

Sie wurden fast gleichzeitig von Delambre, *Connaiss. des mps,* 1808 und von Mollweide, *v. Zach, Monatl. Corresp.,* 1808, d. 18 veröffentlicht und finden sich auch in der *Theoria motus.* 809 von Gauss, durch den sie allgemein bekannt wurden.

Dividirt man diese Formeln unter sich, so erhält man die Verthe für

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A + B), \quad \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A - B),$$
$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(a + b), \quad \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(a - b);$$

ie heissen *die Napier'schen Analogien,* weil dieser Autor sie uerst im Jahr 1614 bekannt gemacht hat.

Andere von Gauss benutzte Formeln sind:

$$(\sin A - \sin B) \sin c = (\sin a - \sin b) \sin C,$$
$$(\sin A + \sin B) \sin c = (\sin a + \sin b) \sin C,$$
$$(\cos A + \cos B) \sin c = \sin(a + b)(1 - \cos C),$$
$$\sin(A + B)(1 + \cos c) = (\cos a + \cos b) \sin C.$$

Wir wollen von jedem Eckpunkt des sphärischen Dreiecks einen grössten Kreis senkrecht auf die gegenüberliegende Seite ziehen; er zerlegt den Winkel und die gegenüberliegende Seite in je zwei Theile M, N; m, n, so dass $M + N = A$, $m + n = a$ ist, wenn der Kreis von der Ecke A senkrecht zur Seite a gezogen wird. Es bestehen dann die Relationen:

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(M+N)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(M-N) = \frac{\sin(b-c)}{\sin(b+c)},$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(m+n)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(m-n) = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(b+c)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(b-c),$$

$$\frac{\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(M-N)}{\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(M+N)} = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(B+C)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(B-C),$$

$$\frac{\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(m-n)}{\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(m+n)} = \frac{\sin(B-C)}{\sin(B+C)},$$

$$\frac{\operatorname{tg} M}{\operatorname{tg} N} = \frac{\operatorname{tg} m}{\operatorname{tg} n},$$

$$\frac{\sin(M+N)}{\sin(M-N)} = \frac{\sin(m+n)}{\sin(m-n)}.$$

Die oben, S. 64, mit S bezeichnete Grösse steht, wie w
schon gesagt haben (S. 62), in Beziehung zum Flächeninhalt d
sphärischen Dreiecks; für sie gelten die folgenden wichtig
Formeln:

$$\sin S = \frac{\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b + \sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b\cos C}{\cos\tfrac{1}{2}c}$$

$$= \frac{1+\cos a+\cos b+\cos c}{4\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c}$$

$$= \frac{\cos^2\tfrac{1}{2}a+\cos^2\tfrac{1}{2}b+\cos^2\tfrac{1}{2}c-1}{2\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c},$$

$$\operatorname{tg} S = -\frac{\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}a\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}b+\cos C}{\sin C},$$

$$\operatorname{cotg} S = -\frac{\sin a\sin b\sin C}{1+\cos a+\cos b+\cos c},$$

$$\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}(S-90^0) = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}s\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(s-a)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(s-b)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(s-c$$

Analog sind selbstverständlich die Formeln, aus welch
sich der Umfang $2s$ des sphärischen Dreiecks berechnen läss
man braucht nur statt des gegebenen Dreiecks sein Polardreie
zu substituiren und auf dieses die vorstehenden Formeln anz
wenden.

*Wenn in einem sphärischen Dreieck ein Winkel und d
Product der Tangenten der Hälften der diesen Winkel einschliess
den Seiten constant bleibt, so ändert sich der Flächeninhalt d
Dreiecks nicht.*

*Bleibt in einem sphärischen Dreieck eine Seite und das Pr
duct der Tangenten der halben, dieser Seite anliegenden Winl
constant, so bleibt der Umfang des Dreiecks derselbe.*

*Wenn die Seiten des sphärischen Dreiecks im Verhältn
zum Radius der Kugel klein sind, so übertreffen die Winkel d
spärischen Dreiecks die entsprechenden Winkel des ebenen Dr*

s, dessen Seiten der Reihe nach denen des sphärischen Dreiecks ich sind, annähernd um den dritten Theil des sphärischen xcesses. Das Legendre'sche Theorem, *Mém. de l'Ac. de ris,* 1787.

Das Studium der sphärischen Trigonometrie, welche ihre nwendung hauptsächlich in der Astronomie findet, geht bis auf e alten Griechen zurück. Von den neueren Untersuchungen nd die von Euler, *Mém. de Berlin*, 1753 und *Nova Acta trop.* 1799 wichtig. Diese beiden Abhandlungen von Euler, m eigentlichen Schöpfer der modernen Trigonometrie, sind auch Ostwald's Klassikern der exacten Wissenschaften, mit Anerkungen versehen, von Hammer herausgegeben worden. Es lgen Legendre, *Mém. de l'Ac. de Par.,* 1787; Lexell, *Nova cta Petrop.*, 1782; Lagrange, *Journ. de l'Ec. polyt.*, Hft. 6 nd Gauss. Ferner sind zu nennen die Arbeiten von Möbius, *nalyt. Sphärik*, Abh. bei Begr. der Sächs. Ges. der Wissensch., 846 u. Gudermann, *Lehrbuch der nied. Sphärik*, Münster 1836.

Von neueren Werken citiren wir ausser dem bekannten uch von Serret, *Éléments de Trigonométrie,* 7. Ausg., Paris 887 die vortreffliche gedrängte Darstellung in Baltzer's *Elenenten der Mathematik,* 2 Bde., 7. Aufl., Leipzig 1885, die von remona ins Italienische übersetzt wurden, Genua 1881 und ereits die 3. Aufl. erlebten; Study, *Abh. der Leipz. Ges. der Viss.,* 1893 und Hammer, *Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie,* 2. Aufl., Stuttgart 1897.

§ 7. Moderne Geometrie des Dreiecks. Lemoine'sche und Brocard'sche Punkte und Kreise. Euler'sche Gerade. Der Neunpunkte- oder Feuerbach'sche Kreis. Kreise Taylor's, Tucker's. Simpson'sche Gerade.

Es wird dem Leser willkommen sein, in diesem Paragraphen die Hauptresultate der sogenannten *Dreiecksgeometrie* zusammengestellt zu finden.

Ist ein Dreieck ABC gegeben, so heisst eine Gerade, welche dieselbe Neigung gegen die Seiten AB, AC hat, wie BC gegen die Seiten AC, AB, eine zu BC *antiparallele (gegenparallele)* Gerade.

Die Mittelpunkte aller zu einer Seite eines Dreiecks Gegenparallelen liegen in einer Geraden, welche durch die gegenüberliegende Ecke geht; diese Gerade wird nach dem Vorschlag von Maurice d'Ocagne von den Franzosen *Symmediane* genannt;

in Deutschland ist auch die Bezeichnung *Gegenmittellinie* bräuchlich.

Die drei Gegenmittellinien gehen durch einen Punkt, von den Franzosen nach Lemoine, welcher mehrere wicht Eigenschaften desselben fand, als *Lemoine'scher Punkt* bezeich wird; jedoch war derselbe schon früher von Grebe, *das ger linige Dreieck in Beziehung auf die Quadrate der Perpendi welche man von einem Punkt seiner Ebene auf seine Seiten fäl kann, Grunert's Archiv,* 9, 1847 untersucht worden; daher ne man ihn in Deutschland auch den *Grebe'schen Punkt.*

Die Abstände des Lemoine'schen Punkts von den Seiten sind den Seiten selbst proportional und die Summe Quadrate dieser Abstände ist ein Minimum.

Zieht man von dem Lemoine'schen Punkt aus Parallelen den drei Seiten des Dreiecks, so bilden die sechs Punkte, denen diese die Seiten treffen, *das Lemoine'sche Hexagon*; d *sechs Punkte liegen auf einem Kreis (dem ersten Kreis Lemoi oder wegen der hier folgenden Eigenschaft dem Kreis des d fachen Verhältnisses).*

Nennt man nämlich die auf einer jeden der drei Seiten Dreiecks liegenden Ecken des Lemoine'schen Hexagons bez. *D, E, E'*; *F, F', so verhalten sich die Strecken DD', EE', F wie die Cuben der Seiten, auf denen sie liegen.*

Das Centrum des ersten Lemoine'schen Kreises ist der Mit punkt der Strecke, welche den Lemoine'schen Punkt mit dem C trum des dem Dreieck umschriebenen Kreises verbindet.

Wenn durch den Lemoine'schen Punkt die Antiparalle zu den Seiten des Dreiecks gezogen werden, so liegen die se Punkte, in denen sie die Seiten schneiden, zu denen sie ni antiparallel sind, auf einem Kreis, welcher *der zweite Lemoi sche Kreis oder der Cosinus-Kreis* genannt wird.

Die auf den Seiten des Dreiecks durch diesen Kreis geschnittenen Strecken sind den Cosinus der Winkel des Drei proportional.

Ist ein Dreieck ABC gegeben, so existirt ein Punkt O Ebene, für den die Winkel OAB, OBC, OCA gleich sind, ein Punkt O', für den die Winkel $O'CB, O'BA, O'AC$ gl sind. Der erste heisst *der positive Punkt Brocard's,* zweite *der negative Punkt Brocard's.* Selbstverständ haben diese Unterschiede nur dann einen bestimmten Werth, w man die gegenseitige Lage der Ecken des Fundamentaldreie

tsetzt; wir nehmen daher an, der Weg AB, BC, CA habe zu der Richtung, in welcher sich der Uhrzeiger bewegt, *entengesetzte* Richtung.

Der Winkel OAB ist dem Winkel $O'BA$ gleich und dasbe gilt für die anderen; der gemeinschaftliche Werth dieser nkel heisst *der Brocard'sche Winkel; er kann nicht grösser der dritte Theil eines Rechten sein.*

Er ist durch die Formel

$$\operatorname{cotg} \omega = \operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C$$

eben, wenn ω den Brocard'schen Winkel und A, B, C die eieckswinkel bedeuten.

Der dem ersten Lemoine'schen Kreis concentrische Kreis, r durch den Lemoine'schen Punkt und mithin durch das ntrum des dem Dreieck umschriebenen Kreises geht, heisst *r Brocard'sche Kreis.*

Fällt man von dem Centrum des dem Dreieck umschrienen Kreises Lothe auf die Seiten und nennt die Punkte, in elchen diese den Brocard'schen Kreis treffen, bez. A', B', C', *schneiden sich die Geraden BA', CB', AC' in dem positiven rocard'schen Punkt und die Geraden AB', BC', CA' in dem gativen Brocard'schen Punkt.*

Der Brocard'sche Kreis geht durch die beiden Brocard'schen unkte.

Nennt man L_1, L_2 die Radien der beiden Lemoine'schen reise, B den Radius des Brocard'schen und R den Radius es dem Dreieck umschriebenen Kreises, so bestehen die Rtionen

$$R^2 = 3L_1^2 + B^2, \quad L_1^2 = L_2^2 + B^2.$$

Der Brocard'sche Kreis heisst auch *Fünfpunktekreis* der *Siebenpunktekreis.*

Wenn von einem Punkt aus Parallele zu den Seiten eines reiecks gezogen werden, so liegen die sechs Punkte, in denen sie ie Seiten treffen, auf einem Kegelschnitt (dem Sechspunktegelschnitt); dieser wird ein Kreis (1ter Lemoine'scher Kreis), enn der Punkt, von dem aus die Parallelen gezogen werden, er Lemoine'sche Punkt ist.

Der Lemoine'sche Punkt und der Schwerpunkt des Dreiecks ssen sich durch die in Kap. 17 für die *Desarguesische Transformation* angegebene Construction auseinander ableiten, d. h. von diesen eiden Punkten ist *jeder der Desarguesische transformirte des anderen.*

Die beiden Brocard'schen Punkte stehen in analoger B ziehung zu einander.

In jedem Dreieck liegen der gemeinschaftliche Schnittpun H der drei Höhen, der auch das *Orthocentrum* genannt wir *der Schnittpunkt S der drei Medianen oder Mittellinien,* der au *Barycentrum* heisst und der Schwerpunkt des Dreiecks ist, *u der Schnittpunkt M der in den Mittelpunkten der Seiten errichtet drei Lothe (das Centrum des umschriebenen Kreises) in einer u derselben Geraden,* der sogenannten *Euler'schen Gerade. Novi Comm. Petrop.,* 11, 1765, p. 114.

Die Strecke HM wird durch den in ihrem Inneren g legenen Punkt S in dem Verhältniss HS : SM = 2 : 1 getheilt.

Der Neunpunktekreis, der irriger Weise (siehe den unt citirten Mackay) von einigen Autoren auch *der Euler'sche Kr* genannt wird, ist der durch die drei Mittelpunkte der Seit des Dreiecks gehende Kreis. *Er geht auch durch die Fus punkte der drei Höhen und durch die drei Mittelpunkte der v den Ecken nach dem Orthocentrum (dem Schnittpunkt der d Höhen) gezogenen Strecken.*

Das Centrum N des Neunpunktekreises hat eine solche La auf der Euler'schen Geraden, dass die Strecke MN innerha durch S und ausserhalb durch H in dem Verhältniss 2 : 1 *g theilt wird.*

Der Radius des Neunpunktekreises ist die Hälfte des Hal messers des umschriebenen Kreises.

Der Neunpunktekreis berührt in vier Punkten die vier de Dreieck von innen und von aussen eingeschriebenen Kreise.

Dieses Theorem ist von Feuerbach, *Eigenschaften einig merkwürdiger Punkte des geradlinigen Dreiecks,* Nürnberg 182 der Neunpunktekreis ist deshalb von einigen Autoren auch *d Feuerbach'sche Kreis* genannt worden.

Der Neunpunktekreis berührt auch jeden der zwölf von inn und von aussen eingeschriebenen Kreise der vier Dreiecke, der Ecken in dem Orthocentrum und je zweien der drei Eckpunk des Dreiecks liegen. Theorem von W. Hamilton, *Nouv. An* 1862, p. 183.

Auf dem Neunpunktekreis gibt es noch andere bemerken werthe Punkte: *zwei Schröter'sche Punkte,* Nouv. Ann., 186 p. 178, *einen Vigarié'schen Punkt, Mathesis,* 1888, *einen Lemoin*

ien Punkt, Journ. de math. élém. de Longchamps, 1889, p. 93; 90, p. 118, *zwei Boubals'sche Punkte,* ib., 1891, p. 215.

Der Neunpunktekreis ist ein specieller Fall des *Neunpunktegelschnitts,* d. h. des Kegelschnitts, der durch die sechs Mittelunkte der Seiten eines vollständigen Vierecks und die drei agonalecken geht.

Wenn eine der Ecken des Vierecks das Orthocentrum für e übrigen drei ist, so wird aus diesem Kegelschnitt ein Kreis, und enn die vier Ecken auf der Peripherie eines Kreises liegen, so ird der Kegelschnitt eine gleichseitige Hyperbel.

Der Neunpunktekegelschnitt ist der Ort der Mittelpunkte der egelschnitte des Büschels, welches zu Basispunkten die vier Ecken es Vierecks hat.

Als Literatur über den Neunpunktekreis und -Kegelschnitt ihren wir an: Brianchon und Poncelet, *Ann. de Gerg.,* 11, 820, p. 215; Steiner, ib., 19, 1828, p. 86; *Die geometr. onstruct. mittelst der geraden Linien und eines festen Kreises,* Berlin 1833, p. 55; *Giornale arcadico di Roma,* 1844; Hamilton, Hart, Salmon, Casey, *Quart. Journ.,* 4, 1860; Kücher, *Grunert's Arch.,* 47; Schröter, *Crelle,* 68; *Math. Ann.,* 7; Lappe, *Crelle,* 71; Baur, *Schlömilch's Zeitschr.,* 12; Schubert, ib., 16; Battaglini, *Rend. Acc. Napoli,* 1862; Trudi, *Giorn. di mat.,* .; Beltrami, *Giorn. di mat.,* 1; *Memorie Acc. Bologna,* (2), 2, 863; (3), 5, 7, 1875, 1877. Ueber die Geschichte des Neununktekreises siehe Mackay, *Proc. of the R. Soc. of Edinburgh,* 11, 1892, 1893.

Der *Taylor'sche Kreis* wird durch die Eigenschaft charakterisirt, dass er durch die sechs Punkte geht, welche die rechtwinkligen Projectionen der Fusspunkte der Höhen auf die Seiten des Grunddreiecks sind. *Proc. Lond. Math. Soc.,* 20, 1889.

Betrachtet man ein beliebiges zu dem Grunddreieck homothetisches (ähnliches und ähnlich liegendes) Dreieck und nimmt den Lemoine'schen Punkt zum Homothetiecentrum, *so schneiden sich die Seiten der beiden Dreiecke in sechs auf demselben Kreis liegenden Punkten;* solche Kreise heissen Tucker'sche.

Der umschriebene Kreis, die beiden Lemoine'schen Kreise und der Taylor'sche Kreis sind specielle Fälle der Tucker'schen; der Ort der Mittelpunkte aller Tucker'schen Kreise ist eine Gerade (der Durchmesser des Brocard'schen Kreises).

Die Enveloppe der Tucker'schen Kreise ist eine sogenannte *Brocard'sche Ellipse,* die zu Brennpunkten die beiden Brocard'-

schen Punkte hat, dem Dreieck eingeschrieben ist und die Seite in den Fusspunkten der Symmedianen berührt. Brocard, *Ann. a Toulouse,* 1887; *Journ. des math. spéciales,* 1889; Catalan *Mém. de Belgique,* 49, 1891.

Ein anderer elementarer aber interessanter Satz aus de Dreiecksgeometrie ist der folgende:

Wenn von einem Punkt der einem Dreieck umschriebene Kreisperipherie Lothe auf die drei Seiten gefällt werden, so liege die Fusspunkte dieser Lothe in einer Geraden (der Simpson'sche oder Wallace'schen Geraden, der Fusspunktgeraden de Dreiecks).

Die Enveloppe der Simpson'schen Geraden ist eine dre spitzige Hypocycloide (Steiner); vergl. Kap. 17, § 12.

Das Pedalentheorem theilte Servois, *Ann. de Gerg.,* 4 1813, 1814, p. 251 mit und schrieb es Simpson zu; Gergonne ib. gab einen analytischen Beweis des Satzes und wollte ihn au das Tetraeder ausdehnen, machte dabei jedoch Fehler, di Durrande erkannte, ib., 7. Steiner, ib., 19 vervollständigt das Theorem durch den eben erwähnten Satz über die Enveloppe Mit einer Erweiterung beschäftigte sich Beltrami, *Mem. Ac Bologna,* (3), 5, 7, 1875, 1877.

Siehe auch: Brocard, *Bull. Soc. math.,* 1872, 1877 un Mackay, *Soc. math. Edinb.,* 9, 1890; *Assoc. Franç.,* 1893 Weitere literarische Angaben findet man in dem *Interm. de math.,* 3, p. 160; 4, p. 7.

Das Studium der sogenannten *Dreiecksgeometrie* begann erst in neuerer Zeit.

Wir sehen von anderen vereinzelten Arbeiten ab, die älte sind oder bereits oben citirt wurden und erwähnen von den erste wichtigen Untersuchungen in Bezug auf die Dreiecksgeometrie Lemoine, *Nouv. Ann.,* 1873; *Ass. Franç.,* 1873, 1874; Bro card, *Nouv. Corr. math. de Catalan,* 3, 1877, 1879, 1880 Neuberg, ib., 1879, 1880; *Ass. Franç.,* 1888; *Mém. de Bel gique,* 1890; Schoute, *Acad. d'Amsterdam,* 1886; Cesàro *Nouv. Ann.,* 1887; *Mathesis,* 1890; etc. Siehe auch Lemoine *Bull. Soc. math.,* 12, p. 72; 14, p. 167.

Den grössten Theil der Resultate findet man in dem eng lischen Werk von Casey, *A sequel to Euclid,* 1888 zusammen gestellt, von welchem auch eine französische Uebersetzung existirt

om. élém. récente, Paris, 1890; ein anderes Werk derselben
t ist von Poulain, *Nouv. géom. du triangle,* Paris 1892,
ville-Morant, éditeur.

Eine sehr kurz gefasste Uebersicht über einige Resultate ist in
n von Lugli redigirten *Periodico di mat.,* 6 erschienen.

Ueber den geschichtlichen Theil siehe Vigarié, *Esquisse*
torique sur ... la géom. du triangle, Assoc. Franç., 1889.

Die bis jetzt gemachten Erweiterungen der oben angeführten
tze betreffen ins Besondere das Vierseit, Hexagon, etc. und
nn das Tetraeder.

Die ersteren sind von Neuberg, *Mathesis,* 1885; Tucker,
lucat. Times, 1885; Casey, *Irish Acad.,* 1886; *Mathesis,*
90; Neuberg und Tarry, *Ass. Franç.,* 1886; etc.

Erweiterungen auf das Tetraeder sind von Piquet, *Assoc.*
anç., 1874; Neuberg, *Mém. de l'Acad. de Belgique,* 1884 und
dere von Beltrami, l. c.

Von deutschen Arbeiten sind die werthvolle Zusammen-
llung von Lieber, *Programm der Stettiner Friedrich-Wilhelm-*
ule, 1886/87: *Ueber die Gegenmittellinie und den Grebe'schen*
nkt; über den Brocard'schen Kreis und Emmerich, *die*
ocard'schen Gebilde und ihre Beziehungen zu den verwandten
rkwürdigen Punkten und Kreisen des Dreiecks, Berlin 1891
rvorzuheben. Selbstständige Untersuchungen sind aus den Kreisen
r deutschen Gymnasiallehrer im Aufgabenrepertorium der Hoff-
ann'schen Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaft-
hen Unterricht sowie in Programmabhandlungen veröffent-
ht worden. Wir erwähnen nur die *Bromberger Programm-*
handlungen von Kiehl 1881, 1888 und die *Recklinghauser*
n Artzt, 1884, 1886.

Kapitel III.

Die Kegelschnitte.

§ 1. Die projective Erzeugung der Kegelschnitte. Un mittelbar daraus hervorgehende Eigenschaften.

Die Theorie der Kegelschnitte lässt sich auf synthetisch projective Art und auf analytische Art entwickeln.

Nach der projectiven Methode können die Kegelschnit folgendermassen definirt werden.

Man denke sich zwei homologe Ebenen (vergl. Kap. 1), d entweder conlocal sind oder nicht, und welche das Homologi centrum S und die Homologieaxe s haben. Den Punkten ein in der einen Ebene gelegenen Kreises entsprechen in der ander die Punkte einer Kurve, welche *Kegelschnitt* heisst und die beid Fundamentaleigenschaften besitzt:

1) *dass jede Gerade ihrer Ebene sie in zwei Punkten od einem einzigen Punkt oder keinem schneidet;*

2) *dass sich von jedem Punkt der Ebene zwei Tangent oder eine Tangente oder keine an sie ziehen lässt.*

Daraus ergibt sich die Definition, welche die alten Griech der ganzen Theorie zu Grunde gelegt haben, dass der Kege schnitt die durch den Schnitt eines Kreiskegels mit einer Ebe erzeugte Curve ist; denn auf diese Art sind der Kreis und d Kegelschnitt in perspective Lage gebracht.

Die Tangenten an den Kreis entsprechen den Tangenten d den Kegelschnitt.

Wenn in der ersten der beiden homologen Ebenen die Gren gerade, d. h. die Gerade, welche der unendlich fernen Gerad der zweiten Ebene entspricht, den Kreis in zwei Punkten schneid so hat der entsprechende Kegelschnitt zwei reelle unendlich fer Punkte und heisst Hyperbel; wenn die Grenzgerade den Kr berührt, so hat der Kegelschnitt nur einen unendlich fernen Pun

d wird Parabel genannt; trifft schliesslich die Grenzgerade n Kreis nicht, so hat der Kegelschnitt überhaupt keine reellen endlich fernen Punkte und heisst Ellipse.

Definirt man die Kegelschnitte als die Curven, welche durch e Schnitte eines Kreiskegels mit einer Ebene entstehen, d. h. s die perspective Figur eines Kreises, so entsprechen die drei rschiedenen Kegelschnitte den drei verschiedenen Lagen, welche e schneidende Ebene in Bezug auf den Kegel annehmen kann: e kann *alle* Erzeugenden schneiden (*Ellipse*) oder *einer* Erugenden parallel sein (*Parabel*) oder *zweien* parallel sein *Hyperbel*).

Eine andere projective Definition der Kegelschnitte ist die lgende:

Man habe in einer Ebene zwei projective Strahlenbüschel mit rschiedenen Scheiteln O, O'. Die Schnittpunkte der sich entprechenden Strahlen bilden einen Kegelschnitt, welcher durch ie beiden Scheitel der Büschel geht und dessen Tangenten in diesen unkten die der Verbindungslinie OO' entsprechenden Geraden sind.

Und correlativ:

Man habe in einer Ebene zwei projective Punktreihen mit erschiedenen Trägern. Die Geraden, welche die sich entsprechenen Punkte verbinden, sind die Tangenten an einen Kegelschnitt, er die beiden zu Grund liegenden Geraden in den Punkten berührt, die ihrem Schnittpunkte entsprechen.

Eine andere Definition der Kegelschnitte lässt sich auch auf rund der Betrachtungen in Kap. 1, § 3 geben:

Der Kegelschnitt ist der Ort der Doppelpunkte einer involuorischen Dualität oder Polarität.

Oder auch:

Der Kegelschnitt ist die Einhüllende der Doppelgeraden einer Polarität.

Die Parabel wird von der unendlich fernen Geraden der Ebene berührt.

Es gibt zwei Gerade der Ebene, welche sich in endlicher Entfernung schneiden und die Hyperbel in ihren beiden unendlich fernen Punkten berühren. Diese Geraden heissen die *Asymptoten* der Hyperbel.

Wenn der Scheitel O' in einer gegebenen Richtung unendlich fern liegt, so kann der Strahl des Büschels (O'), welcher dem der gegebenen Richtung parallelen Strahl von (O) entspricht, im Endlichen oder Unendlichen liegen; in dem ersten Fall erhält man eine Hyperbel, in dem zweiten eine Parabel.

Wenn die beiden Scheitel O, O' in zwei verschiedenen Rich
tungen im Unendlichen liegen, so ist der Kegelschnitt eine Hyperbe
Die Geraden, welche die Paare sich entsprechender Punkt
in zwei ähnlichen Punktreihen verbinden, hüllen eine Parabel ein
Aus diesen Definitionen ergibt sich sofort:
Das anharmonische Verhältniss der vier Geraden, welch
von vier Punkten des Kegelschnitts nach einem variabelen Punk
des Kegelschnitts gezogen werden, ist constant und pflegt das an
harmonische Verhältniss der vier Punkte des Kegel
schnitts genannt zu werden.
Das anharmonische Verhältniss der vier Punkte, in dene
irgend vier feste Tangenten eines Kegelschnitts von einer variabele
Tangente geschnitten werden, bleibt bei dem Variiren dieser 5te
Tangente constant. Es heisst das anharmonische Verhält
niss der vier Tangenten des Kegelschnitts.
Das anharmonische Verhältniss von vier Tangenten eine
Kegelschnitts ist dem der vier Berührungspunkte gleich.
Die Tangenten an eine Parabel schneiden zwei feste Tan
genten an die Parabel in Punkten, welche zwei ähnliche Punkt
reihen bilden.
Daraus folgt: *Von zwei festen Tangenten an eine Parabe*
schneiden alle anderen Tangenten proportionale Theile ab.
Und umgekehrt: *Die Geraden, welche die sich entsprechende*
Punkte zweier in einer Ebene liegender ähnlicher Punktreihen ver
binden, hüllen eine Parabel ein, welche die beiden Geraden, di
Träger der Punktreihen sind, berührt.
Bei einem Kegelschnitt ist das Product der Segmente constan
welche eine variabele Tangente auf zwei festen parallelen Tan
genten bestimmt, wenn die Segmente von den Berührungspunkte
der Tangenten aus gerechnet werden.

§ 2. Die projectiven Fundamentaleigenschaften der Kegelschnitte. Die Theoreme von Pascal, Brianchon, Desargues

Wenn ein Sechseck einem Kegelschnitt eingeschrieben wird
so schneiden sich die drei Paare von Gegenseiten in drei Punkten
einer und derselben Geraden. Das Pascal'sche Theorem, 1640
Wird ein Sechseck einem Kegelschnitt umschrieben, so treffen
sich die Geraden, welche die drei Paare von Gegenecken ver
binden, in demselben Punkt. Das Brianchon'sche Theorem, 1806
Sind zwei Dreiecke homolog, so gehören die Punkte, in denen
die Seiten des einen die nicht entsprechenden des anderen schneiden

nem Kegelschnitt an, und die Geraden, die von den Ecken des nen nach den nicht entsprechenden Ecken des anderen gehen, rühren einen zweiten Kegelschnitt. Das Steiner'sche Theorem.

Wenn ein Dreieck derart deformirt wird, dass seine Seiten m feste Punkte rotiren, während zwei Eckpunkte sich auf zwei sten Geraden bewegen, so beschreibt der dritte Eckpunkt einen Kegelschnitt. Das Maclaurin'sche Theorem, 1721.

Wird ein Dreieck so deformirt, dass seine Eckpunkte sich uf festen Geraden bewegen, während zwei Seiten um feste Punkte otiren, so hüllt die dritte Seite einen Kegelschnitt ein.

Wenn ein Fünfeck in einen Kegelschnitt eingeschrieben wird, o liegen der Schnittpunkt zweier nicht aufeinander folgender Seiten, er Schnittpunkt zweier anderer nicht consecutiver Seiten und der unkt, in dem die fünfte Seite die in der gegenüberliegenden Ecke erührende Tangente trifft, in einer Geraden und correlativ.

Wird ein Viereck in einen Kegelschnitt eingeschrieben, so iegt der Punkt, in welchem sich die in zwei Gegenecken an den Kegelschnitt gelegten Tangenten schneiden, in einer Geraden mit len beiden Schnittpunkten der Paare von Gegenseiten.

Das vollständige von vier Tangenten an einen Kegelschnitt ebildete Vierseit und das vollständige von den vier Berührungspunkten gebildete Viereck haben dasselbe Diagonaldreieck. Vergl. Kap. 2.

Wenn ein Vierseit um einen Kegelschnitt beschrieben wird, so gehen die Geraden, welche die Berührungspunkte zweier Gegenseiten verbinden, durch den Schnittpunkt der Diagonalen. Durch diesen Punkt gehen auch die Diagonalen des eingeschriebenen Vierseits, welches zu Ecken die vier Berührungspunkte der vier Seiten des ersteren hat, und die vier Diagonalen bilden eine harmonische Gruppe. Ferner liegen die Schnittpunkte der Paare von Gegenseiten der beiden Vierseite in einer Geraden und bilden ebenfalls eine harmonische Gruppe.

Beschreibt man ein Dreieck in einen Kegelschnitt, so treffen die Tangenten in den Eckpunkten die gegenüberliegenden Seiten in Punkten einer Geraden.

Wenn ein Dreieck um einen Kegelschnitt beschrieben wird, so gehen die Geraden, welche die Eckpunkte mit den Berührungspunkten der gegenüberliegenden Seiten verbinden, durch denselben Punkt.

Eine Transversale schneidet einen Kegelschnitt und die Gegenseiten eines eingeschriebenen Vierecks in drei Paaren involutorisch conjugirter Punkte (Desargues) und correlativ.

Wenn ein Viereck, welches beständig in einem Kegelschnit eingeschrieben bleibt, so deformirt wird, dass drei seiner Seiten um drei feste in einer Geraden liegende Punkte rotiren, so dreht sich auch die vierte Seite um einen anderen festen Punkt derselben Geraden.

In einem umschriebenen Dreieck wird jede Seite durch ihren Berührungspunkt und durch die Gerade, welche die Berührungspunkte der beiden anderen Seiten verbindet, harmonisch getheilt. Der correlative Satz gilt für das eingeschriebene Dreieck.

Wenn die Sehne, welche die Berührungspunkte zweier Tangenten verbindet (d. h. die Berührungssehne zweier Tangenten) durch den Schnittpunkt zweier anderer Tangenten geht, so werden die beiden ersten Tangenten harmonisch durch die letzteren getheilt und umgekehrt.

Wenn zwei Tangenten an einen Kegelschnitt sich in einem Punkt der Berührungssehne zweier anderer Tangenten treffen, so liegt umgekehrt auch der Schnittpunkt der letzteren auf der Berührungssehne der ersteren.

Der Schnittpunkt S zweier Tangenten und die Berührungssehne s heissen *Pol* bez. *Polare*; d. h. S wird der *Pol* von s und s die *Polare* von S genannt.

Der Pol und die Polare bez. eines Kegelschnitts fallen mit dem Pol und der Polaren in einer Polarität zusammen, für welche der Kegelschnitt der Ort der Doppelpunkte ist.

Die Polare s eines Punkts S kann auch als der Ort der Schnittpunkte der Paare von Gegenseiten der eingeschriebenen Vierecke, deren Diagonalen durch S gehen, definirt werden, oder auch als der Ort eines Punktes P, der harmonisch zu S in Bezug auf die Schnittpunkte von SP mit dem Kegelschnitt liegt.

Die Polare eines Punkts des Kegelschnitts ist die Tangente in diesem Punkt.

Wenn ein Punkt sich auf einer Geraden bewegt, so rotirt seine Polare um einen Punkt.

Zwei Punkte, von denen jeder auf der Polaren des anderen liegt, heissen *conjugirt oder reciprok bez. des Kegelschnitts* und ebenso werden zwei Gerade, von denen jede durch den Pol der anderen geht, *conjugirt oder reciprok* genannt.

Sind zwei Punkte reciprok, so sind auch ihre Polaren reciprok.

Ein Dreieck, von dem jede Ecke der Pol der gegenüberliegenden Seite ist, heisst *ein bez. des Kegelschnitts sich selbst conjugirtes Dreieck (Polardreieck).*

Die Diagonalecken des durch vier Punkte eines Kegelschnitts bestimmten vollständigen Vierecks bilden ein Polardreieck und reciprok bilden auch die Diagonalseiten des durch vier Tangenten an einen Kegelschnitt bestimmten vollständigen Vierseits ein Polardreieck.

Wenn ein Dreieck in einen Kegelschnitt eingeschrieben wird, so schneidet die einer Seite bez. des Kegelschnitts reciproke Gerade die beiden anderen Seiten in zwei reciproken Punkten. Staudt.

Wenn zwei Paare von Gegenecken eines vollständigen Vierseits bez. eines reellen oder imaginären Kegelschnitts reciproke Punkte einer Polarität sind, Kap. 1, § 3, *so müssen auch die beiden übrigen Gegenecken in derselben Polarität reciprok sein.* Hesse.

Wenn von zwei Dreiecken das eine in einer Polarität dem anderen polar ist, so sind sie homolog, und umgekehrt sind zwei homologe Dreiecke stets in einer Polarität polar zu einander.

Bei zwei Dreiecken hat jede der folgenden drei Eigenschaften die beiden übrigen zur Folge:

1. *dass sie in derselben Polarität sich selbst conjugirt sind;*
2. *dass sie bei einem Kegelschnitt eingeschrieben sind;*
3. *dass sie bei einem Kegelschnitt umschrieben sind.*

§ 3. Hauptformeln der analytischen Geometrie der Kegelschnitte.

Die analytische Definition der Kegelschnitte lautet:

Es seien x_1, x_2, x_3 die homogenen Coordinaten eines Punktes der Ebene. Der *Kegelschnitt* ist dann der analytisch durch eine Beziehung 2ten Grads zwischen den x vom Typus

$$f(x) = \sum_1^3 a_{ij} x_i x_j = 0, \quad (a_{ij} = a_{ji})$$

dargestellte geometrische Ort; darin sind $a_{11}, a_{22}, \ldots$ constante Coefficienten. (*Die Gleichung der Kegelschnitte.*)

Daher pflegt man die Kegelschnitte auch *Kurven zweiter Ordnung* zu nennen.

Wenn das Fundamentaldreieck der Coordinaten ein sich selbst conjugiertes Dreieck ist, so reducirt sich die Gleichung des Kegelschnitts auf die canonische Form $\sum a_{ii} x_i^2 = 0$, *so dass also die Coefficienten* a_{ij}, *bei denen* $i \gtrless j$ *ist, Null werden.*

Nehmen wir dagegen an, u_1, u_2, u_3 seien die homogenen Coordinaten einer Geraden der Ebene, so stellt eine ähnliche

Relation 2ten Grades zwischen den u eine *Enveloppe* dar, d. h. eine Curve, welche alle Gerade, deren Coordinaten dieser Relation genügen, zu Tangenten hat, siehe Kap. 1, S. 28. Diese Curve ist ebenfalls ein *Kegelschnitt*. Man nennt den Kegelschnitt daher auch *Kurve 2ter Classe*.

Die Gleichung in *Punkt*coordinaten pflegt man *Punktgleichung*, die in Geradencoordinaten *Tangentialgleichung* zu nennen.

Aus der Gleichung des Kegelschnitts geht hervor, dass der Kegelschnitt bestimmt ist, wenn die Werthe der Verhältnisse von *fünf* Coefficienten der Gleichung zu dem letzten Coefficienten festgesetzt sind.

Ein Kegelschnitt ist auf eine endliche Anzahl von Arten bestimmt, wenn r Punkte gegeben sind, durch welche er gehen und s Gerade, welche er berühren soll, und dabei $r + s = 5$ ist.

Speciell gilt:

durch 5 Punkte geht nur ein Kegelschnitt;

durch vier Punkte gehen zwei Kegelschnitte, die eine gegebene Gerade berühren;

durch 3 Punkte vier Kegelschnitte, die zwei gegebene Gerade

durch 2 Punkte vier Kegelschnitte, die drei gegebene Gerade

durch einen Punkt zwei Kegelschnitte, die vier gegebene Gerade berühren.

Es gibt nur einen Kegelschnitt, der fünf gegebene Gerade berührt.

Eine reichhaltigere Sammlung von Sätzen dieser Art findet man in Kap. 15, § 4.

Wir wollen (die Discriminante)

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

setzen und die algebraische Adjungirte des Elements a_{ij} dieser Determinante (d. h. die mit $(-1)^{i+j}$ multiplicirte Determinante, welche durch Streichen der i^{ten} Zeile und j^{ten} Columne aus der Determinante A hervorgeht) mit A_{ij} und die Adjungirte A_{33} dann mit B bezeichnen.

Die Gleichung des Kegelschnitts in Cartesischen Coordinaten x, y erhält man aus der allgemeinen Gleichung auf Seite 7, wenn $x_3 = 1$, $x_1 = x$, $x_2 = y$ gesetzt wird. Es sei ω der Winkel zwischen den beiden schiefen Cartesischen Axen und ausserdem

$$C = a_{11} + a_{22} - 2a_{12}\cos\omega.$$

Man erhält dann das folgende wichtige Resultat:

Bei jeder beliebigen Transformation der Cartesischen Coordinaten bleiben die Ausdrücke

$$\frac{A}{\sin^2\omega}, \quad \frac{B}{\sin^2\omega}, \quad \frac{C}{\sin^2\omega}$$

*unverändert (sind invariant).**)

Daraus folgt:

Bei jeder beliebigen Transformation der Cartesischen Coordinaten behalten die Grössen A, B, C immer dasselbe Vorzeichen.

Bei rechtwinkligen Coordinaten wird die Grösse C gleich $a_{11} + a_{22}$; mithin:

Geht man von rechtwinkligen Axen zu anderen ebenfalls rechtwinkligen Axen über, so bleibt die Grösse $a_{11} + a_{22}$ unverändert.

Je nach den Werthen der Coefficienten, die *reell* vorausgesetzt werden, hat der durch die Gleichung 2ten Grads dargestellte Ort verschiedene Gestalten. Behält man die eben für die *Ellipse, Parabel* und *Hyperbel* gegebenen Definitionen bei (siehe oben), so gelten die Sätze:

Nimmt man an, A sei von Null verschieden, so erhält man für $B > 0$ eine Ellipse, für $B < 0$ eine Hyperbel und für $B = 0$ eine Parabel.

Für $B > 0$ besteht die Ellipse nur dann aus reellen Punkten, wenn $Aa_{11} < 0$ und $Aa_{22} < 0$ ist, wobei die eine dieser Ungleichheiten für $B > 0$ die Folge der anderen ist; im anderen Fall erhält man eine Ellipse, deren Punkte imaginär sind (eine imaginäre Ellipse). Ist ferner $B < 0$ oder $B = 0$, so ergibt sich immer eine reelle Hyperbel oder eine reelle Parabel, wenn nur A von Null verschieden ist.

Wenn schliesslich $A = 0$ ist, so erhält man in jedem Fall ein Paar Gerade und nicht, wie bisher, einen eigentlichen Kegelschnitt; dieses Paar besteht aus imaginären Geraden, die sich in einem reellen Punkt in endlicher Entfernung schneiden, wenn $B > 0$ ist,

---

*) Zwischen diesem Satz und der Behauptung *Repert.* 1, Kap. 12, § 16, p. 334, dass das System eines einzigen Kegelschnitts *keine* absoluten Invarianten habe, besteht kein Widerspruch. Die Invarianten, von denen oben die Rede ist, hängen nicht nur von den Coefficienten des Kegelschnitts, sondern auch von den Coordinatenaxen ab, die immer *Cartesische Axen* bleiben müssen; mithin sind die Transformationen, von denen wir hier sprechen, *nicht alle möglichen*, wie *Repert.* 1, p. 334, sondern nur diejenigen, welche die unendlich ferne Gerade der Ebene unverändert lassen.

und aus reellen Geraden, die sich in einem reellen Punkt in endlicher Entfernung treffen, wenn $B < 0$ ist, und schliesslich aus zwei parallelen reellen oder imaginären Geraden, oder auch aus zwei in eine einzige reelle Gerade zusammenfallenden Geraden für $B = 0$.

Wenn der Kegelschnitt eine reelle Ellipse ist, so kann man seine Gleichung (in nicht homogenen Coordinaten) durch geeignete Wahl der Coordinatenaxen auf die Gestalt

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

bringen, und wenn die Ellipse imaginär ist, auf

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1.$$

Ist der Kegelschnitt eine Hyperbel, so lässt sich seine Gleichung bei passender Wahl der Axen die Gestalt

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

geben.

Ist er schliesslich eine Parabel, so lautet die einfachste Form der Gleichung:

$$y^2 = px.$$

Eine allgemeine Gleichung 2ten Grads von dem gewöhnlichen Typus, deren Terme 2ten Grads ein vollständiges Quadrat bilden, stellt eine Parabel dar, wenn A von Null verschieden ist.

Jede homogene rationale Gleichung 2ten Grades zwischen x und y mit reellen Coefficienten stellt ein Paar Gerade dar, die durch den Anfangspunkt gehen.

Soll die allgemeine Gleichung 2ten Grades ein Paar Gerade darstellen, so ist es nöthig, dass sich ihre linke Seite in zwei rationale Factoren 1ten Grads in x und y zerlegen lasse.

Die allgemeine Gleichung 2ten Grades stellt einen Kreis dar, wenn A von Null verschieden, $a_{22} = a_{11}$ und $a_{12} = a_{11} \cos\omega$ ist, wobei unter ω der Winkel zwischen den Axen verstanden wird. Der Kreis ist reell oder imaginär, je nachdem $Aa_{11} < 0$ oder $Aa_{11} > 0$ ist.

Für rechtwinklige Axen muss daher

$$a_{11} = a_{22},\ a_{12} = 0 \quad \textit{sein.}$$

Der Gleichung des Kreises kann man bei rechtwinkligen Axen die Gestalt

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$

geben, worin α und β die beiden Mittelpunktscoordinaten und r den Radius bezeichnen; bei schiefen Axen dagegen lässt sich die Gleichung auf die Form

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + 2(x - \alpha)(y - \beta)\cos\omega = r^2$$

reduciren, wenn ω den Axenwinkel bedeutet.

Ist die allgemeine Gleichung des Kreises

$$a_{11}(x^2 + xy\cos\omega + y^2) + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

gegeben, so sind die Mittelpunktscoordinaten:

$$\alpha = \frac{-a_{13} + a_{23}\cos\omega}{a_{11}\sin^2\omega},$$

$$\beta = \frac{a_{13}\cos\omega - a_{23}}{a_{11}\sin^2\omega},$$

und der Radius ist durch

$$r^2 = \frac{a_{13}^2 + a_{23}^2 - 2a_{13}a_{23}\cos\omega - a_{11}a_{33}\sin^2\omega}{a_{11}^2\sin^2\omega}$$ *bestimmt.*

Eine Hyperbel, deren Asymptoten rechtwinklig aufeinander stehen, heisst *gleichseitig.*

Für die gleichseitige Hyperbel muss

$$a_{11} + a_{22} - 2a_{12}\cos\omega = 0$$ *sein.*

Alle Kreise der Ebene werden von der unendlich fernen Geraden in denselben beiden imaginären Punkten geschnitten, welche die imaginären unendlich fernen Kreispunkte der Ebene genannt werden.

Jeder Kegelschnitt, der durch die beiden imaginären Kreispunkte geht, ist ein Kreis.

Die Tangentialgleichung der beiden imaginären Kreispunkte ist

$$u^2 + v^2 = 0.$$

Die trigonometrischen Tangenten der Winkel, welche die in diesen Punkten an den Kreis gezogenen Tangenten mit der x-Axe bilden, sind $\operatorname{tg}\alpha = \pm i = \pm\sqrt{-1}$; *die Tangenten an alle Kreise in den imaginären Kreispunkten sind daher als parallel anzusehen.*

Der Winkel α muss als unendlich gross betrachtet werden.

Die Gleichung der Tangente an den Kegelschnitt in einem Punkt mit den Coordinaten x', y' lautet:

$$(a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13})x + (a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23})y + (a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}) = 0.$$

Die Normale, d. h. das Loth auf die Tangente in dem Berührungspunkt, hat bei orthogonalen Axen die Gleichung:

$$\frac{x - x'}{a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}} = \frac{y - y'}{a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}}.$$

Bezeichnet man mit $f(x, y)$ die linke Seite der Kegelschnittsgleichung, *so sind die Tangenten, welche man von einem Punkt x', y' an den Kegelschnitt ziehen kann, reell und verschieden reell und zusammenfallend oder imaginär, je nachdem das Product*

$$Af(x', y')$$

negativ, Null oder positiv ist.

Die Bedingung, damit die Gerade mit der Gleichung

$$ux + vy + 1 = 0$$

eine Tangente an den gegebenen Kegelschnitt mit der gewöhnlichen Gleichung sei, ist

$$A_{11}u^2 + 2A_{12}uv + A_{22}v^2 + 2A_{13}u + 2A_{23}v + A_{33} = 0,$$

worin $A_{11}, A_{22}, \ldots$ die algebraischen Adjungirten der gleichnamigen Elemente in der Determinante A sind.

Wenn u, v als Geradencoordinaten interpretirt werden, ist die vorstehende Relation die *Tangentialgleichung des Kegelschnitts* oder die *Gleichung des Kegelschnitts in Liniencoordinaten*.

Die Gleichung

$$(a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13})x + (a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23})y + (a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}) = 0,$$

worin x', y' nicht, wie bisher, die Coordinaten eines Punkts der Curve, sondern allgemein eines beliebigen Punkts der Ebene sind, stellt die *Polare* (siehe § 2) des Punkts x', y' (*des Pols*) in Bezug auf die Curve dar.

Damit zwei Punkte $(x', y'), (x'', y'')$ conjugirt seien (§ 2), muss

$$a_{11}x'x'' + a_{12}(x'y'' + x''y') + a_{22}y'y'' + a_{13}(x' + x'') + a_{23}(y' + y'') + a_{33} = 0$$

sein.

Der Pol der Geraden

$$\lambda x + \mu y + \nu = 0$$

hat zu Coordinaten:

$$x' = \frac{A_{11}\lambda + A_{12}\mu + A_{13}\nu}{A_{13}\lambda + A_{23}\mu + A_{33}\nu}, \quad y' = \frac{A_{12}\lambda + A_{22}\mu + A_{32}\nu}{A_{13}\lambda + A_{23}\mu + A_{33}\nu}.$$

Zu jeder Geraden gehört bez. eines Kegelschnitts nur ein Pol; ne Ausnahme tritt nur dann ein, wenn der Kegelschnitt in ein eradenpaar ausartet, also $A = 0$ ist. In diesem Fall haben le durch den Schnittpunkt des Geradenpaares gehenden Geraden nendlich viele Pole, welche ebenfalls eine durch den Schnittpunkt ehende Gerade erfüllen; die Polare des Schnittpunkts ist in diesem all unbestimmt.

Die Bedingung, unter welcher zwei Gerade

$$\lambda' x + \mu' y + \nu' = 0,$$
$$\lambda'' x + \mu'' y + \nu'' = 0$$

njugirt sind, lautet:

$$\begin{vmatrix} 0 & \lambda' & \mu' & \nu' \\ \lambda'' & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \mu'' & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \nu'' & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Der Ort der Mittelpunkte eines Systems von Sehnen, welche erselben Richtung parallel sind, ist eine Gerade, die Durchesser des Kegelschnitts genannt wird.

Der Durchmesser ist die Polare des in der Richtung der on ihm halbirten Sehnen unendlich fern gelegenen Punkts.

Alle Durchmesser gehen durch einen Punkt, welcher der Mittelpunkt des Kegelschnitts heisst. Jede durch den Mittelunkt gehende Gerade ist ein Durchmesser.

Der Mittelpunkt ist der Pol der unendlich fernen Geraden ler Ebene.

Die Tangenten in den Punkten, in welchen ein Durchmesser lie Curve trifft, sind den von dem Durchmesser halbirten Sehnen parallel.

Wenn der Coordinatenanfang in dem Mittelpunkt des Kegelschnitts liegt, so fehlen in der Gleichung des Kegelschnitts die Terme ersten Grads in den Coordinaten.

Die Gleichung des Durchmessers, welcher die Sehnen halbirt, die parallel zur Geraden $\frac{x}{y} = \frac{m}{n}$ *sind, lautet:*

$$(a_{11} m + a_{12} n) x + (a_{21} m + a_{22} n) y + (a_{31} m + a_{32} n) = 0.$$

Speciell gilt für die Durchmesser, welche die Sehnen halbiren, die den Coordinatenaxen parallel sind:

$$a_{11} x + a_{12} y + a_{13} = 0,$$
$$a_{21} x + a_{22} y + a_{23} = 0.$$

Bei der Parabel liegt der Mittelpunkt unendlich fern und sind daher alle Durchmesser parallel.

Die Coordinaten x_0, y_0 des Mittelpunkts eines Kegelschnitts sind:

$$x_0 = \frac{a_{23}a_{21} - a_{22}a_{13}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2},$$

$$y_0 = \frac{-a_{23}a_{11} + a_{12}a_{13}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}.$$

Bei der Ellipse und Hyperbel heissen zwei *Durchmesser conjugirt*, wenn der eine die dem anderen parallelen Sehnen halbirt.

Die unendlich vielen Paare conjugirter Durchmesser bilden eine Involution, deren Doppelstrahlen die (bei der Hyperbel reellen, bei der Ellipse imaginären) Asymptoten sind.

Zwischen den Winkelcoefficienten)* $\frac{m}{n}, \frac{m'}{n'}$ *zweier conjugirter Durchmesser besteht die Relation*

$$a_{11}mm' + a_{12}(mn' + m'n) + a_{22}nn' = 0.$$

Der Winkelcoefficient der Durchmesser der Parabel ist

$$-\frac{a_{12}}{a_{11}} \text{ oder } -\frac{a_{22}}{a_{12}}.$$

Die Winkelcoefficienten $\frac{m}{n}$ *der beiden Asymptoten der Hyperbel sind durch die Gleichung*

$$a_{11}m^2 + 2a_{12}mn + a_{22}n^2 = 0 \quad \textit{gegeben.}$$

Die vereinigte Gleichung für die beiden durch den Coordinatenanfang parallel zu den Asymptoten gezogenen Geraden lautet.

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0.$$

Der Flächeninhalt des aus der Tangente und den beiden Asymptoten gebildeten Dreiecks ist bei der Hyperbel constant.

Bei der Ellipse und der Hyperbel gibt es unter den unendlich vielen Paaren conjugirter Durchmesser ein Paar, dessen Durchmesser senkrecht aufeinander stehen. Diese beiden Durchmesser heissen die *Axen* und ihre Schnittpunkte mit der Curve die *Scheitel*.

---

*) Eigentlich pflegt man Winkelcoefficient einer Geraden das mit umgekehrtem Vorzeichen genommene Verhältniss zwischen den Coefficienten von x und y in der auf *rechtwinklige* Cartesische Coordinaten bezogenen Gleichung der Geraden zu nennen. Wir wollen diese Benennung aber hier auch auf *schiefe* Coordinaten ausdehnen

Bei der Parabel gibt es nur einen Durchmesser, der auf den von ihm halbirten Sehnen senkrecht steht; auch er wird *Axe* genannt.

Die Axen sind immer reell und sind Symmetricaxen der Curve.

Bei der Hyperbel halbiren die Axen die Winkel zwischen den Asymptoten. Die eine von ihnen trifft die Curve in zwei reellen Punkten und heisst die *Hauptaxe* oder die *reelle* oder *focale* oder auch *transversale Axe,* die andere wird die *imaginäre Axe* genannt.

Die vereinigte Gleichung für die Axen des Kegelschnitts lautet

$$(a_{11}\cos\omega - a_{12})(x-x_0)^2 + (a_{11}-a_{22})(x-x_0)(y-y_0) - \\ - (a_{22}\cos\omega - a_{12})(y-y_0)^2 = 0,$$

worin ω der Winkel zwischen den Coordinatenaxen ist und x_0, y_0 die Coordinaten des Mittelpunkts bedeuten.

Die Gleichung für die Axe der Parabel ist:

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13} + \frac{(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{23}) + (a_{13}a_{12} - a_{11}a_{23})\cos\omega}{a_{11} + a_{22} - 2a_{12}\cos\omega} = 0.$$

Wenn die Coordinatenaxen zwei conjugirte Durchmesser sind (speciell mit den Axen des Kegelschnitts zusammenfallen), so hat die Gleichung des Kegelschnitts die Gestalt

$$\frac{x^2}{a_1^2} \pm \frac{y^2}{b_1^2} = 1;$$

die Grössen a_1, b_1 heissen die Längen der conjugirten Halbmesser.

Wenn die Coordinatenaxen die Axen des Kegelschnitts sind, so werden die Grössen a_1, b_1 *die Halbaxen* genannt. *Schneidet die Axe den Kegelschnitt; so sind die Halbaxen die Abstände des Mittelpunkts von den Schnittpunkten.*

Die Längen der Halbaxen erhält man aus den Formeln

$$\sqrt{-\frac{A}{B\varrho_1}}, \quad \sqrt{-\frac{A}{B\varrho_2}},$$

worin ϱ_1, ϱ_2 die beiden Wurzeln der Gleichung

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \varrho, & a_{12} - \varrho\cos\omega \\ a_{12} - \varrho\cos\omega, & a_{22} - \varrho \end{vmatrix} = 0$$

oder der Gleichung

$$\sin^2\omega \cdot \varrho^2 - C \cdot \varrho + B = 0 \quad \textit{bezeichnen (siehe oben,} \text{ S. 80).}$$

Die auf die Asymptoten bezogene Gleichung der Hyperbel hat die Form

$$xy + p = 0.$$

Die Gleichung der Ellipse oder Hyperbel in Bezug auf einen Durchmesser als x-Axe und die Tangente in einem seiner Endpunkte als y-Axe ist von dem Typus

$$a_1 x^2 + b_1 y^2 + c_1 x = 0.$$

Die Gleichung der Parabel lautet in diesem Fall

$$y^2 = px.$$

Die Zahl p heisst der dem gewählten Durchmesser entsprechende *Parameter*; ist der Durchmesser die *Axe*, so wird p der *Hauptparameter* genannt.

Die Polargleichung der Ellipse oder Hyperbel ist in Bezug auf das Centrum als Pol:

$$\varrho^2 = \frac{{a_{22}}^2}{\pm (1 - e^2 \cos^2 \theta)},$$

worin das positive Zeichen für die Ellipse, das negative für die Hyperbel gilt und e die sogenannte numerische Excentricität ist (§ 5).

§ 4. Die hauptsächlichsten metrischen Eigenschaften der Kegelschnitte.

Wenn ein Kegelschnitt die Seiten BC, CA, AB eines Dreiecks in den Punkten D, D′; E, E′; F, F′ schneidet, so besteht die Relation:

$$\frac{BD \cdot BD'}{CD \cdot CD'} \cdot \frac{CE \cdot CE'}{AE \cdot AE'} \cdot \frac{AF \cdot AF'}{BF \cdot BF'} = 1;$$

das Carnot'sche Theorem, Géom. de posit., p. 437; *und umgekehrt, wenn die Punkte D, D′; E, E′; F, F′ auf den Seiten eines Dreiecks dieser Relation genügen, so liegen sie auf einem Kegelschnitt.*

Bei der Ellipse ist die Summe der Quadrate zweier conjugirter Halbmesser constant, bei der Hyperbel dagegen die Differenz der Quadrate zweier conjugirter Halbmesser.

Bei der Ellipse sowohl wie bei der Hyperbel ist der Flächeninhalt des über zwei conjugirten Halbmessern construirten Parallelogramms constant.

Das Rechteck aus den Segmenten, welche zwei conjugirte Durchmesser auf einer festen Tangente vom Berührungspunkt aus bestimmen, ist constant dem Quadrat über dem der festen Tangente parallelen Halbmesser gleich.

Wenn man ein Parallelogramm über zwei conjugirten Halbmessern der Hyperbel construirt, so ist eine seiner Diagonalen eine Asymptote und die andere der zweiten Asymptote parallel.

Das Rechteck aus den Segmenten, welche eine veränderliche Tangente auf zwei festen parallelen Tangenten von ihren Berührungspunkten aus bestimmt, ist constant dem Quadrat über dem den festen Tangenten parallelen Halbmesser gleich.

Das Rechteck aus den Segmenten, welche zwei veränderliche parallele Tangenten von einer festen Tangente abschneiden, ist dem Quadrat über dem der festen Tangente parallelen Halbmesser gleich.

Das über zwei Halbmessern construirte Parallelogramm hat den gleichen Inhalt, wie das aus den beiden zu ihnen conjugirten Halbmessern gebildete Parallelogramm.

Die beiden von einem Punkt aus an den Kegelschnitt (Ellipse oder Hyperbel) gezogenen Tangenten sind den ihnen parallelen Halbmessern proportional.

Das Product aus den beiden Segmenten einer durch einen festen Punkt gehenden Secante ist dem Quadrat des ihr parallelen Halbmessers proportional.

Die Quadrate eines Systems paralleler Sehnen sind den Producten der Segmente proportional, die von den Sehnen auf dem ihrer Richtung conjugirten Durchmesser bestimmt werden.

Die Producte der Segmente, welche eine Gerade, die einer Asymptote der Hyperbel parallel ist, oder ein Durchmesser der Parabel auf einem System paralleler Sehnen bestimmt, sind den Segmenten proportional, welche die Sehnen von dieser Geraden abschneiden.

Das Product der Segmente, welche von einer beliebigen Tangente an eine Hyperbel auf den beiden Asymptoten, von ihrem Schnittpunkt an gerechnet, bestimmt werden, hat einen constanten Werth.

Der Flächeninhalt des von einer Tangente an die Hyperbel und von den Asymptoten gebildeten Dreiecks ist constant.

Der zwischen den Asymptoten liegende Theil einer Tangente an die Hyperbel wird von dem Berührungspunkt halbirt.

Die beiden Segmente, welche eine Hyperbel und ihre Asymptoten von einer Transversalen abschneiden, haben denselben Mittelpunkt.

Wenn ein Viereck in einen Kegelschnitt eingeschrieben wird, so hat das Product der Abstände eines beliebigen Punkts der Curve von zwei Gegenseiten ein constantes Verhältniss zu dem Product der Abstände desselben Punkts von den beiden anderen Gegenseiten. Das Pappus'sche Theorem.

Wird ein Vierseit einem Kegelschnitt umschrieben, so hat das Product der Abstände einer beliebigen Tangente von zwei Gegenecken ein constantes Verhältniss zu dem Product der Abstände derselben Tangente von den beiden anderen Ecken.

Wenn man um zwei feste Punkte einer Hyperbel zwei Strahlen rotiren lässt, die sich beständig auf der Curve schneiden, so hat das von diesen Strahlen auf einer Asymptote abgeschnittene Segment immer dieselbe Länge.

Eine der Diagonalen des Parallelogramms, von welchem zwei Gegenecken auf der Hyperbel liegen und dessen Seiten den Asymptoten parallel sind, geht stets durch den Mittelpunkt.

Bei der Parabel ist die Subnormale, d. h. der Abstand des Fusspunkts des von einem Punkt der Parabel auf die Axe gefällten Lothes von dem Durchschnittspunkt der Normalen mit der Axe (vergl. Kap. 16, § 1), *constant und dem halben Hauptparameter gleich.*

Der Flächeninhalt des von drei Tangenten an die Parabel gebildeten Dreiecks ist die Hälfte des Inhalts des von den Berührungspunkten der Tangenten gebildeten Dreiecks.

Der Schnittpunkt der Höhen eines jeden in eine gleichseitige Hyperbel eingeschriebenen Dreiecks liegt auf der Curve.

Bei jedem in eine gleichseitige Hyperbel eingeschriebenen rechtwinkligen Dreieck steht die Tangente in dem Scheitel des rechten Winkels senkrecht auf der Hypotenuse.

Der Kreis, welcher einem in Bezug auf eine gleichseitige Hyperbel conjugirten Dreieck eingeschrieben ist, geht durch den Mittelpunkt der Curve.

§ 5. Focale Eigenschaften der Kegelschnitte.

Es gibt im Allgemeinen vier (reelle oder imaginäre) Punkte von der Beschaffenheit, dass alle durch jeden von ihnen gehende Paare von conjugirten Geraden Paare von aufeinander senkrechten Geraden sind. Diese Punkte werden *Brennpunkte* genannt.

Bei der Ellipse und der Hyperbel existiren zwei reelle Brennpunkte in endlicher Entfernung, die auf der einen Axe symmetrisch zum Mittelpunkt liegen und sich innerhalb der Curve

befinden, so dass die von ihnen nach der Curve gezogenen Tangenten imaginär sind.

Bei der Parabel gibt es nur einen einzigen reellen in endlicher Entfernung auf der Axe und innerhalb der Curve gelegenen Brennpunkt.

Die Axe, auf welcher die reellen Brennpunkte liegen, heisst die *Hauptaxe,* auch *Brennpunktsaxe.*

Bezeichnet man mit α, β die Halbaxen der Ellipse oder Hyperbel, *so liegen die reellen Brennpunkte der Ellipse auf ihrer grossen Axe in dem Abstand* $\pm\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$ *vom Centrum und die der Hyperbel in dem Abstand* $\pm\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ *vom Centrum auf derjenigen der beiden Axen, welche die Curve in reellen Punkten trifft.*

Directrix heisst die Polare eines Brennpunkts.

Bei der Ellipse und Hyperbel gibt es zwei Directricen, die reell sind, und senkrecht auf der Brennpunktsaxe stehen; bei der Parabel dagegen nur eine reelle, die ebenfalls senkrecht zur Hauptaxe ist.

Die Gleichung der Directrix erhält man durch Substitution der Coordinaten eines Brennpunkts in die Gleichung der Polaren.

Das Verhältniss der Abstände eines Curvenpunkts vom Brennpunkt und von der entsprechenden Directrix ist constant. Es heisst *die numerische Excentricität und hat für die Ellipse den Werth*

$$\frac{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{\alpha}, \text{ für die Hyperbel } \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\alpha},$$

worin α *und* β*, wie oben, die Halbaxen der beiden Curven sind.*

Für die Ellipse ist die Excentricität kleiner, für die Parabel gleich und für die Hyperbel grösser als 1. Die Punkte der Parabel liegen also gleich weit von dem Brennpunkt und der Directrix entfernt.

Bei der Ellipse ist die Summe, bei der Hyperbel dagegen die Differenz der Strahlen constant, die von einem Punkt der Curve nach den beiden reellen Brennpunkten gezogen werden.

Das Product der Abstände der beiden Brennpunkte von einer Tangente an die Curve ist constant.

Die Tangente und die Normale in einem Punkt der Curve halbiren die Winkel der beiden Brennstrahlen.

Bei der Parabel halbiren die Tangente und die Normale in einem Punkt die Winkel zwischen dem Brennstrahl (Radius vector) und dem durch den betreffenden Punkt der Curve gehenden Durchmesser.

Die beiden reellen Brennpunkte der Ellipse liegen auf der grossen Axe; der Abstand eines jeden von ihnen vom Mittelpunkt ist die eine Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen andere Kathete die kleine Halbaxe und dessen Hypotenuse die grosse Halbaxe ist.

Bei der Hyperbel ist der Abstand eines Brennpunkts vom Centrum die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten die Halbaxen sind.

Eine Ellipse und eine Hyperbel, die durch denselben Punkt gehen und dieselben Brennpunkte haben, schneiden sich rechtwinklig.

Die Normale zum Kegelschnitt zerlegt den Abstand zwischen den Brennpunkten in Theile, die den Brennstrahlen proportional sind.

Der zu einer Sehne gehörige Winkel, dessen Scheitel im Brennpunkt liegt, wird von der Geraden halbirt, welche den Brennpunkt mit dem Pol der Sehne verbindet.

Die Verbindungsgerade des Brennpunkts mit dem Pol einer durch diesen Brennpunkt gehenden Sehne steht senkrecht auf der Sehne.

Der Winkel, welcher dem zwischen zwei festen Tangenten enthaltenen Theil einer veränderlichen Tangente am Brennpunkt gegenüberliegt, ist constant.

Das Rechteck aus den Segmenten einer Brennpunktssehne hat stets dasselbe constante Verhältniss zur ganzen Sehne.

Die Summe zweier Brennpunktssehnen, welche zwei conjugirten Durchmessern parallel sind, ist constant.

Die Summe der reciproken Werthe zweier orthogonaler Brennpunktssehnen ist constant.

Der Abstand eines Punkts der Hyperbel vom Brennpunkt ist der von diesem Punkt parallel zu der Asymptote gezogenen und von der Directrix begrenzten Geraden gleich.

Bei der Parabel haben der Schnittpunkt einer Tangente mit der Hauptaxe und der Berührungspunkt gleichen Abstand vom Brennpunkt.

Der Winkel zwischen zwei Tangenten ist bei der Parabel dem halben Winkel zwischen den beiden nach den Berührungspunkten gezogenen Brennstrahlen gleich.

Bei der Parabel geht der Kreis, welcher dem aus drei Tangenten gebildeten Dreieck umschrieben wird, durch den Brennpunkt.

Die drei Höhen des aus drei Tangenten gebildeten Dreiecks schneiden sich bei der Parabel auf der Directrix.

Die beiden von einem Punkt der Directrix nach der Parabel gezogenen Tangenten stehen senkrecht aufeinander.

Bei der Parabel ist der Parameter eines beliebigen Durchmessers (vergl. § 3) *dem vierfachen Abstand des Endpunkts des Durchmessers vom Brennpunkt gleich.*

Die Polargleichung der Ellipse oder Hyperbel lautet, wenn man einen der Brennpunkte als Pol wählt:

$$\varrho = \frac{b^2}{a} \frac{1}{1 + e \cos\theta},$$

worin a, b die Halbaxen und e die numerische Excentricität (vergl. S. 91) *bedeuten.*

Die Polargleichung der Parabel ist für den Brennpunkt als Pol

$$\varrho = \frac{\frac{1}{2}p}{1 - \cos\theta},$$

worin unter p der Hauptparameter der Parabel verstanden wird.

Wenn $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$ ein Kegelschnitt (Ellipse oder Hyperbel) ist, so stellt die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2 - \lambda} \pm \frac{y^2}{b^2 - \lambda} = 1,$$

in welcher λ ein beliebiger Parameter ist, einen zu dem gegebenen Kegelschnitt confocalen (homofocalen) Kegelschnitt dar, d. h. einen Kegelschnitt mit denselben beiden reellen Brennpunkten.

Die Kegelschnitte, als Schnitte eines Kreiskegels mit einer Ebene, haben schon die alten Griechen, Apollonius, Pappus etc. zum Gegenstand ihrer Forschungen gemacht und fast alle Haupteigenschaften der Brennpunkte, Asymptoten, conjugirten Durchmesser etc. aufgefunden.

Weitere Studien über die Kegelschnitte verdankt man Desargues, B. Pascal, Delahire, Newton, Maclaurin und anderen Mathematikern des 17. und 18. Jahrhunderts; von Desargues und Delahire rührt z. B. die systematische Einführung der Theorie der Pole und Polaren her, von Blaise Pascal die Entdeckung jenes berühmten Theorems (siehe § 2), das von so grosser Bedeutung für die projective Geometrie der Kegelschnitte geworden ist.

Durch die Coordinatenmethode, die Cartesius in seiner *Geometrie* 1637 einführte, wurde man in den Stand gesetzt, diese Curven von einem neuen Gesichtspunkt zu studiren, und durch analytische Formeln die Eigenschaften nachzuweisen, die man bisher auf synthetischem Weg bewiesen hatte.

Wir haben schon am Ende des ersten Kapitels verschiedene Lehrbücher über die Kegelschnitte, welche der einen oder der anderen Methode folgen, citirt; wir führen hier noch an: den ersten Band der *Vorlesungen über Geometrie* von Clebsch, herausgeg. v. Lindemann, Leipzig, 1875 und Steiner, *Vorlesungen über synthetische Geometrie,* 1. Thl. bearb. v. Geiser, 3. Aufl., Leipzig, 1887, 2. Thl. bearb. v. Schroeter, 3. Aufl., ib. 1898. Eingehende historische Nachweise findet man in dem *Aperçu historique* etc. 2. éd., Paris 1875 von Chasles.

Gundelfinger, *Analytische Geometrie der Kegelschnitte,* 1895 behandelt die Kegelschnitte in homogenen Coordinaten.

§ 6. **Kegelschnittbüschel.**

Zwei Kegelschnitte schneiden sich in vier (reellen oder imaginären) Punkten und haben vier Tangenten gemeinschaftlich.

Wenn $f = 0$, $f' = 0$ *die Gleichungen der beiden Kegelschnitte in Punkt- oder Geradencoordinaten sind, so stellt die Gleichung*

$$f + \lambda f' = 0,$$

in welcher λ *ein beliebiger constanter Parameter ist, einen Kegelschnitt dar, welcher durch die vier Schnittpunkte der beiden gegebenen geht oder bez. die vier den beiden gegebenen Kegelschnitten gemeinschaftlichen Tangenten berührt.*

Wir wollen alle durch die Gleichung $f + \lambda f' = 0$ dargestellten Kegelschnitte ein *Büschel* nennen, wenn $f = 0$, $f' = 0$ Gleichungen in Punktcoordinaten, und eine *Schar,* wenn $f = 0$, $f' = 0$ Gleichungen in Tangentencoordinaten sind.

Die vier Schnittpunkte der beiden Kegelschnitte kann man *Basispunkte des Büschels* nennen.

Unter den Kegelschnitten des Büschels gibt es drei, welche in zwei Gerade zerfallen, unter den Kegelschnitten der Schar dagegen drei, die sich auf ein Punktepaar reduciren.

Das Diagonaldreieck des vollständigen Vierecks, welches zu Ecken die vier Basispunkte des Büschels hat, ist ein sich selbst in Bezug auf alle Kegelschnitte des Büschels conjugirtes Dreieck.

Durch jeden Punkt der Ebene geht ein Kegelschnitt des Büschels und jede Gerade der Ebene wird von einem Kegelschnitt der Schar berührt.

Jede Gerade der Ebene wird von zwei Kegelschnitten des Büschels berührt und durch jeden Punkt der Ebene gehen zwei Kegelschnitte der Schar.

Die Schnittpunkte der Kegelschnitte eines Büschels mit einer Geraden bilden auf dieser eine Involution, deren Doppelpunkte die Berührungspunkte derjenigen beiden Kegelschnitte des Büschels sind, welche die Gerade berühren. Der correlative Satz gilt für die Schar.

Der Ort der Centren der Kegelschnitte des Büschels ist ein Kegelschnitt, der durch die 6 Mittelpunkte der Seiten des aus den 4 Basispunkten des Büschels gebildeten Vierecks und durch die drei Diagonalecken geht (der Neunpunktekegelschnitt, vergl. S. 70, 71). *Liegen die 4 Basispunkte auf einem Kreis, so ist der Neunpunktekegelschnitt eine gleichseitige Hyperbel.*

Wenn

$$f = \sum a_{ik} x_i x_k, \quad (a_{ik} = a_{ki}),$$
$$f' = \sum b_{ik} x_i x_k, \quad (b_{ik} = b_{ki})$$

ist, *so hat die Discriminante* (vergl. § 3) *eines Kegelschnitts des Büschels* $f - \lambda f' = 0$ *die Gestalt:*

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda b_{11}, & a_{12} - \lambda b_{12}, & a_{13} - \lambda b_{13} \\ a_{21} - \lambda b_{21}, & a_{22} - \lambda b_{22}, & a_{23} - \lambda b_{23} \\ a_{31} - \lambda b_{31}, & a_{32} - \lambda b_{32}, & a_{33} - \lambda b_{33} \end{vmatrix}.$$

Hat die Gleichung 3ten *Grads* $\Delta(\lambda) = 0$ *eine Doppelwurzel, so fallen zwei der Basispunkte des Büschels zusammen; das Büschel besteht demnach aus Kegelschnitten, die sich in einem Punkt berühren.*

Wenn $\Delta(\lambda) = 0$ *eine Doppelwurzel hat und alle Minoren* 2ter *Ordnung der Determinante* Δ *für diesen Werth von* λ *verschwinden, so berühren sich alle Kegelschnitte des Büschels und mithin auch die beiden gegebenen in zwei Punkten;* die Verbindungsgerade dieser beiden Punkte heisst die *Doppelgerade des Büschels.*

In diesem Fall gibt es unendlich viele sich selbst in Bezug auf alle Kegelschnitte des Büschels conjugirte Dreiecke; alle diese Dreiecke haben eine Seite, nämlich die Doppelgerade, gemeinschaftlich.

Wenn die sämmtlichen drei Wurzeln von $\Delta(\lambda) = 0$ *einander gleich sind, ohne dass für diese Wurzel die Unterdeterminanten* 2ter *Ordnung von* Δ *verschwinden, so haben alle Kegelschnitte des Büschels in einem Punkt eine Berührung* 2ter *Ordnung (d. h. eine dreipunktige Berührung) und ausserdem noch einen anderen Punkt gemeinschaftlich. In diesem Fall gibt es nicht*

mehr ein gemeinsames sich selbst conjugirtes Dreieck im eigent lichen Sinn.

Sind schliesslich alle Wurzeln von $\Delta(\lambda) = 0$ einander gleic und verschwinden gleichzeitig für diesen Werth von λ die Unter determinanten 2ter Ordnung von Δ, so findet zwischen den beide Kegelschnitten und mithin auch zwischen den Kegelschnitten de Büschels in einem Punkt eine Berührung 3ter Ordnung statt, d. h die vier Schnittpunkte vereinigen sich in einen einzigen.

In Bezug auf das System zweier Kegelschnitte sind di sogenannten Poncelet'schen Theoreme über die dem eine Kegelschnitt eingeschriebenen und dem anderen umschriebene Polygone von Interesse:

Man ziehe von einem Punkt A des ersten Kegelschnitt aus eine Tangente an den zweiten Kegelschnitt und verlänge sie, bis sie den ersten Kegelschnitt zum zweiten Mal in de Punkt B trifft; von B aus lege man wieder eine Tangente a den zweiten Kegelschnitt bis zu ihrem Schnitt C mit de ersten und fahre so fort. Wenn man nach n solchen Opera tionen wieder zu dem Ausgangspunkt A zurückkehrt, so is offenbar ein geschlossenes Polygon von n Seiten entstande welches dem ersten Kegelschnitt eingeschrieben und dem zweite umschrieben ist.

Nun besteht der bemerkenswerthe Satz (von Poncelet

Wenn man, von einem Punkt A ausgehend, ein ge schlossenes Polygon bilden kann, so lässt sich immer von jede beliebigen anderen Punkt des ersten Kegelschnitts aus ein ge schlossenes Polygon herstellen.

Wenn n eine gerade Zahl und A einer der Basispunk des Büschels der beiden Kegelschnitte ist, so trifft man bei Au führung der beschriebenen Operation nothwendiger Weise no einen anderen Basispunkt; ist dagegen n ungerade, so trifft ma von dem Basispunkt A des Büschels ausgehend, auf dem erste Kegelschnitt den Berührungspunkt einer der beiden Kegelschnitte gemeinsamen Tangenten.

Daraus folgt dann speciell:

Damit ein dem ersten Kegelschnitt eingeschriebenes und de zweiten umschriebenes Dreieck existire, ist nothwendig und hi reichend, dass die in einem Basispunkt des Büschels an de zweiten Kegelschnitt gelegte Tangente und eine der beiden Kege schnitten gemeinsamen Tangenten sich auf dem ersten Kegelschn treffen.

Soll ein dem ersten Kegelschnitt eingeschriebenes und dem iten umschriebenes Vierseit existiren, so ist nöthig und aushend, dass die in einem Basispunkt des Büschels an den iten Kegelschnitt gelegte Tangente und eine andere eben solche ngente sich in einem Punkt des ersten Kegelschnitts schneiden.

Die Theorie der sogenannten *Poncelet'schen Polygone* wurde ı Poncelet, *Propr. project. des figures,* 1822 eingeführt; ter machte Jacobi, *Crelle* 3, eine sehr elegante und werthle Anwendung der Lehre von den *elliptischen Funktionen* auf sie; diesem Sinn beschäftigten sich mit ihr auch Richelot, *Crelle*, 5 l 38, Rosanes und Pasch, *Crelle*, 64 etc.; siehe auch ılphen, *Fonct. ellipt.*, Bd. 2, p. 367, Paris 1888.

7. Die geometrische Interpretation der invarianten ldungen des Systems einer oder zweier quadratischer ternärer Formen.

Das volle System *einer* quadratischen ternären Form und s *zweier* solcher Formen ist in Bd. 1, Kap. 12, § 16 mittheilt worden.

Hier wollen wir die geometrischen Interpretationen dieser varianten und Covarianten angeben und benutzen dabei die rt gebrauchten Bezeichnungen.

Das System eines einzigen Kegelschnitts hat keine absoluten varianten) und dieser Satz bedeutet geometrisch, dass jeder gelschnitt durch Transformation sich in jeden anderen verndeln lässt.*

Wenn f, f' die beiden Kegelschnitte sind, so ist das Product r vier Schnittpunkte von f und f' durch

$$FF' - F_{12}^2 = 0$$

geben und correlativ das Product der vier den beiden Kegelhnitten gemeinschaftlichen Tangenten durch

$$f \cdot f' - \Phi_{12}^2 = 0.$$

Die Gleichung $\Phi_{12} = 0$ stellt den Ort der Punkte dar, durch e zwei Paare von Tangenten an f und f' gehen, welche ein rmonisches System bilden; dual ist $F_{12} = 0$ die Enveloppe der

*) Zwischen dieser Behauptung und derjenigen in § 3 besteht in Widerspruch; siehe die Fussnote zu § 3, S. 81.

Geraden, welche die beiden Kegelschnitte in vier harmonische Punkten schneiden.

Wenn $A_{122} = 0$ ist, so gibt es eine einfach unendliche Anzahl (sich selbst conjugirter) Polardreiecke in Bezug auf f, welche den Kegelschnitt f' umschrieben, und unendlich viele Polardreiecke in Bezug auf f', die f eingeschrieben sind. Die analoge Eigenschaft besteht für $A_{112} = 0$. Ueber Dreiecke dieser Art siehe: Smith, *Proc. Lond. math. Soc.*, 2, p. 94; Rosanes, *Math. Ann.*, Darboux, *Bull. des sciences math.*, 1, p. 348.

Die Gleichung $N = 0$ stellt, auf die Coordinaten u bezogen, den Schnittpunkt der Polaren des Punktes (x) in Bezug auf die beiden Kegelschnitte dar.

$B_1 = 0$ ist, auf die Coordinaten x bezogen, die Gleichung einer Geraden, auf welcher alle Punkte liegen, deren Polaren bei des Kegelschnitts f' der Geraden u in Bezug auf den Kegelschnitt f harmonisch conjugirt sind.

Die Gleichung $D = 0$ stellt die drei Seiten des f und gemeinschaftlichen Polardreiecks dar und $\Delta = 0$ die drei Ecken dieses Dreiecks.

Alle covarianten Kegelschnitte von f und f' (z. B. $\Phi_{12} =$ haben dasselbe Polardreieck $D = 0$ oder $\Delta = 0$ gemeinschaftlich.

Wenn die Invarianten A_{112} und A_{122} gleichzeitig verschwinden, so ist das anharmonische Verhältniss der vier Schnittpunkte der beiden Kegelschnitte auf jedem der beiden äquianharmonisch.

Die Bedingung, unter welcher zwischen den beiden Kegelschnitten eine einfache Berührung stattfindet, ist

$$4(A_{111}A_{122} - A_{112}^2)(A_{112}A_{222} - A_{122}^2) - (A_{111}A_{222} - A_{112}A_{122})^2 =$$

Soll zwischen den zwei Kegelschnitten in einem Punkt eine Berührung 2ter Ordnung stattfinden, sollen also drei Schnittpunkte dort vereinigt sein, so muss

$$\frac{A_{111}}{A_{112}} = \frac{A_{112}}{A_{122}} = \frac{A_{122}}{A_{222}} \quad \textit{sein.}$$

Das System zweier Kegelschnitte hat zwei absolute Invarianten.

Zu solchen kann man als die einfachsten, wie schon Bd. 1, p. 335 gesagt wurde,

$$A_1 = \frac{A_{112}^2}{A_{111}A_{122}},$$

$$A_2 = \frac{A_{122}^2}{A_{112}A_{222}} \quad \textit{wählen.}$$

Wichtig ist das folgende Theorem:

Das anharmonische Verhältniss α der Geraden, welche einen unkt von f mit den vier Schnittpunkten von f und f' verbinden, t durch die Formel

$$\frac{(1-\alpha+\alpha^2)^3}{(1+\alpha)^2(2-\alpha)^2(1-2\alpha)^2} = \frac{(A_1-1)^3 A_1 A_2^2}{(3A_1A_2-2A_1^2A_2-1)^2}$$

geben und das anharmonische Verhältniss der vier Strahlen, elche einen Punkt von f' mit den vier Schnittpunkten verbinden, urch eine analoge Formel.

Literaturangaben in Bezug auf das System zweier oder ehrerer Kegelschnitte findet man in Bd. 1, Kap. 12, § 16.

Kapitel IV.

Die Flächen 2ter Ordnung.

§ 1. Die projective Erzeugung der Flächen 2ter Ordnung Polarität.

Denken wir uns zwei Bündel, welche verschiedene Träg S, S' haben, und *correlativ* sind (vergl. Kap. 1, § 3); jede Strahl des einen entspricht eine Ebene des zweiten und un gekehrt, und wenn sich der erste Strahl in einer Ebene beweg so dreht sich die entsprechende Ebene um eine Gerade. D Schnittpunkte der Strahlen eines jeden Bündels mit den en sprechenden Ebenen des anderen bilden denselben Ort und dies Ort ist eine sogenannte *Fläche 2ter Ordnung.*

Es seien zwei ebene correlative, nicht conlocale Systen gegeben. Die Ebenen, welche die Punkte des einen mit d entsprechenden Geraden des andern verbinden, *hüllen diesel Fläche ein* und diese ist wieder eine *Fläche 2ter Ordnung.*

Diese projective Erzeugung der Flächen 2ter Ordnung wi von Seydewitz, *Grunert's Arch.*, 9, 1847 und Steiner, *Werk* 1, p. 325 behandelt. Siehe auch Salmon-Fiedler, *Ana Geom. d. Raum.*, 1, p. 333.

Eine andere Definition ist die folgende:

Die Fläche 2ter Ordnung ist der Ort der Doppelpunkte ein involutorischen Raumdualität, d. h. einer Raumpolarität.

Oder auch:

Die Fläche 2ter Ordnung ist die Enveloppe der Dopp ebenen einer Raumpolarität.

Zwei beliebige Punkte der Fläche 2ter Ordnung sind e Mittelpunkte zweier reciproker Bündel, durch welche sich e Fläche erzeugen lässt, und zwei beliebige Berührungsebenen die Fläche 2ter Ordnung sind die Träger zweier reciproker eben Systeme, die zur Erzeugung der Fläche dienen können.

Eine willkürliche Gerade des Raums, welche nicht vollständig in der Fläche 2ter Ordnung liegt, trifft sie in höchstens zwei Punkten, und durch eine Gerade des Raums, die nicht in der Fläche gelegen ist, gehen höchstens zwei Berührungsebenen an die Fläche. Daher sagt man, die Fläche sei 2ter Ordnung und 2ter Klasse.

Wenn durch einen Punkt der Fläche zwei verschiedene oder zusammenfallende Gerade der Fläche gehen oder auch keine, so gilt dasselbe auch für jeden anderen Punkt der Fläche.

Wenn es in einer Berührungsebene an die Fläche 2ter Ordnung zwei Gerade oder eine Gerade oder keine gibt, die der Fläche selbst angehört, so gilt dasselbe auch für jede andere Berührungsebene.

Jede Ebene schneidet die Fläche längs eines Kegelschnitts. Eine Ebene, welche die Fläche berührt, schneidet sie entweder in zwei reellen Geraden, die verschieden sind, oder zusammenfallen, oder in zwei imaginären Geraden.

Je nachdem durch jeden Punkt der Fläche 2ter Ordnung zwei reelle der Fläche angehörige Gerade oder eine einzige reelle Gerade oder zwei imaginäre Gerade gehen, heisst sie *eine Regelfläche 2ter Ordnung,* auch *windschiefe* oder *Fläche 2ter Ordnung mit hyperbolischen Punkten* genannt, ein *Kegel 2ter Ordnung,* der auch *Fläche 2ter Ordnung mit parabolischen Punkten* heisst, oder eine *Fläche 2ter Ordnung mit elliptischen Punkten.*

Wenn die Regelfläche 2ter Ordnung von der unendlich fernen Ebene in dem System zweier Geraden geschnitten (von der unendlich fernen Ebene berührt) wird, so ist sie ein *hyperbolisches Paraboloid;* wird sie in einem eigentlichen Kegelschnitt von ihr geschnitten, so ist sie ein *einfaches* oder *einschaliges Hyperboloid* (mit einer Mantelfläche).

Die Regelflächen 2ter Ordnung enthalten zwei Systeme reeller Geraden; die Geraden des einen Systems werden von denen des anderen in projectiven Punktreihen geschnitten. Daraus ergibt sich die Erzeugung dieser Flächen 2ter Ordnung mittelst zweier nicht in derselben Ebene liegender projectiver Punktreihen.

Das hyperbolische Paraboloid ist der Ort der Geraden, welche die Paare sich entsprechender Punkte in zwei ähnlichen, nicht in derselben Ebene liegenden Punktreihen verbinden.

Das hyperbolische Paraboloid ist auf zwei verschiedene Arten der Ort einer Geraden, welche sich so bewegt, dass sie auf zwei festen nicht in derselben Ebene gelegenen Geraden gleitet

und einer festen Ebene parallel bleibt, welche die Directrix (di Leitebene) der Fläche genannt wird.

Es gibt zwei solche Leitebenen.

Das einschalige Hyperboloid ist der Ort einer Geraden, di sich so bewegt, dass sie auf drei festen sich nicht schneidende Geraden gleitet, die nicht derselben Ebene parallel sind.

Aehnlich unterscheiden sich die Flächen 2ter Ordnun mit elliptischen Punkten nach der Art, wie sie von der unend lich fernen Ebene des Raums geschnitten werden. Sie könne von dieser Ebene in einem reellen Kegelschnitt geschnitten werde alsdann ergibt sich das *zweifache* oder *zweischalige Hyperboloi* (mit zwei Mantelflächen), oder in einem imaginären Kegelschnit in diesem Fall erhält man das *Ellipsoid;* werden sie schliesslic von der unendlich fernen Ebene *berührt,* d. h. in einem in zwe Gerade degenerirten Kegelschnitt getroffen, so hat man da *elliptische Paraboloid.*

Die Geraden eines Kegels 2ter Ordnung heissen *Erzeugende* sie gehen sämmtlich durch denselben Punkt, der *Mittelpunkt* ode *Spitze* genannt wird. Mit Ausnahme dieses Punkts, in welcher sich also unendlich viele Gerade der Fläche schneiden, geh durch jeden der übrigen Punkte der Fläche immer nur *ein* Gerade dieser Fläche. Wenn die Spitze unendlich fern liegt, s ist die Fläche ein *Cylinder;* der Schnitt des Cylinders mit einer z den Erzeugenden senkrechten Ebene heisst die *Basis des Cylinder*

Die von einem Punkt P aus an eine Fläche 2ter Ordnun gelegten Berührungsebenen sind die Tangentialebenen eines Kegel 2ter Ordnung, dessen Spitze in P liegt und dessen Erzeugend die Geraden sind, welche P mit den Berührungspunkten de Tangentialebenen verbinden. Dieser Kegel heisst der *Tangenten* oder *Berührungskegel der Fläche 2ter Ordnung; er berührt di Fläche längs einer ebenen Curve, welche mithin ein Kegelschni ist.* Die Ebene dieses Kegelschnitts heisst die *Polarebene* von und *P* seinerseits der *Pol* dieser Ebene.

Die Zuordnung zwischen Polen und Polarebenen bez. de Fläche zweiter Ordnung ist eine involutorische Dualität. Verg Kap. 1, § 4.

Die Polarebene enthält die Polargeraden von P in Bezu auf alle Kegelschnitte, in welchen die durch P gelegten Ebene die Fläche 2ter Ordnung schneiden.

Jede durch P gezogene Gerade schneidet die Fläche 2^{t} Ordnung in zwei Punkten Q, Q′ und die Polarebene in einem Punk P′ derart, dass die Gruppe PP′QQ′ harmonisch ist.

Wenn sich P auf einer Geraden bewegt, so rotirt die Polarebene um eine andere Gerade, und wenn P sich in einer Ebene bewegt, so dreht sich die Polarebene um einen Punkt, welcher der Pol dieser Ebene ist.

Zwei Gerade heissen *reciprok polar*, wenn die Polarebenen der Punkte der einen durch die andere gehen.

Wenn zwei reciprok polare Gerade sich schneiden, so gehört der Schnittpunkt der Fläche an und ihre Ebene berührt die Fläche.

Die Paare von reciprok polaren Geraden, welche in einer Berührungsebene liegen, sind in einer Involution conjugirt, deren Doppelgeraden die Geraden sind, längs welchen die Berührungsebene die Fläche schneidet.

Wenn zwei Gerade sich schneiden, so treffen sich auch ihre reciproken Polaren.

Conjugirt heissen:

zwei Punkte, wenn der eine in der Polarebene des anderen liegt;

ein Punkt und eine Gerade, wenn die Gerade in der Polarebene des Punkts liegt;

eine Ebene und eine Gerade, wenn die Gerade durch den Pol der Ebene geht;

zwei Gerade, wenn die eine in der Polarebene eines Punkts der anderen liegt;

zwei Ebenen, wenn die eine durch den Pol der anderen geht.

Conjugirt in Bezug auf eine Fläche 2ter Ordnung ist *ein Dreieck*, von welchem jede Ecke die beiden anderen zu conjugirten Punkten und mithin die gegenüberliegende Seite zur conjugirten Geraden hat.

Ein *Tetraeder* ist *Polartetraeder* (oder auch *sich selbst conjugirt, reciprok*) in Bezug auf die Fläche 2ter Ordnung, wenn jede seiner Ecken die übrigen drei zu conjugirten Punkten und mithin die gegenüberliegende Seitenfläche zur Polarebene hat.

Jedes Dreieck eines Polartetraeders ist ein conjugirtes Dreieck.

Je zwei Gegenkanten eines Polartetraeders sind reciprok polar in Bezug auf die Fläche 2ter Ordnung.

Wenn zwei Gerade conjugirt sind, so schneidet die reciproke Polare der einen die andere und umgekehrt.

Ist eine Gerade zwei anderen, die sich schneiden, conjugirt, so ist sie auch der Ebene und dem Schnittpunkt dieser Geraden conjugirt.

Der Pol der unendlich fernen Ebene heisst der *Mittelpunkt*

der Fläche 2ter Ordnung, jede durch das Centrum gehende G rade *Durchmesser* und jede Ebene durch dieses Centrum *Di metralebene.*

Der Mittelpunkt liegt in endlicher Entfernung, wenn die u endlich ferne Ebene die Fläche 2ter Ordnung nicht berührt, al bei dem einschaligen und zweischaligen Hyperboloid, dem Ellipso und dem Kegel 2ter Ordnung; diese Flächen heissen dah *Mittelpunktsflächen (centrale Flächen) 2ter Ordnung.*

Das hyperbolische und elliptische Paraboloid sind Flächen 2^{t} Ordnung ohne Mittelpunkt im Endlichen (nicht centrale Flächen

Jede Diametralebene schneidet die Fläche in einem Kege schnitt, dessen Centrum mit dem der Fläche zusammenfällt.

Die Durchmesser werden durch das Centrum halbirt.

Wenn sich drei Sehnen in einem Punkt halbiren und nic in derselben Ebene liegen, so ist dieser Punkt das Centrum d Fläche 2ter Ordnung.

Jede Diametralebene ist der Ort der Mittelpunkte aller (para lelen) mit ihr conjugirten Sehnen.

Die Berührungspunkte der von dem Centrum an die Fläc 2ter Ordnung gelegten Tangentialebenen liegen unendlich fe (und sind reell oder imaginär); der Berührungskegel, der d Centrum zu Spitze hat, heisst daher *Asymptotenkegel.*

Es gibt drei Durchmesser, die zu je zweien senkrecht au einander stehen, und so beschaffen sind, dass die durch zwei v ihnen gehende Ebene die dem dritten Durchmesser parallelen u mithin auf dieser Ebene senkrechten Sehnen zu conjugirten Gerad hat. Sie heissen *Axen* oder *Hauptdurchmesser* und ihre Eben *Hauptebenen.*

Die Hauptebenen sind für die Fläche 2ter Ordnung Sy metrieebenen.

Bei dem Ellipsoid schneidet jede Diametralebene die Fläc in einer Ellipse; bei dem einschaligen Hyperboloid schneiden zw Hauptebenen die Fläche in zwei Hyperbeln, welche die imaginä Axe gemeinschaftlich haben, und die dritte Hauptebene schneid die Fläche längs einer Ellipse; bei dem zweischaligen Hyperbolo schneiden zwei Hauptebenen die Fläche in zwei Hyperbeln, welc die reelle Axe gemeinschaftlich haben und die dritte Ebene schneid sie in einer imaginären Ellipse.

Bei einem Paraboloid heisst jede Gerade, die durch d Berührungspunkt der Fläche mit der unendlich fernen Ebe geht, *Durchmesser.*

Alle Durchmesser eines Paraboloids sind einander paralle

Unter den Durchmessern eines Paraboloids gibt es einen, f welchem die Berührungsebene in seinem Schnittpunkt mit der läche senkrecht steht. Dieser Durchmesser heisst *Axe* und der unkt, in welchem er die Fläche trifft, *Scheitel.*

Die Schnitte des (elliptischen oder hyperbolischen) Paraboloids it Ebenen, die der Axe parallel laufen, sind Parabeln.

Die Schnitte des Paraboloids mit Ebenen, die senkrecht auf er Axe stehen, sind bei dem hyperbolischen Paraboloid Hyperbeln nd bei dem elliptischen Ellipsen.

Die *Kugel* ist ein Ellipsoid, bei welchem jede Diametralbene senkrecht auf dem Durchmesser steht, der durch den Pol ieser Ebene geht.

Die Kugeln des Raums haben einen imaginären unendlich ernen Kreis gemeinschaftlich. Dieser Kreis heisst der *unendlich erne imaginäre Kugelkreis* oder der *absolute* oder *Grenzkreis des Raums. Er enthält alle unendlich fernen imaginären Kreispunkte eder Ebene des Raums.* Vergl. Kap. 3, § 3.

Chasles und P. Serret haben versucht, die Theoreme Pascal's und Brianchon's auf die Flächen 2ter Ordnung ausudehnen; man vergleiche darüber Salmon-Fiedler, *Anal. Geom. l. Raumes,* 1, Art. 144; Klein, *Math. Ann.* 22, 1883, p. 246.

§ 2. Die wichtigsten Formeln der analytischen Geometrie der Flächen 2ter Ordnung.

Die *Fläche* 2ter *O.* ist der Ort der Punkte, für die eine ganze rationale Funktion 2ten Grads zwischen den drei Cartesischen Coordinaten eines Punkts des Raums verschwindet. Die allgemeine Gleichung einer solchen Fläche enthält 10 Coefficienten, nämlich die drei Coefficienten der Quadrate der drei Coordinaten, die drei, welche zu den Producten von je zweien der drei Coordinaten gehören, die drei der Glieder 1ten Grads und schliesslich das von den Coordinaten unabhängige Glied. Der Ort hängt nur von den neun Verhältnissen von neun dieser Coefficienten zum letzten ab; man sagt daher, der Ort 2ten Grads werde von nur *neun* nicht homogenen Coefficienten bestimmt.

Wenn wir die *homogenen* Coordinaten eines Punkts des Raums x_1, x_2, x_3, x_4 nennen, so erhält die Gleichung der Fläche 2ter Ordnung die Gestalt:

$$f(x) = \sum_{i,j}^{1\ldots4} a_{ij}\, x_i x_j = 0, \quad (a_{ij} = a_{ji}),$$

worin sich die Summirung über alle möglichen Combinationen $i, j = 1, 2, 3, 4$ mit der Bedingung $a_{ij} = a_{ji}$ erstreckt. Setzt man $x_4 = 1$, so kommt man auf die Gleichung der Fläche 2ter Ordnung *in nicht homogenen Coordinaten* zurück.

Wenn das Fundamentaltetraeder der Coordinaten sich selbst in Bezug auf die Fläche 2ter Ordnung conjugirt ist (vergl. § 1), so reducirt sich die Gleichung auf die canonische Form

$$\sum_1^4 a_{ii} x_i^2 = 0 .$$

Es sei A die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & \ldots, & a_{14} \\ a_{21}, & \ldots, & a_{24} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{41}, & \ldots, & a_{44} \end{vmatrix} \quad \textit{(die Discriminante)}$$

und A_{ij} die algebraische Adjungirte von a_{ij} in A.

Bezeichnet man ferner die homogenen Coordinaten einer Ebene mit u_1, u_2, u_3, u_4, d. h. gibt man der Gleichung der Ebene die Form

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0 ,$$

so lautet die Gleichung der Fläche 2ter Ordnung in Ebenencoordinaten, falls A von Null verschieden ist:

$$F(u_1, u_2, u_3, u_4) = \sum_{i,j}^{1 \ldots 4} A_{ij} u_i u_j = 0, \ (A_{ij} = A_{ji}) .$$

Diese Gleichung stellt mithin die Fläche 2ter Ordnung nicht als Ort von Punkten, sondern als Enveloppe von Berührungsebenen dar. Man kann sie auch als Bedingungsgleichung ansehen, der die Coefficienten der Gleichung einer Ebene genügen müssen, wenn diese Ebene die durch die ursprüngliche Gleichung gegebene Fläche 2ter Ordnung berühren soll.

Eine Fläche 2ter Ordnung ist bestimmt, wenn 9 Punkte gegeben sind, durch die sie gehen, oder 9 Ebenen, die sie berühren soll.

In dem vorigen Paragraphen haben wir die geometrischen Eigenschaften der verschiedenen Arten von Flächen 2ter Ordnung zusammengestellt; wir wollen jetzt zusehen, wie sich aus der allgemeinen Gleichung (deren Coefficienten als reell vorausgesetzt werden) die Unterschiede zwischen den verschiedenen Flächen ableiten lassen.

Wir setzen

$$B = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix}$$

d nennen B_{ij} die algebraischen Adjungirten der Elemente ; in der Determinante B, die also identisch mit A_{44} ist.

Wenn B nicht Null ist, so sind die Flächen 2ter Ordnung ıtral, ist $B = 0$, so sind sie Paraboloide.

Für $A = 0$ und nur für diesen Fall, erhält man die egel; ist gleichzeitig $A = 0$ und $B = 0$, die Cylinder.

Wir wollen mit (12), (13), ... die Winkel zwischen den ordinatenaxen x_1, x_2; x_1, x_3; ... bezeichnen, und es sei

$$\Omega = \begin{vmatrix} 1 & , & \cos(12), & \cos(13) \\ \cos(12), & & 1 & , & \cos(23) \\ \cos(13), & & \cos(23), & 1 \end{vmatrix},$$

ine positive zwischen 0 und 1 liegende Grösse). Es seien rner $\Omega_{11}, \Omega_{12}, \ldots$ die algebraischen Adjungirten der Elemente on Ω.

Setzt man dann

$$C = B_{11} + B_{22} + B_{33} + 2B_{12}\cos(12) + 2B_{13}\cos(13) + 2B_{23}\cos(23),$$

$$D = a_{11}\Omega_{11} + a_{22}\Omega_{22} + a_{33}\Omega_{33} + 2a_{12}\Omega_{12} + 2a_{13}\Omega_{13} + 2a_{23}\Omega_{23},$$

o gelten die Sätze:

Die Verhältnisse $\frac{A}{\Omega}, \frac{B}{\Omega}, \frac{C}{\Omega}, \frac{D}{\Omega}$ ändern sich bei einer Trans-ormation der Cartesischen Coordinaten nicht (sind invariant).

Das Vorzeichen der Grössen A, B, C, D ist von dem ystem der Cartesischen Coordinaten, das man gewählt hat, un-bhängig.

Bei rechtwinkligen Axen werden die Grössen C, D:

$$C = B_{11} + B_{22} + B_{33},$$
$$D = a_{11} + a_{22} + a_{33},$$

nd Ω wird 1. Man hat daher:

Die Grössen $a_{11} + a_{22} + a_{33}$, $B_{11} + B_{22} + B_{33}$ bleiben hrem Werth nach unverändert, wenn man von rechtwinkligen Co-ordinaten zu anderen ebenfalls rechtwinkligen übergeht.

Alle Wurzeln der Gleichung

$$\Delta(\varrho) = \Omega\varrho^3 + D\varrho^2 + C\varrho + B = 0$$

sind reell und im Allgemeinen verschieden.

Die vorstehende Gleichung lässt sich auch schreiben

$$\Delta(\varrho) = \begin{vmatrix} a_{11}+\varrho, & a_{12}+\varrho\cos(12), & a_{13}+\varrho\cos(13) \\ a_{21}+\varrho\cos(12), & a_{22}+\varrho, & a_{23}+\varrho\cos(23) \\ a_{31}+\varrho\cos(13), & a_{32}+\varrho\cos(23), & a_{33}+\varrho \end{vmatrix} = 0$$

Die Classification der Flächen 2ter Ordnung hängt von den Vorzeichen der Grössen A, B, C, D ab.

I. *B ist von Null verschieden. Man erhält die Mittelpunktsflächen:*

1. *Das reelle Ellipsoid für* $C > 0,\ BD > 0,\ A < 0$
2. *das imaginäre Ellipsoid für* $C > 0,\ BD > 0,\ A > 0$
3. *den imaginären Kegel für* $C > 0,\ BD > 0,\ A = 0$
4. *den reellen Kegel für* $\left.\begin{matrix} C \gtreqless 0,\ BD < 0, \\ C < 0,\ BD \geqq 0, \end{matrix}\right\} A > 0$
5. *das einschalige Hyperboloid für* $\left.\begin{matrix} C \gtreqless 0,\ BD < 0, \\ C < 0,\ BD \geqq 0, \end{matrix}\right\} A > 0$
6. *das doppelschalige Hyperboloid für* $\left.\begin{matrix} C \gtreqless 0,\ BD < 0, \\ C < 0,\ BD \geqq 0, \end{matrix}\right\} A < 0$

II. *B ist gleich Null. Man erhält die Paraboloide, Cylinder oder Ebenenpaare:*

7. *Das elliptische Paraboloid für*
$$C > 0,\ D \lesseqgtr 0,\ A < 0,$$
8. *das hyperbolische Paraboloid für*
$$C < 0,\ D \gtreqless 0,\ A > 0,$$
9. *den Cylinder mit elliptischer Basis für*
$$C > 0,\ D \gtreqless 0,\ A = 0,$$
10. *den Cylinder mit hyperbolischer Basis für*
$$C < 0,\ D \gtreqless 0,\ A = 0,$$
11. *den Cylinder mit parabolischer Basis für*
$$C = 0,\ D \gtreqless 0,\ A = 0,$$

2. *zwei imaginäre Ebenen mit einer reellen Graden in endlicher Entfernung für*

$$C > 0,\ D \gtreqless 0,\ A = 0,\ A_{ii} = 0,\ (i = 1, 2, 3),$$

3. *zwei reelle Ebenen, die sich in einer Geraden in endlicher Entfernung schneiden für*

$$C < 0,\ D \gtreqless 0,\ A = 0,\ A_{ii} = 0,$$

4. *zwei parallele Ebenen, die entweder reell und verschieden oder imaginär sind oder zusammenfallen, für*

$$C = 0,\ D \gtreqless 0,\ A = 0,\ A_{ii} = 0.$$

Durch Transformation der Cartesischen Coordinaten lassen h die Gleichungen der verschiedenen Arten von Flächen 2ter rdnung auf die folgenden reducirten Formen (in nicht homogenen ordinaten) bringen:

1. *Das reelle Ellipsoid auf:* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$
2. *das imaginäre Ellipsoid:* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1,$
3. *der imaginäre Kegel:* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0,$
4. *der reelle Kegel:* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$
5. *das einschalige Hyperboloid:* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$
6. *das zweischalige Hyperboloid:* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1,$
7. *das elliptische Paraboloid:* $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - x = 0,$
8. *das hyperbolische Paraboloid:* $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - x = 0,$
9. *der elliptische Cylinder:* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$
10. *der hyperbolische Cylinder:* $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$
11. *der parabolische Cylinder:* $y^2 \mp 2px = 0,$
12. *zwei imaginäre Ebenen:* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0,$
13. *zwei reelle Ebenen:* $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0,$
14. *zwei parallele Ebenen:* $\frac{x^2}{a^2} \mp 1 = 0.$

In der Gleichung eines jeden Paraboloids bilden die Glieder 2ten Grads in x_1, x_2, x_3 (oder x, y, z) das Product zweier linearer Factoren; diese Eigenschaft ist für das Paraboloid charakteristisch.

In der Gleichung des parabolischen Cylinders bilden die Glieder 2ten Grads in x_1, x_2, x_3 (oder x, y, z) ein vollständiges Quadrat.

Bezeichnet man mit (x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4) die Coordinaten zweier Punkte des Raums, *so ist die Bedingung, damit die Gerade, welche sie verbindet, die Fläche 2ter Ordnung $f = 0$ berühre,*

$$(1) \qquad f(x)f(y) - f^2\binom{x}{y} = 0, \quad \textit{wenn}$$

$$f\binom{x}{y} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}y_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}y_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}y_3 + \frac{\partial f}{\partial x_4}y_4\right) =$$
$$= a_{11}x_1y_1 + a_{22}x_2y_2 + a_{33}x_3y_3 + a_{44}x_4y_4 +$$
$$+ a_{12}(x_1y_2 + x_2y_1) + a_{13}(x_1y_3 + x_3y_1) + a_{14}(x_1y_4 + x_4y_1) +$$
$$+ a_{23}(x_2y_3 + x_3y_2) + a_{24}(x_2y_4 + x_4y_2) + a_{34}(x_3y_4 + x_4y_3$$

gesetzt wird.

Denkt man sich, y sei ein fester Punkt und die x seien laufende Coordinaten, so stellt die Gleichung (1) den der Fläche 2ter Ordnung umschriebenen Kegel dar, dessen Spitze der Punkt y ist.

Wenn $F(u) = 0$ die Gleichung der Fläche 2ter Ordnung in Ebenencoordinaten ist, so besteht die Bedingung, damit die Gerade, in welcher sich die Ebenen (u_1, u_2, u_3, u_4), (v_1, v_2, v_3, v_4) schneiden, die Fläche berühre, darin, dass

$$F(u)F(v) - F^2\binom{u}{v} = 0 \quad \textit{sei.}$$

Diese Bedingung ist äquivalent mit

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & a_{14}, & u_1, & v_1 \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & a_{24}, & u_2, & v_2 \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & a_{34}, & u_3, & v_3 \\ a_{41}, & a_{42}, & a_{43}, & a_{44}, & u_4, & v_4 \\ u_1, & u_2, & u_3, & u_4, & 0, & 0 \\ v_1, & v_2, & v_3, & v_4, & 0, & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Vertauscht man in dieser Gleichung die a mit A und die u, v mit x, y, so ergiebt sich eine andere Form für die Bedingung unter welcher die Gerade $(x)(y)$ die Fläche berührt.

Die Polarebene eines Punktes (y) hat die Gleichung

$$f\binom{x}{y} = 0,$$

l die Coordinaten des Pols einer Ebene

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + \cdots = 0$$

d:

$$\begin{aligned} Ax_1 &\equiv A_{11}u_1 + A_{12}u_2 + A_{13}u_3 + A_{14}u_4, \\ Ax_2 &\equiv A_{21}u_1 + A_{22}u_2 + A_{23}u_3 + A_{24}u_4, \\ Ax_3 &\equiv A_{31}u_1 + A_{32}u_2 + A_{33}u_3 + A_{34}u_4, \\ Ax_4 &\equiv A_{41}u_1 + A_{42}u_2 + A_{43}u_3 + A_{44}u_4. \end{aligned}$$

Zu jeder Ebene gehört bez. einer Fläche 2ter Ordnung ein nziger Pol; eine Ausnahme tritt nur dann ein, wenn $A = 0$, also eine Kegelfläche oder deren Ausartungen vorliegen.

Wenn der Punkt (y) der Fläche 2ter Ordnung angehört, so llt die Gleichung

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

e Berührungsebene dar.

Die Bedingung, unter welcher zwei Punkte (x), (y) con-girt sind, ist selbstverständlich ebenfalls $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$, und die edingung, unter welcher zwei Ebenen (u), (v) conjugirt sind, ist $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0$.

Diese beiden Bedingungen lassen sich auch ausdrücken:

$$\begin{vmatrix} A_{11}, & \ldots, & A_{14}, & x_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{41}, & \ldots, & A_{44}, & x_4 \\ y_1, & \ldots, & y_4, & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & \ldots, & a_{14}, & u_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{41}, & \ldots, & a_{44}, & u_4 \\ v_1, & \ldots, & v_4, & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Sollen zwei Gerade (u, v), (u', v') conjugirt sein, so bestehen lafür die vier Bedingungen:

$$F\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0, \quad F\begin{pmatrix} u \\ v' \end{pmatrix} = 0, \quad F\begin{pmatrix} u' \\ v \end{pmatrix} = 0, \quad F\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = 0.$$

Die Gleichung, welche die beiden Berührungsebenen darstellt, lie durch eine Gerade (u, v) an eine Fläche 2ter Ordnung gelegt werden können, lautet:

$$F(u)(v_1 x_1 + v_2 x_2 + \cdots)^2 -$$
$$- 2F\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(v_1 x_1 + \cdots)(u_1 x_1 + \cdots) + F(v)(u_1 x_1 + \cdots)^2 = 0.$$

Vertauscht man F mit f und x mit u, sowie y mit v, so ergiebt sich correlativ die Gleichung (in Ebenencoordinaten) der beiden Schnittpunkte der Geraden (x, y) mit der Fläche 2ter Ordnung.

Die Coordinaten dieser Schnittpunkte der Geraden (x, y) mit der Fläche 2ter Ordnung haben die Form

$$\frac{mx_i + ny_i}{m+n},$$

worin $\frac{m}{n}$ den Werth einer jeden der beiden Wurzeln der Gleichung

$$f(x)\left(\frac{m}{n}\right)^2 + 2f\binom{x}{y}\frac{m}{n} + f(y) = 0 \quad \textit{annimmt.}$$

Die Gleichung einer beliebigen Diametralebene hat die Gestalt

$$\alpha_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \alpha_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0,$$

worin α_1, α_2, α_3 drei willkürliche Constante sind. Jede Gerade welche durch den unendlich fernen Punkt mit den Coordinaten $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, 0)$ geht, bestimmt die Richtung, die der vorstehenden Diametralebene conjugirt ist.

Die den Richtungen einer jeden der drei Coordinatenaxen x_1, x_2, x_3 conjugirten Diametralebenen sind durch die Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = 0 \quad \textit{gegeben.}$$

Die Coordinaten des Mittelpunkts der Fläche 2ter Ordnung sind

$$\frac{A_{14}}{B}, \quad \frac{A_{24}}{B}, \quad \frac{A_{34}}{B}.$$

Die Gleichung des Asymptotenkegels lautet

$$f(x) - \frac{A}{B}x_4^2 = 0,$$

welche man aus $f(x) = 0$ einfach dadurch erhält, dass man a_{44} in $a_{44} - \frac{A}{B}$ umändert.

Die *Hauptebenen* sind Diametralebenen, die senkrecht auf der zu ihnen conjugirten Richtung stehen; die Geraden, in welchen sie sich schneiden, sind die *Hauptdurchmesser oder Axen*

Um die drei Hauptebenen zu erhalten, hat man nur in der eichung

$$\alpha_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \alpha_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0$$

die Stelle von $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ Werthe zu setzen, die den Quadrat- urzeln aus den drei Hauptminoren der Determinante $\Delta(\varrho)$ (siehe en) proportional sind, wenn man für ϱ eine jede der drei ellen) Wurzeln der Gleichung $\Delta(\varrho) = 0$ einsetzt.

Die Formeln gestalten sich natürlich viel einfacher, wenn e Coordinatenaxen senkrecht aufeinander stehen.

Ist eine Axe der Fläche derart, dass alle durch sie gehenden benen Hauptebenen sind, so ist die Fläche eine *Rotationsfläche er Ordnung.* Die *Kugel* ist eine Fläche 2ter Ordnung, bei elcher jede Diametralebene eine Hauptebene ist.

Die nothwendige und ausreichende Bedingung, damit eine läche 2ter Ordnung eine Rotationsfläche sei, besteht darin, dass $(\varrho) = 0$ zwei gleiche Wurzeln habe. Dabei dürfen diese Wurzeln cht beide Null sein, weil sonst die Fläche ein parabolischer ylinder ist.

Soll eine Fläche 2ter Ordnung eine Kugel sein, so ist es thwendig und ausreichend, dass $\Delta(\varrho) = 0$ eine dreifache Wurzel habe.

In orthogonalen Coordinaten werden die Bedingungen, unter nen die Fläche eine Rotationsfläche ist, durch zwei der Re- tionen

$$\frac{B_{23}}{a_{23}} = \frac{B_{31}}{a_{31}} = \frac{B_{12}}{a_{12}} = \frac{B_{22} - B_{33}}{a_{22} - a_{33}} = \frac{B_{33} - B_{11}}{a_{33} - a_{11}} = \frac{B_{11} - B_{22}}{a_{11} - a_{22}}$$

ngegeben.

Die Bedingungen für die Kugel sind in rechtwinkligen Co- dinaten

$$a_{11} = a_{22} = a_{33}, \quad a_{23} = a_{31} = a_{12} = 0.$$

Bei dem Paraboloid gibt es nur zwei Hauptebenen in end- cher Entfernung, welche die Fläche in zwei Parabeln schneiden.

In orthogonalen Coordinaten sind die Gleichungen der Axe es Paraboloids (der Schnittlinie der beiden Hauptebenen):

$$\frac{\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}}{\sqrt{B_{11}}} = \frac{\frac{\partial f(x)}{\partial x_2}}{\sqrt{B_{22}}} = \frac{\frac{\partial f(x)}{\partial x_3}}{\sqrt{B_{33}}}.$$

Die Gleichung einer Mittelpunktsfläche 2ter Ordnung hat, au den Mittelpunkt bezogen, in nicht homogenen Coordinaten x, y, den Typus:

$$a'_{11}x^2 + a'_{22}y^2 + a'_{33}z^2 + 2a'_{12}xy + 2a'_{13}xz + 2a'_{23}yz + \frac{A}{B} = 0$$

Die Gleichung einer Mittelpunktsfläche, auf ein Tripel con jugirter Durchmesser bezogen, ist:

$$a''_{11}x^2 + a''_{22}y^2 + a''_{33}z^2 + \frac{A}{B} = 0\,.$$

Wenn diese conjugirten Durchmesser die drei Axen sin so heissen die Grössen

$$\sqrt{-\frac{A}{Ba''_{11}}}\,,\quad \sqrt{-\frac{A}{Ba''_{22}}}\,,\quad \sqrt{-\frac{A}{Ba''_{33}}}$$

die *Längen der Halbaxen der Fläche 2ter Ordnung.*

Man erhält sie, wenn an die Stelle von

$$-a''_{11}\,,\quad -a''_{22}\,,\quad -a''_{33}$$

die drei (reellen) Wurzeln von $\Delta(\varrho) = 0$ gesetzt werden; siehe obe

Bei dem reellen Ellipsoid schneiden die drei Axen die Fläc in reellen Punkten und die Abstände des Mittelpunkts von dies Schnittpunkten sind die Halbaxen des Ellipsoids. Bei einem b liebigen Ellipsoid sind die drei Halbaxen ungleich, bei de Rotationsellipsoid sind zwei von ihnen, bei der Kugel alle drei gleic

Bei dem einschaligen Hyperboloid schneiden nur zwei d Axen die Fläche in reellen Punkten und die Abstände des Ce trums von den Schnittpunkten fallen mit den Längen zweier Hal axen zusammen.

Bei dem zweischaligen Hyperboloid trifft nur eine der Ax die Fläche in reellen Punkten und der Abstand des Centrums v einem der Schnittpunkte fällt mit der Länge einer Halbaxe zusamme

Die Axen, welche die Hyperboloide in reellen Punkt schneiden, heissen *transversal.*

Die Ebene

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0$$

schneidet die Fläche 2ter Ordnung in einer Ellipse, Hyperbel od Parabel, je nachdem die Grösse

$$G = \begin{vmatrix} a_{11}\,, & a_{12}\,, & a_{13}\,, & u_1 \\ a_{21}\,, & a_{22}\,, & a_{23}\,, & u_2 \\ a_{31}\,, & a_{32}\,, & a_{33}\,, & u_3 \\ u_1\,, & u_2\,, & u_3\,, & 0 \end{vmatrix}$$

negativ, positiv oder Null ist.

Zwei parallele Ebenen schneiden die Fläche in Kegelschnitten derselben Art.

Durch jede Axe der Fläche 2ter Ordnung gehen zwei (reelle oder imaginäre) Ebenen von der Beschaffenheit, dass sie selbst und die zu ihnen parallelen Ebenen die Fläche in Kreisen schneiden; diese Ebenen heissen *Kreisschnittebenen;* sie liefern die sogenannten *Kreisschnitte* der Fläche 2ter Ordnung.

Die beiden Kreisschnittebenen durch eine jede Axe liegen symmetrisch in Bezug auf jede Hauptebene.

Von den sechs Systemen von Kreisschnittebenen sind nur zwei reell.

In jedem System von Kreisschnittebenen gibt es immer zwei Tangentialebenen, deren Berührungspunkte mit der Fläche *Kreis-* oder *Nabelpunkte* oder *Umbilicus* der Fläche genannt werden. Salmon-Fiedler, 3. Aufl., 1, S. 122.

Von den zwölf Nabelpunkten sind höchstens vier reell.

Die zwölf Nabelpunkte liegen zu je dreien auf acht imaginären Geraden der Fläche 2ter Ordnung.

Die zwölf Nabelpunkte einer Mittelpunktsfläche (centralen Fläche) liegen zu je vieren in den drei Hauptebenen.

Zwei Kreisschnitte, die zu jedem der beiden Systeme von Kreisschnittebenen gehören, die derselben Axe der Fläche entsprechen, liegen immer auf einer und derselben Kugel.

Bei den Umdrehungsflächen reduciren sich die beiden Systeme reeller Kreisschnittebenen auf das System der Parallelkreise.

Die analytische Bedingung, damit eine Ebene die Kreisschnittebene einer Fläche 2ter Ordnung sei, ist durch zwei der Gleichungen

$$\frac{G_{11}}{H_{11}} = \frac{G_{22}}{H_{22}} = \frac{G_{33}}{H_{33}} = \frac{G_{23}}{H_{23}} = \frac{G_{31}}{H_{31}} = \frac{G_{12}}{H_{12}}$$

gegeben, worin die G_{ij} die algebraischen Adjungirten der Elemente der Determinante G und die H_{ij} die analogen algebraischen Adjungirten der Elemente der Determinante

$$H = \begin{vmatrix} 1, & \cos(12), & \cos(13), & u_1 \\ \cos(21), & 1, & \cos(23), & u_2 \\ \cos(31), & \cos(32), & 1, & u_3 \\ u_1, & u_2, & u_3, & 0 \end{vmatrix}$$

sind und unter $\cos(12), \cos(13), \ldots$ *die Cosinus der Winkel verstanden werden, welche die Coordinatenaxen miteinander machen.*

Bei einem reellen Ellipsoid mit drei ungleichen Axen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (a > b > c)$$

gehen die reellen Kreisschnittebenen durch die Axe von mittler Länge (b).

Die Coordinaten der vier reellen Nabelpunkte sind

$$\pm a\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}, \quad 0, \quad \pm c\sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}.$$

Bei dem einschaligen Hyperboloid sind die beiden Syste reeller Kreisschnittebenen der grösseren der beiden Transvers axen parallel, und die Nabelpunkte sind sämmtlich imaginär.

Bei dem zweischaligen Hyperboloid sind die beiden Syste reeller Kreisschnittebenen der längsten nicht transversalen A parallel, und die vier Nabelpunkte sind reell.

Ist $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ *die Gleichung des zweischali Hyperboloids und* $b > c$, *so sind die Coordinaten der vier reel Nabelpunkte*

$$\pm a\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2 + c^2}}, \quad 0, \quad \pm c\sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 + c^2}}.$$

Der Kegel hat zwei Systeme reeller Kreisschnittebenen, identisch mit denen der einschaligen oder zweischaligen Hyp boloide sind, deren Asymptotenkegel er ist.

Ein elliptisches Paraboloid hat zwei Systeme reeller Kr schnittebenen; sie sind den grösseren Axen der zur Axe s rechten Schnitte parallel; zwei Nabelpunkte sind reell und du

$$\tfrac{1}{4}(b^2 - c^2), \quad 0, \quad \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{c^2(b^2 - c^2)}$$

bestimmt, wenn

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - x = 0, \quad (b > c)$$

die Gleichung des Paraboloids ist. Die reellen Kreisschnittebe sind den beiden Ebenen

$$c^2x^2 - (b^2 - c^2)z^2 = 0$$

parallel.

In einem hyperbolischen Paraboloid sind die beiden Sys reeller Kreisschnittebenen den beiden Ebenen, die wir in Directricen genannt haben, parallel; die Kreise degeneriren in im Endlichen und eine im Unendlichen liegende Gerade.

Wenn $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - x = 0$ *die Gleichung des hyperbolischen araboloids ist, so sind die beiden Systeme von Kreisschnittebenen en beiden Ebenen*

$$\frac{y}{b} - \frac{z}{c} = 0, \quad \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0$$

arallel.

§ 3. Focale Eigenschaften der Flächen 2ter Ordnung.

Der Ort der Punkte, welche so beschaffen sind, dass die von nen einer centralen Fläche 2ter Ordnung umschriebenen Kegel Rotationskegel sind, besteht aus drei in den drei Hauptebenen der Fläche 2ter Ordnung liegenden Kegelschnitten; jeder Kegelschnitt at dieselben Brennpunkte, wie der Schnitt der Hauptebene mit ler Fläche. Diese *Kegelschnitte* heissen *focal*, ihre Punkte sind lie *Brennpunkte (Focus, Focalpunkte)* der centralen Fläche 2ter Ordnung.

Die Focalkegelschnitte gehen durch die vier in ihrer Ebene iegenden Nabelpunkte.

Ein Ellipsoid oder Hyperboloid lässt im Allgemeinen eine (reelle) focale Ellipse und eine focale Hyperbel zu, welche in den beiden Hauptebenen liegen, die durch die längste Transversalaxe gehen.

Die beiden Brennpunkte eines Focalkegelschnitts sind die Scheitel eines anderen Focalkegelschnitts.

Die Focalkegelschnitte der Kegel 2ten Grads reduciren sich auf drei Paare von Geraden; nur zwei von diesen Geraden sind reell.

Für jeden Kegel 2ten Grads existiren zwei reelle Gerade (Focallinien) derart, dass durch jede von ihnen unendlich viele Paare conjugirter auf einander senkrechter Ebenen gehen. Ist er ein Rotationskegel, so fallen die beiden Focalgeraden mit der Rotationsaxe zusammen.

Jeder Schnitt des Kegels mit einer auf einer Focalgeraden senkrechten Ebene hat den Schnittpunkt der Geraden mit der Ebene zum Brennpunkt.

Die Focalgeraden des Asymptotenkegels einer Mittelpunktsfläche sind die Asymptoten der Focalkegelschnitte dieser Fläche.

Bei einem Paraboloid besteht der Ort aller Punkte, die so beschaffen sind, dass der von ihnen der Fläche umschriebene Kegel ein Rotationskegel ist, aus zwei Focalparabeln, welche in den zwei Hauptebenen liegen, dieselbe Axe, wie das Paraboloid, haben, ihre Oeffnungen nach entgegengesetzten Richtungen kehren und

die nämlichen Brennpunkte besitzen, wie die beiden durch die zwei Hauptebenen in dem Paraboloid erzeugten Parabeln.

Die Focalparabeln liegen bei dem Paraboloid derart, dass der Brennpunkt der einen der Scheitel der anderen ist.

Die Parameter der beiden Focalparabeln sind einander und der Differenz der Parameter der beiden durch die Hauptebenen erzeugten Parabeln gleich.

1. *Für das reelle Ellipsoid*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

mit den Halbaxen $a>b>c$ *sind die drei Focalkegelschnitte:*

$x=0,\ \frac{y^2}{a^2-b^2}+\frac{z^2}{a^2-c^2}=-1$ *(eine imaginäre Ellipse),*

$y=0,\ \frac{x^2}{a^2-b^2}-\frac{z^2}{b^2-c^2}=1$ *(eine Hyperbel),*

$z=0,\ \frac{x^2}{a^2-c^2}+\frac{y^2}{b^2-c^2}=1$ *(eine reelle Ellipse).*

2. *Für das imaginäre Ellipsoid*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1,\ (a>b>c)$$

sind die Focalkegelschnitte:

$x=0,\ \frac{y^2}{a^2-b^2}+\frac{z^2}{a^2-c^2}=1$ *(eine reelle Ellipse),*

$y=0,\ \frac{z^2}{b^2-c^2}-\frac{x^2}{a^2-b^2}=1$ *(eine Hyperbel),*

$z=0,\ \frac{x^2}{a^2-c^2}+\frac{y^2}{b^2-c^2}=-1$ *(eine imaginäre Ellipse).*

3. *Für das einschalige Hyperboloid*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\ (a>b)$$

sind die Focalkegelschnitte:

$x=0,\ \frac{y^2}{a^2-b^2}+\frac{z^2}{a^2+c^2}=-1$ *(eine imaginäre Ellipse),*

$y=0,\ \frac{x^2}{a^2-b^2}-\frac{z^2}{b^2+c^2}=1$ *(eine Hyperbel),*

$z=0,\ \frac{x^2}{a^2+c^2}+\frac{y^2}{b^2+c^2}=1$ *(eine reelle Ellipse).*

4. *Für das zweischalige Hyperboloid*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \ (b > c),$$

ıd sie:

$= 0$, $\frac{y^2}{a^2 + b^2} + \frac{z^2}{a^2 + c^2} = -1$ *(eine imaginäre Ellipse),*

$= 0$, $\frac{x^2}{a^2 + b^2} + \frac{z^2}{b^2 - c^2} = 1$ *(eine reelle Ellipse),*

$= 0$, $\frac{x^2}{a^2 + c^2} - \frac{y^2}{b^2 - c^2} = 1$ *(eine Hyperbel).*

5. *Für den reellen Kegel*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \ (a > b)$$

ind die beiden reellen Focalgeraden:

$$y = 0, \ \frac{x^2}{a^2 - b^2} - \frac{z^2}{b^2 + c^2} = 0.$$

6. *Für ein (elliptisches oder hyperbolisches) Paraboloid, dessen Gleichung*

$$py^2 + qz^2 - x = 0, \ (p \lessgtr q)$$

st, in welcher p, q bei dem elliptischen Paraboloid dasselbe und bei dem hyperbolischen verschiedene Vorzeichen haben, sind die beiden Focalparabeln

$$y = 0, \ z^2 = \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)\left(x - \frac{1}{4p}\right),$$

$$z = 0, \ y^2 = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)\left(x - \frac{1}{4q}\right).$$

Die Rotationsaxen der, von den Brennpunkten aus, der Fläche 2ter Ordnung umschriebenen Kegel berühren die Focalkegelschnitte.

Die Tangenten an die Focalkegelschnitte sind Gerade, durch welche unendlich viele Paare von Ebenen gehen, die in Bezug auf die Fläche 2ter Ordnung conjugirt sind und aufeinander senkrecht stehen.

Die in dem Berührungspunkt auf einer Tangente an einen Focalkegelschnitt senkrecht stehende Ebene schneidet die Fläche 2ter Ordnung in einem Kegelschnitt, der den Berührungspunkt zum Brennpunkt und eine auf der Ebene des Focalkegelschnitts senkrechte Gerade zur Directrix hat.

Wenn man von einem beliebigen Punkt aus das Loth auf die Polarebene dieses Punkts in Bezug auf die Fläche 2ter Ord-

nung fällt, so sind die Schnitte des Loths und der Ebene mi einer Hauptebene Pol und Polare in Bezug auf den in diese Hauptebene liegenden Focalkegelschnitt.

Die Schnitte einer Berührungsebene an die Fläche 2ter Ord nung und der Normalen mit einer Hauptebene sind Polare un Pol in Bezug auf den Focalkegelschnitt.

Das Product der Abstände einer Berührungsebene an di Fläche 2ter Ordnung von den beiden Punkten eines Focalkegel schnitts, in welchen die Tangenten der Ebene parallel sind, bleib constant.

Wenn das Ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \ (a > b > c)$$

gegeben ist, so stellt die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda} + \frac{z^2}{c^2 - \lambda} = 1,$$

in welcher λ ein beliebiger Parameter ist, eine dem gegebene Ellipsoid confocale Fläche 2ter Ordnung dar, d. h. eine solch welche dieselben Focalkegelschnitte hat.

Da man λ auf unendlich viele Arten variiren kann, so gil es eine einfach unendliche Menge von Flächen 2ter Ordnung, d der gegebenen confocal sind.

Durch jeden Punkt des Raums gehen drei solche Fläche 2ter Ordnung, nämlich ein Ellipsoid, ein einschaliges und ein zwe schaliges Hyperboloid, welche sich in dem gemeinschaftlichen Pun rechtwinklig schneiden.

Die drei Werthe von λ, welche den drei durch einen g gebenen Punkt gehenden confocalen Flächen 2ter Ordnung en sprechen, kann man zu Coordinaten des Punkts wählen; s heissen *elliptische Coordinaten.*

§ 4. Die metrischen Eigenschaften der Flächen 2ter Ord nung. Gleichseitige Flächen 2ter Ordnung.

Bei dem Ellipsoid ist das Product des Normalensegmen welches zwischen dem Ellipsoid und einer Hauptebene enthalt ist, mit dem Abstand des Centrums von der Berührungsebe constant; dieses Product ist dem Quadrat des auf der Berührung ebene senkrechten Halbmessers gleich.

In jedem Ellipsoid ist die Summe der Quadrate dreier co jugirter Halbmesser constant.

Das Volumen des über drei conjugirten Halbmessern construirten Parallelepipedons bleibt constant.

Ebenso ist die Summe der Quadrate der Projectionen dreier conjugirter Halbmesser auf eine Gerade oder Ebene constant.

In einem elliptischen Paraboloid bleibt die Summe der Hauptparameter zweier beliebiger conjugirter Diametralschnitte constant. Bei dem hyperbolischen Paraboloid dagegen ist die Differenz dieser Parameter constant.

Bei einem elliptischen Paraboloid ist der Ort der Spitzen der umschriebenen dreifach rechtwinkligen Dreiflache eine zur Axe senkrechte Ebene, die vom Scheitel um die Grösse

$$\frac{b^2 + c^2}{4}$$

absteht, wenn

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - x = 0,$$

wie gewöhnlich, die Gleichung des Paraboloids darstellt.

Für das Ellipsoid ist derselbe Ort eine mit dem Ellipsoid concentrische Kugel, deren Radius

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

ist, wenn a, b, c die Halbaxen des Ellipsoids bezeichnen. Für jede andere Mittelpunktsfläche ist dieser Ort stets eine Kugel (Monge).

Wenn in einem einschaligen Hyperboloid eine auf einer Geraden des Hyperboloids senkrechte Ebene die Fläche in einer gleichseitigen (rectangulären) Hyperbel schneidet, so treffen auch alle andere solche Ebenen die Fläche in gleichseitigen Hyperbeln.

Dieses Hyperboloid heisst *gleichseitig;* Vogt, *Crelle,* 86.

Wenn in einem einschaligen Hyperboloid einer ihm angehörigen Geraden zwei andere aufeinander und auf der ersteren senkrechte, und ebenfalls der Fläche angehörige Gerade desselben Systems entsprechen, so gilt dasselbe für alle Gerade und das Hyperboloid ist gleichseitig.

Ein einschaliges Hyperboloid ist gleichseitig, wenn $D = 0$ *ist.* Vergl. § 2.

Lautet daher seine Gleichung, wie gewöhnlich,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

so ist die Bedingung, damit es gleichseitig sei,

$$D = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} = 0.$$

Wenn ein durch einen Kegel 2ten *Grads senkrecht zu den Erzeugenden geführter Schnitt eine gleichseitige Hyperbel ist, so gilt dasselbe für alle senkrecht zu den Erzeugenden geführten Schnitte;* der *Kegel* heisst alsdann *gleichseitig.*

Bei einem gleichseitigen Kegel entsprechen jeder Erzeugenden zwei andere, die auf einander und auf der ersteren senkrecht stehen.

Ein Kegel ist gleichseitig, wenn $D = 0$ *ist.*

Wenn in einem zweischaligen Hyperboloid ein auf einer Asymptote (einer Erzeugenden des Asymptotenkegels) senkrechter Schnitt eine gleichseitige Hyperbel ist, so gilt dasselbe für alle ähnlichen Schnitte.

Das Hyperboloid heisst dann *gleichseitig.*

In jedem gleichseitigen zweischaligen Hyperboloid entsprechen jeder Asymptote zwei andere, die aufeinander und auf der ersteren senkrecht stehen.

Das zweischalige Hyperboloid ist gleichseitig, wenn $D = 0$ *ist.*

Für ein elliptisches Paraboloid kann D nicht Null sein.

Ein hyperbolisches Paraboloid ist *gleichseitig,* wenn die beiden Directrix-Ebenen senkrecht aufeinander stehen.

Soll ein hyperbolisches Paraboloid gleichseitig sein, so muss $D = 0$ *sein.*

Bei einem gleichseitigen hyperbolischen Paraboloid ist jeder senkrecht zur Axe geführte Schnitt eine gleichseitige Hyperbel.

Ueber eine andere einfache Gattung von Flächen 2ter Ordnung, nämlich die sogenannten *orthogonalen Hyperboloide,* vergl. Schröter, *Crelle,* 85.

§ 5. Flächenbüschel und Flächennetze 2ter Ordnung.

Sind zwei Flächen 2ter Ordnung (2ter Klasse) $f = 0$, $f' = 0$ in Punktcoordinaten (Ebenencoordinaten) gegeben, so heisst das durch

$$f + \lambda f' = 0$$

dargestellte System von Flächen ein *Flächenbüschel* 2ter *Ordnung* (eine *Flächenschar* 2ter *Klasse*).

Alle Flächen des Büschels schneiden sich in einer Raumcurve 4ter *Ordnung (Grundcurve, Durchdringungs-, Durchschnittscurve).*

Alle Flächen eines Büschels 2ter Ordnung werden von einer Ebene in einem Büschel von Kegelschnitten und von einer Geraden in einem Büschel von Gruppen zweier Punkte d. h. in Paaren von involutorisch conjugirten Punkten geschnitten.

Durch einen Punkt des Raums geht im Allgemeinen nur eine Fläche des Büschels; es gibt zwei Flächen 2ter Ordnung des Büschels, welche eine gegebene Gerade, und drei Flächen des Büschels, die eine gegebene Ebene berühren. Näheres findet man in der Tabelle in Kap. 15, § 4.

Die Polarebenen eines Punkts P in Bezug auf alle Flächen 2ter Ordnung des Büschels gehen durch eine feste Gerade p und bilden mithin ein Ebenenbüschel. Die Gerade p heisst zu P *conjugirt in Bezug auf das Flächenbüschel.*

Die Büschel der Polarebenen zweier Punkte P, P′ sind projectiv zueinander.

Die reciproken Geraden einer Geraden in Bezug auf alle Flächen 2ter Ordnung eines Büschels sind die Erzeugenden eines Hyperboloids, dessen zweites System von Erzeugenden aus den allen Punkten der gegebenen Geraden conjugirten Geraden besteht.

Die Pole einer Ebene in Bezug auf alle Flächen 2ter Ordnung eines Büschels liegen auf einer cubischen Raumcurve.

Daraus folgt:

Die Mittelpunkte aller Flächen 2ter Ordnung eines Büschels liegen auf einer cubischen Raumcurve; in jedem Büschel gibt es im Allgemeinen drei Paraboloide, von welchen wenigstens eines reell ist.

In einem Flächenbüschel 2ter Ordnung existiren im Allgemeinen vier Kegel.

Alle Flächen 2ter Ordnung eines Büschels haben ein Polartetraeder gemeinschaftlich, dessen Ecken die Spitzen der vier dem Büschel angehörigen Kegel sind.

Eine eingehende Untersuchung betreffs der in dem Flächenbüschel enthaltenen Kegel erfordert Betrachtungen aus der Weierstrass'schen Theorie der Elementartheiler, *Repert.* 1, S. 328; vergl. Clebsch-Lindemann, *Anal. Geom. des Raumes,* Bd. 2.

Sind drei Flächen 2ter Ordnung $f = 0$, $f' = 0$, $f'' = 0$ gegeben, welche keinem Büschel angehören, so bilden alle durch

$$f + \lambda f' + \mu f'' = 0$$

dargestellten Flächen ein sogenanntes *Flächennetz oder Flächenbündel 2ter Ordnung*; Salmon-Fiedler, 3. Aufl., 1, S. 165.

Alle Flächen 2ter Ordnung eines Netzes haben acht Punkte gemeinschaftlich (die Grundpunkte oder Basispunkte des Netzes).

Jede Ebene wird von unendlich vielen Flächen 2ter Ordnung eines Netzes berührt; die Berührungspunkte liegen auf einer allgemeinen Curve 3ter Ordnung.

Alle durch sieben Punkte des Raums gehende Flächen 2te Ordnung gehen auch durch einen und denselben achten Punkt.

Die acht Grundpunkte eines Flächennetzes 2ter Ordnung besitzen die Eigenschaft, dass die durch sechs von ihnen bestimmte cubische Raumcurve die Verbindungsgerade der beiden anderen zur Secante hat.

Die Polarebenen eines Punktes P in Bezug auf alle Flächen 2ter Ordnung eines Netzes gehen durch denselben Punkt (den in Bezug auf das Netz zu P conjugirten Punkt).

Der Ort des Pols einer Ebene in Bezug auf alle Flächen 2ter Ordnung eines Netzes ist eine allgemeine Fläche 3ter Ordnung auf welcher auch die in Bezug auf das Netz conjugirten Punkte aller Punkte der Ebene liegen.

Unter den Flächen des Netzes gibt es unendlich viele, die sich auf Kegel reduciren; der Ort ihrer Spitzen ist eine Curve 6ter Ordnung; auf dieser Curve liegen auch alle unendlich vielen Punkte, deren Polarebenen in Bezug auf die Flächen des Netzes sämmtlich durch eine Gerade gehen.

Die alten Geometer hatten die verschiedenen Flächen 2ter Ordnung nicht systematisch in Classen geordnet; die erste Classification verdankt man Euler, *Introductio in anal. infin.*, 174[illegible] Die Lehre von diesen Flächen machte in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts in Folge der Leistungen der Mathematiker der französischen Schule, Monge, Hachette, Lacroix, Binet, Leroy, Poncelet, Chasles grosse Fortschritte. Die Focalkegelschnitte hat Dupin, *Corr. Éc. polyt.*, 2 gefunden und dann haben sie Steiner, Crelle, 1 und Chasles, *Aperçu hist.*, Note 3 studirt.

Von dem Standpunkt der projectiven Geometrie waren für die Theorie der Flächen 2ter Ordnung die Monographien von Hesse, *Crelle*, 18, 20, 26, etc.; Seidewitz, *Grunert's Arch.* 7, 8, 9, 10; Sturm, *Crelle*, 70, 99, etc. grundlegend, zu welchen noch die Werke von Staudt, siehe oben; Reye, *Geom. d. Lage* und von Anderen hinzukommen.

Ein umfangreiches Verzeichniss von Arbeiten über die

Flächen 2ter Ordnung findet man in dem Buch Loria's, übers. von Schütte, *Die hauptsächlichsten Theorien der Geometrie* etc., p. 32. Vergl. auch E. Kötter, *Die Entwicklung der synthetischen Geometrie; Jahresber. der deutsch. Mathematikerver.*, 1898, von der bis jetzt nur ein Heft erschienen ist.

Von dem Gesichtspunkt der analytischen Geometrie aus wurden diese Flächen von Salmon-Fiedler, l. c., Hesse, *Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes*, Leipzig, 1876, Baltzer, l. c., D'Ovidio, l. c. und in dem 2ten Band der Clebsch-Lindemann'schen *Geometrie*, Leipzig, 1891 behandelt; Schröter geht in seinem umfangreichen Werk: *Theorie der Oberflächen 2ter Ordnung und der Raumcurven 3ter Ordnung*, Leipzig, 1880 von synthetischem Standpunkt aus.

Die descriptive Geometrie der Flächen 2ter Ordnung findet man bei Fiedler, *Die darstellende Geometrie*, Leipzig, 1. Thl. 1883, 2. Thl. 1885, 3. Thl. 1888 behandelt.

Am Schluss des D'Ovidio'schen Werkes werden die Mathematiker angegeben, welche die Hauptsätze dieser Theorie entdeckt haben.

Die Focaleigenschaften sind in dem neueren Buch von Staude, *die Focaleigenschaften der Flächen 2ter Ordnung*, Leipzig, 1896 dargestellt.

Was die Theorie der quadratischen quaternären Formen angeht, so verweisen wir auf die Bemerkungen in Bd. 1, Kap. 12, § 19.

Kapitel V.

Allgemeine Theorie der ebenen algebraischen Curven.

§ 1. Allgemeines. Singuläre Punkte. Die Plücker'schen Formeln. Die Discriminante.

Der Ort von Punkten, welcher analytisch durch eine algebraische Gleichung n^{ten} Grads zwischen zwei Cartesischen oder drei homogenen Coordinaten eines Punkts der Ebene dargestellt wird, ist eine *ebene Curve* n^{ter} *Ordnung. Die Curve* 1ter *Ordnung ist die Gerade.*

Die *Tangente* an eine ebene Curve ist die Grenzlage der Geraden, welche zwei unbegrenzt nahe Punkte der Curve verbindet.

Correlativ ist die Enveloppe der Geraden, welche durch eine algebraische Gleichung n^{ten} Grads zwischen den Geradencoordinaten der Ebene dargestellt werden, eine *Enveloppen-Curve* n^{ter} *Classe. Die Enveloppe* 1ter *Classe ist der Punkt.*

Der *Punkt* einer Enveloppen-Curve ist die Grenzlage des Schnitts zweier unendlich naher Tangenten.

Die Curven oder Enveloppen, deren Gleichungen nicht in ganze Factoren zerfallen, heissen *einfach, unzerlegbar* oder *irreducibel.*

Jede ebene Curve n^{ter} *Ordnung wird von einer beliebigen Geraden der Ebene immer in n reellen oder imaginären Punkten geschnitten.*

Durch jeden Punkt der Ebene gehen immer n (reelle oder imaginäre) Gerade, welche eine Enveloppen-Curve n^{ter} *Classe berühren.*

Zwei Curven von den Ordnungen n_1, n_2 *haben im Allgemeinen* $n_1 n_2$ *(reelle oder imaginäre) Punkte und zwei Enveloppen von den Classen* n_1, n_2 *haben* $n_1 n_2$ *Tangenten gemeinschaftlich.*

Sind willkürlich in der Ebene $\frac{n(n+3)}{2}$ *Punkte gegeben, so gibt es im Allgemeinen eine und nur eine Curve* n^{ter} *Ordnung, welche durch sie geht, und correlativ.*

Ein Punkt einer Curve heisst *r-fach oder vielfach von der Ordnung r,* wenn die Curve r-mal durch ihn geht; die Curve hat daher in diesem Punkt r Tangenten; sind diese sämmtlich verschieden, so wird der Punkt ein *gewöhnlicher* r-facher Punkt genannt. Eine *Tangente* heisst r-fach, wenn sie die Enveloppencurve r-mal berührt und mithin r Berührungspunkte besitzt; sind diese verschieden, so sagt man, sie sei eine *gewöhnliche* r-fache Tangente.

Wenn eine Curve n^{ter} *Ordnung einen n-fachen Punkt hat, so ist sie nichts Anderes, als die Gesammtheit von n Geraden, die von diesem Punkt ausgehen.*

Eine einfache Curve n^{ter} *Ordnung kann ausser einem* $(n-1)$*-fachen Punkt nicht auch noch einen Doppelpunkt haben.*

Eine einfache Curve n^{ter} *Ordnung kann nicht mehr als* $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ *Doppelpunkte haben.*

Wenn eine einfache Curve n^{ter} *Ordnung gewöhnliche vielfache Punkte von den Ordnungen* $r_1, r_2, \ldots, r_\nu$ *hat, so ist*

$$\sum_{i=1}^{i=\nu} \frac{r_i(r_i-1)}{2} \leqq \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Zu allen diesen Theoremen lassen sich correlative Sätze aufstellen.

Die sämmtlichen unendlich vielen Curven n^{ter} *Ordnung, die durch*

$$\tfrac{1}{2}n(n+3)-1$$

gegebene Punkte gehen, gehen auch durch

$$\tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

andere durch die gegebenen Punkte bestimmte Punkte.

Wenn von den n^2 *gemeinschaftlichen Punkten zweier Curven* n^{ter} *Ordnung* nm, $(m < n)$ *auf einer Curve* m^{ter} *Ordnung liegen, so gehören die* $n(n-m)$ *übrigen Punkte einer Curve von der Ordnung* $n-m$ *an.*

Die grösste Anzahl von Punkten, die man willkürlich auf einer Curve m^{ter} *Ordnung annehmen kann, wenn eine einfache Curve* n^{ter} *Ordnung* $(n > m)$ *durch sie gelegt werden soll, beträgt:* $nm - \frac{1}{2}(m-1)(m-2)$, (*das Jacobi'sche Theorem, Crelle,* 15).

Alle Curven n^{ter} Ordnung, welche durch $nm - h$ Punkt *einer Curve m^{ter} Ordnung und durch*

$$n(n-m) - h'$$

Punkte einer Curve $(n-m)^{ter}$ Ordnung gelegt werden, schneide *die erste Curve in anderen h festen Punkten und die zweite i* *anderen h' festen Punkten.* Das *Plücker*'sche Theorem, *Theori* *der algebraischen Curven,* Bonn, 1839, p. 11.

Jede Curve n^{ter} Ordnung, die durch

$$nm - \tfrac{1}{2}(m-1)(m-2)$$

Punkte einer zweiten Curve m^{ter} Ordnung geht $(m<n)$, schneid *diese auch noch in anderen $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ festen Punkte* *Jede beliebige Curve n^{ter} Ordnung, die durch*

$$mm' - \tfrac{1}{2}(m+m'-n-1)(m+m'-n-2)$$

Schnittpunkte zweier Curven von den Ordnungen m, m' gelegt wir *(wobei m sowohl als m' nicht grösser als n sind), geht auch durc* *alle übrigen diesen Curven gemeinschaftliche Punkte.* Das *Cayley* sche Theorem, *Cambr. Math. Journ.,* 3, 1843.

Wenn in den Punkten, in welchen eine Curve n^{ter} Ordnun *von einer Geraden geschnitten wird, die Tangenten an die Cur* *gezogen werden, so schneiden sie die Curve noch in andere* *$n(n-2)$ Punkten, die auf einer Curve $(n-2)^{ter}$ Ordnun* *liegen (Poncelet).*

Ein namentlich für die sogenannte Geometrie auf ein algebraischen Curve (vergl. § 4) wichtiges Theorem ist d Noether'sche:

Es mögen zwei Curven $\varphi = 0$, $\psi = 0$ vorliegen; ein *ihrer Schnittpunkte P_i sei mehrfach von der Ordnung q_i für* *und der Ordnung r_i für ψ; es sei ferner $q_i \leqq r_i$ und $f = 0$ ei* *Curve, welche durch jeden der Schnittpunkte von φ und ψ ge* *und in P_i einen mehrfachen Punkt von der Ordnung $q_i + r_i -$* *hat; alsdann lässt sich die Gleichung dieser Curve immer* *der Form*

$$f = A\varphi + B\psi = 0$$

ausdrücken, worin $A = 0$, $B = 0$ zwei andere Curven von en *sprechender Ordnung darstellen.*

Damit man f diese Gestalt geben könne, ist es jedoch nic *nöthig, dass f in P_i einen mehrfachen Punkt von der Ordnu* *$q_i + r_i - 1$ habe; dagegen muss P_i für f mehrfach wenigste* *von der Ordnung q_i (der kleineren der beiden Ordnunge*

ein; in dem letzteren Fall müssen zwischen den Coefficienten der Gleichung $f = 0$ lineare Relationen bestehen.

Ueber diesen Satz siehe Noether, *Math. Ann.*, 6, p. 352; Halphén, *Bull. de la Soc. math.*, 5; Bacharach, *Math. Ann.*, 6; Voss, ib., 27; Cayley, ib., 30; Stickelberger, ib., id.; Noether, ib., id.; Zeuthen, ib., 31; Guccia, *Compt. Rend.*, 1888; Bertini, *Math. Ann.*, 34, 35; Rend. Ist. Lomb., (2), 24, 1891 und Andere. Wir verweisen auch auf die *Geom.* von Clebsch-Lindemann.

Ein k-facher Punkt kann als die Vereinigung von $\frac{k(k-1)}{2}$ Doppelpunkten und eine k-fache Tangente als die Vereinigung von $\frac{(k-1)}{2}$ Doppeltangenten angesehen werden.

Eine Tangente an eine Curve n^{ter} Ordnung hat ausser dem Berührungspunkt noch andere $n-2$ Punkte mit der Curve gemeinschaftlich; von einem Punkt einer Curve n^{ter} Classe aus lassen sich an die Curve ausser der in diesem Punkt berührenden Tangente noch $n-2$ andere Tangenten an die Curve ziehen.

Die beiden Tangenten in einem Doppelpunkt können reell und verschieden oder imaginär sein oder zusammenfallen. In dem zweiten Fall erhält man den sogenannten *isolirten Doppelpunkt*, in dem dritten den *Rückkehr-, Cuspidal- oder stationären Punkt (Spitze)*.

Die Tangente in dem Cuspidalpunkt (die Cuspidaltangente) zählt für drei der Tangenten, die sich von diesem Punkt aus an die Curve ziehen lassen.

Correlativ zu dem Cuspidalpunkt nennt man eine *Wende-, Inflexions- oder stationäre Tangente* an die Curve eine solche, welche die Curve noch in $n-3$ anderen Punkten schneidet, deren Berührungspunkt also als Vereinigung von drei unendlich nahen Punkten anzusehen ist. Ein solcher Berührungspunkt heisst *Inflexionspunkt (Wendepunkt) der Curve.* Die Inflexionstangente kann als eine Doppeltangente aufgefasst werden, deren Berührungspunkte zusammenfallen; bei dieser Anschauungsweise muss man jedoch die Curve als Enveloppe von Tangenten betrachten.

Die vielfachen Punkte und vielfachen Tangenten heissen im Allgemeinen *singuläre Punkte und Tangenten.*

Es ist jedoch zu beachten, dass ein Doppelpunkt oder ein Cuspidalpunkt nur dann als *Singularität* anzusehen ist, wenn die Curve als Ort von Punkten und nicht als Enveloppe von Tan-

genten betrachtet wird, weil in dem letzteren Fall jede Enveloppe immer eine gewisse Anzahl von Doppelpunkten besitzt. Ebenso ist eine Doppel- oder eine Inflexionstangente nur dann eine *Singularität*, wenn die Curve als Enveloppe und nicht als Punktort aufgefasst wird.

Es sei n die Ordnung einer Curve, ν ihre Classe, d die Anzahl der Doppelpunkte, r die Anzahl der Rückkehr- oder Cuspidalpunkte, τ die der Doppeltangenten und ι die Anzahl der Wendetangenten.

Alsdann bestehen zwischen diesen Zahlen vier bemerkenswerthe Relationen, welche die Plücker'schen Formeln (Crelle, 12) genannt werden:

$$\begin{aligned}
\nu &= n(n-1) - 2d - 3r,\\
n &= \nu(\nu-1) - 2\tau - 3\iota,\\
\iota &= 3n(n-2) - 6d - 8r,\\
r &= 3\nu(\nu-2) - 6\tau - 8\iota.
\end{aligned}$$

Aus diesen Formeln, von welchen jede die Folge der drei übrigen ist, ergeben sich die weiteren Beziehungen:

$$3(\nu - n) = \iota - r,$$

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} - d - r = \frac{(\nu-1)(\nu-2)}{2} - \tau - \iota.$$

Bei einer allgemeinen Ort-Curve, d. h. einer solchen ohne Doppel- und Cuspidalpunkte wird die Classe, die Anzahl der Inflexions- und der Doppeltangenten durch die Relationen

$$\begin{aligned}
\nu &= n(n-1),\\
\iota &= 3n(n-2),\\
\tau &= \tfrac{1}{2}n(n-2)(n^2-9)
\end{aligned}$$

bestimmt und correlativ.

Sind d Doppelpunkte und r Cuspidalpunkte vorhanden, so ist die Anzahl der Doppeltangenten

$$\tau = \tfrac{1}{2}n(n-2)(n^2-9) - (2d+3r)[n(n-1)-6] + 2d(d-1) + \tfrac{9}{2}r(r-1) + 6dr.$$

Führt man den Begriff des sogenannten *Geschlechts einer Curve*, Riemann, Crelle, 54; Clebsch, ib., 63, 64 ein, so nehmen die Plücker'schen Formeln eine andere Gestalt an.

Man setze

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d - r$$
$$= \frac{(\nu-1)(\nu-2)}{2} - \tau - \iota.$$

Die Zahl p wird alsdann das *Geschlecht* der Ort-Curve und der Enveloppen-Curve genannt. *Sie stellt die Differenz zwischen der grössten Anzahl von Doppel- und Cuspidalpunkten dar, welche die Ort-Curve, ohne zu zerfallen, haben kann, und der Anzahl dieser Punkte, welche sie wirklich hat;*

oder: *die Differenz zwischen der Summe der grössten Anzahl von Doppel- und Wendetangenten, welche die Enveloppen-Curve haben kann, und der Anzahl der wirklich vorhandenen.*

Die Plücker'schen Formeln werden dann:

$$2p - 2 = \nu + r - 2n,$$
$$= n + \iota - 2\nu,$$
$$= n(n-3) - 2(d+r),$$
$$= \nu(\nu-3) - 2(\tau+\iota).$$

In den Plücker'schen Formeln wird zwischen reellen und imaginären singulären Punkten und Tangenten kein Unterschied gemacht. Es besteht jedoch auch zwischen den reellen Singularitäten eine Relation. Siehe darüber Klein, *Math. Ann.*, 10, Perrin, *Bull. de la soc. math.*, 6.

Das Geschlecht p kann für eine einfache Curve nur Null oder positiv sein.

Eine Curve vom Geschlecht Null heisst *rational oder unicursal* (Cayley); *die Coordinaten ihrer Punkte lassen sich als rationale Funktionen eines Parameters ausdrücken. Sie hat $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Doppel- und Cuspidalpunkte.*

Von den $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Doppel- und Cuspidalpunkten einer Curve vom Geschlecht Null können höchstens $\frac{3}{2}(n-2)$ Cuspidalpunkte sein.

Der Begriff „Geschlecht" wurde von Riemann, l. c. eingeführt und von Clebsch, l. c. auf die Geometrie angewendet. Cayley gebraucht statt des Ausdrucks *„Geschlecht"* das Wort *„Defect"*, *London math. soc.*, 1865.

In Bezug auf die Form einer Curve, d. h. die durch ihre sämmtlichen reellen Punkte gebildete Figur sind einige Grundbegriffe die folgenden: Eine Curve kann aus verschiedenen Zügen

bestehen, wobei unter einem Zuge einer Curve die Gesammtheit aller reellen Punkte dieser Curve verstanden wird, die derart sind, dass man continuirlich mit Einschluss des Durchgangs durch die Unendlichkeit von dem einen Punkt zu dem anderen gelangen kann; so bilden z. B. die beiden Theile einer Hyperbel nach unserer Anschauung nur *einen* Zug.

Ein Zug einer Curve kann paar oder unpaar sein, je nachdem er von einer Geraden in einer geraden oder ungeraden Anzahl von reellen Punkten geschnitten wird. *Ein unpaarer Zug lässt sich durch Deformation einer Geraden und ein paarer Zug durch Deformation eines Kegelschnitts erzeugen.*

Zwei unpaare Züge schneiden sich immer; daraus folgt:

Eine Curve ohne Doppelpunkte kann höchstens nur einen unpaaren Zug enthalten; und speciell:

Eine Curve ohne Doppelpunkte und von ungerader Ordnung enthält immer einen unpaaren Zug; ist sie dagegen von gerader Ordnung, so enthält sie keinen solchen Zug.

Diese Unterscheidungen stammen von Staudt, *Geom. der Lage,* Nürnberg 1847; siehe auch Klein, *Math. Ann.,* 6; Zeuthen ib., 7; u. s. w.

Eine Curve vom Geschlecht p kann nicht mehr als $p+1$ Züge haben; wenn $(n-1)(n-2)$ gleich oder grösser als p ist, so existiren immer Curven n^{ter} Ordnung, die $p+1$ Züge haben, Harnack, *Math. Ann.,* 10. Vergl. Hilbert, *Ueber die reellen Züge algebraischer Curven, Math. Ann.,* 38.

Wir wollen jetzt einige Formeln mittheilen, die der analytischen Geometrie der algebraischen ebenen Curven zu Grunde liegen.

Wir nehmen an, die Gleichung der Curve sei entweder in Cartesischen oder in projectiven homogenen Coordinaten gegeben.

In dem ersten Fall setzen wir voraus, alle Terme von Grad Null, eins, zwei, ... in den Coordinaten seien zusammengefasst und die Gleichung habe mithin die Gestalt

$$f = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = 0,$$

worin im Allgemeinen u_r ein ganzer homogener Ausdruck in den beiden Coordinaten x und y ist.

In dem zweiten Fall nennen wir die drei homogenen Coordinaten x_1, x_2, x_3; wir können dann die Gleichung in die Form

$$f = u_0 x_3^n + u_1 x_3^{n-1} + \cdots + u_n = 0$$

oder bei Anwendung der Principien der Symbolik der ternären Formen (siehe Bd. 1, Kap. 12) in die symbolische Form

$$f = a_x^n = b_x^n = c_x^n = \cdots = 0 \quad \text{bringen.}$$

Ist $u_0 = 0$, so geht die Curve (in dem ersten Fall) durch den Coordinatenanfang oder (in dem zweiten Fall) durch die Ecke ($x_1 = 0$, $x_2 = 0$) des Fundamentaldreiecks der Coordinaten. In diesem Fall stellt die Gleichung $u_1 = 0$ die Tangente in diesem Punkt (dem Coordinatenanfang bez. der Dreiecksecke) dar. Ist $u_0 = 0$, $u_1 = 0$, so ist derselbe Punkt ein Doppelpunkt für die Curve f; die beiden Tangenten in diesem Doppelpunkt sind durch $u_2 = 0$ gegeben. Ist u_2 ein vollständiges Quadrat, ohne dass seine Basis, d. h. $\sqrt{u_2}$ ein rationaler Factor von u_3 ist, so wird der nämliche Punkt eine Spitze; ist dagegen $\sqrt{u_2}$ ein rationaler Factor von u_3, so ist der Punkt kein Cuspidalpunkt in dem eigentlichen Sinn, sondern ein Punkt, in dem die Curve sich selbst berührt (ein Selbstberührungspunkt, tacnodo, close-point), welcher als die Vereinigung zweier Doppelpunkte zu betrachten ist; in diesem Fall hat die Tangente vier unendlich nahe gelegene Schnittpunkte mit der Curve gemeinschaftlich und nicht nur drei, wie bei dem Cuspidalpunkt.

Wenn im Allgemeinen $u_0 = u_1 = \cdots = u_{r-1} = 0$ ist, so wird der Coordinatenanfang ein r-facher Punkt von $f = 0$, und die in ihm an die Curve gezogenen r Tangenten sind durch $u_r = 0$ bestimmt.

Liegt ein Doppelpunkt vor, so müssen die drei Derivirten von f nach x_1, x_2, x_3 Null sein, d. h. die Coordinaten des Doppelpunkts müssen den drei Gleichungen

$$a_x^{n-1} a_1 = a_x^{n-1} a_2 = a_x^{n-1} a_3 = 0 \quad \text{genügen.}$$

Eliminirt man die x aus den drei Gleichungen, so ergibt sich eine Gleichung

$$R = 0,$$

worin R eine invariante Bildung der Coefficienten der Gleichung der Curve ist.

Diese Invariante heisst *Discriminante der Curve. Ihr Verschwinden ist die nothwendige und ausreichende Bedingung dafür, dass f einen Doppelpunkt habe.*

Abgesehen von älteren speciellen Arbeiten sind die ersten systematischen Forschungen über die allgemeine Theorie der Curven in der *Introductio in anal. infin.* von Euler, 1748 und

der *Introduction à l'anal. des lignes courbes algebr.*, Genevae 1750 von Cramer enthalten. Euler, *Sur une contradiction apparente dans la doctrine des courbes*, Berl. Ak., 1748 verdankt man auch die Erklärung des scheinbaren Widerspruchs, dass zwei Curven n^{ter} Ordnung sich in einer grösseren Anzahl von Punkten schneiden, als zur Bestimmung einer der Curven nöthig sind.

Auf sie folgten, wenn man von Lamé, Gergonne etc. absieht, die sehr wichtigen Arbeiten Plücker's: *System der analyt. Geom.*, Berlin 1835; *Die Theorie der algebraischen Curven*, 1839 und andere Abhandlungen desselben Autors in dem *Journ. de Liouville*, 1834, 1837, in denen Plücker die berühmten Formeln entwickelte, die seinen Namen führen.

Für die Lehre von den singulären Punkten sind von Bedeutung: Puiseux, *Journ. de Liouville*, 1850; Cayley, *Quart. Journ.*, 7, 11; Crelle, 64, etc.; Halphén, *Mém. des sav. étrang.*, 26; *Compt. rend.*, 78, 80; Stolz, *Math. Ann.*, 8, etc.

Eine grundlegende Arbeit über die allgemeine Theorie der Curven war die *Introduzione a una teoria geometrica delle curve piane* von Cremona, Bologna 1862, auch in *Bologna, Acc. Mem.*, 12, 1861, deutsch von M. Curtze, separate Ausg. 1865. Alle Hauptresultate findet man systematisch geordnet und auch auf analytische Art entwickelt in den bekannten Büchern von Salmon, *Treatise on the higher plane curves*, das in verschiedene Sprachen übersetzt wurde (vergl. das Namenregister), und von Clebsch-Lindemann, *Vorlesungen über Geometrie*. In den folgenden Paragraphen werden wir weitere historische und literarische Angaben in Bezug auf die dort behandelten Gegenstände machen.

§ 2. Die Theorie der Polarität. Covariante Curven.

Wenn eine symbolisch durch

$$f = a_x^n = b_x^n = \cdots = 0 \quad \text{(siehe Bd. 1, Kap. 12)}$$

dargestellte Curve gegeben ist, so heissen die durch

$$a_x^{n-1} a_y = 0,$$
$$a_x^{n-2} a_y^2 = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$a_x a_y^{n-1} = 0$$

argestellten Curven bez. die *erste, zweite, ... Polare* des Pols y n Bezug auf die gegebene Curve. Die linken Seiten dieser leichungen ergeben sich, wenn man auf f ein-, zwei-, ··· mal en sogenannten Polarenprocess ausübt, der in unserem Fall (in em *ternären Gebiet*) bis auf einen Zahlenfactor durch das ymbol

$$\Delta = y_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + y_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

argestellt wird (siehe Bd. 1, p. 263, 264).

Wenn von dem Punkt y aus eine Gerade gezogen wird, welche die Curve in n Punkten schneidet, so trifft diese Gerade die erste, zweite, ... Polare von y in den harmonischen Mittelpunkten $(n-1)^{\text{ter}}$, $(n-2)^{\text{ter}}$, ... Ordnung von y in Bezug auf die Gruppe der n Schnittpunkte.

Diese Eigenschaft könnte man der Definition der Polarcurven zu Grunde legen.

Wenn der Punkt y auf der r^{ten} Polaren von z liegt, so ist z auf der $(n-r)^{\text{ten}}$ Polaren von y gelegen.

Liegt der Pol y auf der gegebenen Curve, so gehen seine sämmtlichen Polarcurven durch ihn und berühren in ihm die gegebene Curve.

Die $(n-1)^{\text{te}}$ Polare (Polargerade) eines Punkts, welcher der Fundamentalcurve angehört, ist die Tangente in diesem Punkt.

Die $n(n-1)$ Punkte, in denen die erste Polare eines Punkts y die gegebene Curve schneidet, sind die Berührungspunkte der von y an die gegebene Curve gezogenen Tangenten.

Ein r-facher Punkt der Fundamentalcurve ist vielfach von der Ordnung $r-s$ für die s^{te} Polare eines beliebigen Pols.

Wenn eine Curve in eine Gerade und in eine andere Curve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung zerfällt, so besteht die erste Polare eines Punkts der Geraden aus dieser Geraden und der ersten Polaren in Bezug auf die Curve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung.

Die r^{te} Polare eines Punkts O_r in Bezug auf die s^{te} Polare eines Punkts O_s fällt mit der s^{ten} Polare von O_s bez. der r^{ten} Polaren von O_r zusammen.

Wenn die Fundamentalcurve einen Doppelpunkt D hat, so geht die erste Polare eines willkürlichen Pols O durch D und hat dort die in Bezug auf die beiden Tangenten im Doppelpunkt mit DO harmonisch conjugirte Gerade zur Tangente. Ist der Doppelpunkt ein Cuspidalpunkt, so ist die Tangente an die erste Polare die Cuspidaltangente selbst.

Die ersten Polaren aller Punkte einer Geraden bilden ein Büschel von Curven mit denselben $(n-1)^2$ Grundpunkten.

Der Polarkegelschnitt eines Doppelpunkts zerfällt in zwei Gerade, welche die beiden Tangenten im Doppelpunkt sind.

Der Polarkegelschnitt eines Inflexionspunkts zerfällt in zwei Gerade, von denen die eine die Inflexionstangente ist.

Wenn ein Punkt der Fundamentalcurve das System zweier Geraden zum Polarkegelschnitt hat, so ist er entweder ein Doppel- oder ein Inflexionspunkt der Fundamentalcurve.

Wenn der Pol eine Curve m^{ter} Ordnung durchläuft, so hüllt die Polargerade eine Curve $m(n-1)^{\text{ter}}$ Classe ein.

Auf jeder Geraden gibt es $2(n-2)$ Punkte, deren erste Polaren von der Geraden berührt werden; die Polarkegelschnitte der Berührungspunkte berühren diese Gerade.

Ein Pol, der mit n Punkten einer Curve n^{ter} Ordnung in einer Geraden liegt, hat die nämliche Polargerade in Bezug auf die Curve und in Bezug auf das System der n Tangenten in den n Punkten.

Die Polargerade eines in einer bestimmten Richtung unendlich fernen Punkts heisst *Durchmesser der Curve n^{ter} Ordnung.*

Jeder Durchmesser ist der Ort der Centren der mittleren Abstände (vergl. Kap. 2, § 2) *aller Systeme von n Punkten, die auf der Curve durch ein System paralleler Sehnen ausgeschnitten werden.*

Betrachtet man die Curve als Enveloppe ν^{ter} Classe, so heisst der Pol der unendlich fernen Geraden *Centrum.*

Das Centrum ist die Enveloppe (als Punkt) der Geraden, welche parallel zu einem System von ν einander parallelen Tangenten an die Curve sind, wenn diese Geraden durch das Centrum der mittleren Abstände der ν Punkte gelegt werden, welche die ν Tangenten auf einer zu ihnen senkrechten Geraden bestimmen.

Wenn von einem Punkt O zwei Gerade gezogen werden, welche die Curve in den Punkten

$$R_1, R_2, \ldots, R_n;\ S_1, S_2, \ldots, S_n$$

schneiden, so ist das Verhältniss

$$\frac{OR_1 \ldots OR_n}{OS_1 \ldots OS_n}$$

constant, wie man auch den Punkt O wählen mag, wenn nur die Richtung der beiden Transversalen dieselbe bleibt. Das Newton'sche Theorem, Enum. lin. tertii ordinis, London 1711.

Man habe ein Polygon $ABC\ldots$, dessen Seiten eine Curve
er Ordnung in n Punkten schneiden; bezeichnet man mit $(B)_1$,
$)_2$ die Producte der von B bis zu den n Punkten gerechneten,
z. auf den Seiten BC, BA entstehenden Segmente, mit $(C)_1$,
$)_2$ die analogen Producte etc., *so besteht die Relation*

$$(A)_1(B)_1(C)_1\cdots = (A)_2(B)_2(C)_2\cdots,$$

as *Carnot*'sche Theorem, *Géom. de position*, p. 437.

Wenn auf jeder durch einen Punkt O gezogenen Geraden,
elche die Curve in $R_1, R_2, \ldots, R_n$ schneidet, ein Punkt R der-
rt bestimmt wird, dass

$$\frac{n}{OR} = \frac{1}{OR_1} + \frac{1}{OR_2} + \cdots$$

t, oder dass

$$\sum_1^n \left(\frac{1}{OR} - \frac{1}{OR_i}\right) = 0$$

ird, so ist der Ort von R eine Gerade. Das Cotes'sche Theorem,
Iarmonia mensurarum, Cambridge 1722. *Diese Gerade ist die*
olare von O.

Aehnlich gilt der Satz: *Der Polarkegelschnitt des Punkts O*
t der Ort eines Punkts R, welcher der Relation genügt:

$$\sum_{ij} \left(\frac{1}{OR} - \frac{1}{OR_i}\right)\left(\frac{1}{OR} - \frac{1}{OR_j}\right) = 0, \text{ etc.}$$

Man ziehe durch einen Punkt O eine Gerade, welche die
urve in n Punkten schneidet und lege durch diese n Punkte
ie Tangenten an die Curve; *wenn dann durch O eine beliebige*
ndere Transversale gezogen wird, welche die Curve in $R_1, \ldots, R_n$
nd die Tangenten in $r_1, \ldots, r_n$ trifft, so ist

$$\sum_1^n \frac{1}{OR_i} = \sum_1^n \frac{1}{Or_i}$$ *(das Maclaurin'sche Theorem).*

Wir führen jetzt drei wichtige covariante Curven ein, die
Hesse'sche, Steiner'sche oder *Kerncurve* und die Cayley'sche.

Der Ort der Doppelpunkte der ersten Polaren der Punkte
ler Ebene ist die Hesse'*sche* und der Ort der Punkte, deren
erste Polaren einen Doppelpunkt haben, die Steiner'*sche Curve*.

Die Punkte dieser beiden Curven entsprechen sich ein-eindeutig. Die Enveloppe der Geraden, die einen Punkt der Steiner'schen mit dem entsprechenden Punkt der Hesse'schen Curve verbinden, ist schliesslich die Cayley'*sche Curve.*

Wenn in symbolischer Bezeichnung (vergl. Bd. 1, Kap. 12)

$$f = a_x^n = b_x^n = c_x^n = \cdots = 0$$

die Gleichung der gegebenen Curve ist, *so lautet die Gleichung der Hesse'schen:*

$$(abc)^2 a_x^{n-2} b_x^{n-2} c_x^{n-2} = 0,$$

oder wenn $f_{ij} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ *gesetzt wird:*

$$\begin{vmatrix} f_{11}, & f_{12}, & f_{13} \\ f_{21}, & f_{22}, & f_{23} \\ f_{31}, & f_{32}, & f_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Die Gleichung der Steiner'schen Curve erhält man dann durch Elimination von x aus den drei Gleichungen

$$a_x^{n-2} a_y a_1 = 0,$$
$$a_x^{n-2} a_y a_2 = 0,$$
$$a_x^{n-2} a_y a_3 = 0.$$

Die hier folgende Zusammenstellung gibt die Werthe der Plücker'schen Zahlen (Ordnung, Classe, etc.) für diese drei Curven an.

Es wird vorausgesetzt, die gegebene Curve sei allgemein, d. h. besitze keine Doppel- und Cuspidalpunkte, und sie sei von der Ordnung n.

I. Die Hesse'sche Curve.

Geschlecht $= \frac{1}{2}(3n - 7)(3n - 8)$,
Ordnung $= 3(n - 2)$,
Classe $= 3(n - 2)(3n - 7)$,
Doppelpunkte $= 0$,
Cuspidalpunkte $= 0$,
Doppeltangenten $= \frac{27}{2}(n - 1)(n - 2)(n - 3)(3n - 8)$,
Wendetangenten $= 9(n - 2)(3n - 8)$.

II. Die Steiner'sche Curve.

chlecht $= \frac{1}{2}(3n - 7)(3n - 8)$,
nung $= 3(n - 2)^2$,
sse $= 3(n - 1)(n - 2)$,
ppelpunkte $= \frac{3}{2}(n - 2)(n - 3)(3n^2 - 9n - 5)$,
pidalpunkte $= 12(n - 2)(n - 3)$,
ppeltangenten $= \frac{3}{2}(n - 2)(n - 3)(3n^2 - 3n - 8)$,
ndetangenten $= 3(n - 2)(4n - 9)$.

III. Die Cayley'sche Curve.

schlecht $= \frac{1}{2}(3n - 7)(3n - 8)$,
dnung $= 3(n - 2)(5n - 11)$,
sse $= 3(n - 1)(n - 2)$.
ppelpunkte $= \frac{9}{2}(n - 2)(5n - 13)(5n^2 - 19n + 16)$,
spidalpunkte $= 18(n - 2)(2n - 5)$,
ppeltangenten $= \frac{9}{2}(n - 2)^2(n^2 - 2n - 1)$,
endetangenten $= 0$.

Wenn die gegebene Curve Doppel- und Cuspidalpunkte hat, sind an dieser Tabelle Aenderungen vorzunehmen.

Für $n = 3$ verlieren die Formeln für die Cayley'sche Curve re Gültigkeit; in diesem Fall sind die Hesse'sche und Steiner'ne Curve eine und dieselbe Curve 3ter Ordnung, die Cayley'sche statt von der 6ten Classe nur von der 3ten, statt 12ter nur er Ordnung und hat anstatt 18 Cuspidalpunkte nur 9.

Von der Hesse'schen, Steiner'schen und Cayley'schen Curve ssen sich verschiedene Definitionen geben, die ebenso vielen ecifischen Eigenschaften entsprechen.

Die Hesse'sche Curve einer Curve ist:

a) *der Ort eines Punkts, in welchem sich zwei (und mithin nendlich viele) erste Polaren berühren;*

b) *der Ort der Doppelpunkte der ersten Polaren;*

c) *der Ort eines Pols, dessen Polarkegelschnitt in zwei erade zerfällt;*

d) *der Ort eines Pols, dessen Polargeraden in Bezug auf ie ersten Polaren der Curve sich in demselben Punkt treffen.*

Die Steiner'sche Curve einer Curve ist:

a) *der Ort der Pole der ersten mit Doppelpunkten versehenen olaren;*

b) *der Ort der Schnittpunkte der Paare von Geraden, welc Polarkegelschnitte darstellen;*

c) *die Enveloppe der Polargeraden der Punkte der Hess schen Curve;*

d) *der Ort der Punkte, deren erste Polaren die Hesse'sc Curve berühren;*

e) *Der Ort eines Punkts, in welchem sich die Polargerad eines und desselben Pols in Bezug auf die ersten Polaren d Fundamentalcurve schneiden.*

Die Cayley'sche Curve einer Curve ist:

a) *die Enveloppe der Geraden, welche die sich entsprech den Punkte der Hesse'schen und Steiner'schen Curve verbind*

b) *die Enveloppe der in den Berührungspunkten der erst Polaren gemeinschaftlichen Tangenten.*

In einem Doppelpunkt der Fundamentalcurve hat auch Hesse'sche Curve einen Doppelpunkt mit denselben Tangenten.

In einem Cuspidalpunkt der Fundamentalcurve hat Hesse'sche Curve einen dreifachen Punkt und zwei ihrer Zi berühren die Cuspidaltangente; in diesem Punkt sind acht Schn punkte der Curve mit der Hesse'schen als vereinigt zu betracht

Die Hesse'sche Curve geht durch die Inflexionspunkte Fundamentalcurve.

Die Steiner'sche sowohl als die Cayley'sche Curve berüh die Inflexionstangenten der Fundamentalcurve.

Die Hesse'sche Curve berührt in jedem beliebigen ihrer Pun die zweite Polare des entsprechenden Punkts der Steiner'sc Curve.

Die Tangente in einem Punkt O der Hesse'schen Curve die harmonische Conjugirte der Geraden, welche O mit dem sprechenden Punkt O′ der Steiner'schen Curve verbindet, in Be auf die beiden Geraden, welche die erste Polare von O′ in d Doppelpunkt berühren; und die Tangente in O′ an die Stein sche Curve ist die harmonische Conjugirte von O′O in Bezug die beiden Geraden, in welche der Polarkegelschnitt von O generirt.

Die Anfänge der Polarentheorie finden sich in den Arbei von Newton, Cramer und Anderen über die geradlinigen krummlinigen Durchmesser der Curven. Bobillier verda man allgemeinere Begriffe, *Ann. de Gergonne*, 18, 19, 18 Auf ihn folgten Plücker, *Crelle*, 5; Grassmann, *Crelle*, De Jonquières, *Journ. de Liouville*, 1857; Cayley, *P*

ins., 148. Später legte Cremona in seiner citirten *Introione* die Polarentheorie der ganzen Lehre von den Curven Grund.

Die Hesse'sche Curve wurde von Hesse, *Crelle*, 28, 41 geführt und erhielt ihren Namen von Sylvester, *Phil. Trans.*, 3; die Steiner'sche rührt von Steiner, *Crelle*, 47 her und rde von Cremona, *Intr.*, so benannt, während Steiner selbst *Kerncurve* nannte; die Cayley'sche Curve, von Cayley für Curven dritter Ordnung eingeführt, *Philosophical transactions the Royal society of London*, Vol. 147, 1857 = *Coll. Math.* p., 2, p. 381, wurde von Steiner, *Crelle*, 47 studirt. Wichtig die Clebsch'sche Arbeit, *Crelle*, 64 über die Steiner'sche rve.

Viele Autoren haben den Versuch gemacht, den Satz zu weisen, dass bei der Hesse'schen Curve, welche einer *allneinen* Curve entspricht, die singulären Punkte fehlen. Cremona hm ihn als Postulat an; Geiser, *Ann. di mat.*, 9 bewies ihn die Curven 4ter Ordnung. Andere hierher gehörige Arbeiten id von Del Pezzo, *Rend. Napoli*, 1883; Brill, *Math. Ann.*, ; Segre, *Rend. Lincei*, 1895; etc.

§ 3. Lineare Systeme ebener Curven.

Wenn $a_x^n = 0$, $b_x^n = 0, \cdots$ die Gleichungen von $k+1$ enen Curven n^{ter} Ordnung sind, so bildet das durch

$$\lambda_1 a_x^n + \lambda_2 b_x^n + \cdots = 0$$

rgestellte System, worin $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ willkürliche $k+1$ Paraeter sind, das, was man ein lineares System k^{ter} Stufe nennt. ür $k = 1$ ergibt sich das *Büschel*, für $k = 2$ das *Netz*, wenn e Curven in *Punktcoordinaten* ausgedrückt werden.

Sind dagegen die Gleichungen in *Geradencoordinaten* geben, so erhält man für $k = 1$ ein lineares System, welches *har* genannt wird.

Ein lineares System k^{ter} Stufe wird durch $k+1$ Curven ter Ordnung bestimmt, welche nicht demselben linearen System iedrigerer Stufe angehören.

Für $k > 1$ haben die Curven des Systems im Allgemeinen einen Punkt gemeinschaftlich (Grundpunkte); wenn jedoch die ämmtlichen $k+1$ Curven, welche das System individualisiren, inen Punkt gemeinschaftlich haben, so gehört dieser Punkt auch llen übrigen Curven des Systems an.

Für $k = 1$ gibt es immer n^2 Grundpunkte des Büsche d. h. Punkte, durch welche alle Curven des Systems gehen.

Die allgemeine Curve eines linearen Systems hat ausser d Grundpunkten keine vielfachen Punkte. Bertini, *Rend. I Lomb.*, (2), 15, 1882.

Ein lineares System von Curven n^{ter} Ordnung und k^{ter} St bestimmt auf einer Transversalen eine Involution von Punk n^{ter} Ordnung und k^{ter} Stufe, siehe Kap. 2, § 3.

Unter den Curven eines linearen Systems gibt es $(k+1)(n-$ solche, welche eine Berührung k^{ter} Ordnung mit einer gegeben Geraden (d. h. $k+1$ unendlich nahe Punkte mit ihr geme schaftlich) haben.

Es gibt

$$\frac{2^k(n-k)(n-k-1)\cdots(n-2k+1)}{k!}$$

Curven eines linearen Systems, von welchen jede eine gegeb Gerade k-mal berührt.

Von den Curven eines Büschels berühren $2(n-1)$ e gegebene Gerade, und $m(2n+m-3)$ berühren eine gegeb Curve m^{ter} Ordnung ohne Doppelpunkte und Spitzen. Hat d letztere d Doppelpunkte und r Spitzen, so sind von dieser Z noch $2d+3r$ Curven abzuziehen.

Unter den Curven eines Netzes gibt es $3(n-2)$ von Art, dass für jede von ihnen eine gegebene Gerade Inflexio tangente ist.

Wenn man die beiden Strahlenbüschel betrachtet, wel zwei von den n^2 Grundpunkten eines Büschels von Curven n^{ter} C nung zu Mittelpunkten haben, und wenn man die beiden Strah welche die in diesen beiden Grundpunkten an eine und diese Curve des Büschels gezogenen Tangenten sind, als einander e sprechend ansieht, *so sind die beiden Strahlenbüschel projec mithin ist das anharmonische Verhältniss der vier Tangenten vier Curven des Büschels in einem und demselben Grundpu identisch mit dem der vier Tangenten in einem beliebigen ande Grundpunkt.* Dieses anharmonische Verhältniss kann man da *das anharmonische Verhältniss der vier Curven des Büsc* nennen.

Unter den Curven eines Büschels, welche sich sämmtlich einem Grundpunkt P berühren, gibt es eine, für welche P Inflexionspunkt, und eine andere, für welche P ein Dop punkt ist.

Unter den Curven eines Büschels, von welchen ein Grund-
nkt P Doppelpunkt für alle Curven (mit verschiedenen und
n Curve zu Curve variabelen Tangenten) ist, gibt es zwei, für
lche P eine Spitze ist; wenn eine der beiden Tangenten allen
rven gemeinschaftlich ist, so gibt es nur eine von ihnen, für
lche P eine Spitze ist; und wenn beide Tangenten fest liegen,
gibt es eine Curve des Büschels, für welche P ein dreifacher
nkt ist.

In einem Büschel existiren im Allgemeinen $3(n-1)^2$ *Curven*
it Doppelpunkten.

Dieses Theorem unterliegt Modificationen, wenn die Curven
s Büschels mehrfache Punkte verschiedener Natur haben. Siehe
rüber Cremona, *Introduzione* etc. und *Ann. di mat.*, 7, 1864.

Sind drei Curven gegeben, deren Gleichungen

$$a_x^n = 0,$$
$$b_x^n = 0,$$
$$c_x^n = 0$$

uten, so besteht die Bedingung, damit sie demselben Büschel
ngehören, darin, dass ihre Functionaldeterminante

$$(abc)a_x^{n-1}b_x^{n-1}c_x^{n-1}$$

lentisch verschwinde. Siehe Gordan-Noether, *Math. Ann.* 10.

Wenn man von einem Punkt O die Tangenten an alle Curven
nes Büschels zieht, so liegen die Berührungspunkte auf einer
urve $(2n-1)^{\text{ter}}$ *Ordnung, welche durch O und durch die* n^2
rundpunkte des Büschels geht.

Die Doppelpunkte der Curven eines Büschels haben dieselbe
olargerade in Bezug auf alle Curven dieses Büschels.

Der Ort eines Punktes, in welchem sich zwei (und mithin
nendlich viele) Curven eines Netzes berühren, ist eine Curve
$3(n-1)^{\text{ter}}$ *Ordnung und heisst die Hesse'sche oder auch die*
Jacobi'sche Curve des Netzes. Ihre Gleichung lautet, wenn man
lie bekannten Bezeichnungen der Symbolik anwendet:

$$(abc)a_x^{n-1}b_x^{n-1}c_x^{n-1} = 0.$$

Sie ist eine Combinante (siehe Bd. 1, Kap. 12, § 13) *des*
Systems der drei Fundamentalcurven des Netzes; d. h. die linke
Seite ihrer Gleichung wird nur mit einem constanten Factor mul-

tiplicirt, wenn man statt einer der drei Curven eine linea Combination derselben substituirt.

Die Hesse'sche Curve eines Netzes ist der Ort der Doppe punkte der Curven des Netzes, oder auch der Ort der Punkt deren Polargerade in Bezug auf die Curven des Netzes sich einem Punkt treffen.

Der Ort der Punkte, in welchen sich die in Bezug auf d Curven des Netzes Polargeraden aller Punkte der Hesse'sch Curve schneiden, ist die sogenannte Steiner'sche Curve, u die Enveloppe der Geraden, welche die sich entsprechend Punkte der Hesse'schen und Steiner'schen Curve verbinden, d sogenannte Cayley'sche Curve.

Die Steiner'sche Curve ist von der Ordnung $3(n-1)^2$ *u die Cayley'sche von der Classe* $3n(n-1)$.

Betrachtet man das Netz der ersten Polaren in Bezug a eine gegebene Curve, so werden die Hesse'sche, Steiner'sche u Cayley'sche Curven dieses Netzes die gleichnamigen Curven b der gegebenen Fundamentalcurve. Siehe § 2.

Die Hesse'sche oder Jacobi'sche Curve des Netzes ist v

der Ordnung:	$3(n-1)$,
Classe:	$3(n-1)(3n-4)$,
dem Geschlecht:	$\frac{1}{2}(3n-4)(3n-5)$,
und hat Doppelpunkte:	0,
Spitzen:	0,
Doppeltangenten:	$\frac{27}{2}n(n-1)(n-2)(3n-5)$,
Inflexionstangenten:	$9(n-1)(3n-5)$.

Die Steiner'sche Curve des Netzes ist von

der Ordnung:	$3(n-1)^2$,
Classe:	$3n(n-1)$,
dem Geschlecht:	$\frac{1}{2}(3n-4)(3n-5)$,
und hat Doppelpunkte:	$\frac{3}{2}(n-1)(n-2)(3n^2-3n-11)$
Spitzen:	$12(n-1)(n-2)$,
Doppeltangenten:	$\frac{3}{2}(n-1)(n-2)(3n^2+3n-8)$,
Inflexionstangenten:	$3(n-1)(4n-5)$.

Die Cayley'sche Curve des Netzes ist von

der Ordnung:	$3(n-1)(5n-6)$,
Classe:	$3n(n-1)$,

m Geschlecht: $\frac{1}{2}(3n-4)(3n-5)$,
id hat Doppelpunkte: $\frac{9}{2}(n-1)(5n-8)(5n^2-9n+2)$,
pitzen: $18(n-1)(2n-3)$,
oppeltangenten: $\frac{9}{2}(n-1)(n^2-2)$,
nflexionstangenten: 0.

Falls alle Curven eines Netzes einen Punkt gemeinschaftlich ıben, hat eine von ihnen dort einen Doppelpunkt; und diejenigen, elche in diesem Punkt eine gegebene Gerade berühren, bilden ein üschel. Die Hesse'sche Curve geht durch denselben Punkt und t dort ebenfalls einen Doppelpunkt mit Tangenten, die mit denen r Curve zusammenfallen, welche dort den Doppelpunkt besitzt.

Wenn ferner alle Curven des Netzes einen gemeinschaftlichen unkt und in ihm dieselbe Tangente besitzen, so gibt es unter nen ein Büschel von Curven, für welche er ein Doppelpunkt, nd zwei Curven, für welche er eine Spitze ist. Die Hesse'sche urve hat in ihm einen dreifachen Punkt; zwei der Tangenten dem dreifachen Punkt fallen mit der gemeinschaftlichen Tanente zusammen.

Wenn alle Curven eines Netzes in einem festen Punkt einen -fachen Punkt haben, so ist dieser für die Hesse'sche Curve ein $3(r-1)$-facher Punkt.

Jeder Curve des Netzes, welche zwei Doppelpunkte besitzt, ntspricht ein Doppelpunkt der Steiner'schen Curve; mithin gibt s in dem allgemeinen Netz

$$\tfrac{3}{2}(n-1)(n-2)(3n^2-3n-11)$$

Curven mit zwei Doppelpunkten.

Aehnlich gibt es in dem allgemeinen Netz

$$12(n-1)(n-2)$$

Curven mit einer Spitze,

$$\tfrac{3}{2}(n-1)(n-2)(3n^2+3n-8)$$

Büschel von Curven, zwischen denen zwei Berührungen stattfinden, und

$$3(n-1)(4n-5)$$

Büschel von Curven, zwischen denen eine Berührung 2ter Ordnung (eine Osculations- oder dreipunktige Berührung) stattfindet, d. h. die drei unendlich nahe Punkte miteinander gemeinschaftlich haben.

Sämmtliche vorstehende Zahlen erleiden Veränderungen, wenn das Netz einfache oder mehrfache Grundpunkte (Basispunkte) hat, d. h. solche, durch welche alle Curven des Netzes gehen.

Ein Netz, dessen sämmtliche Curven sich zu je zweien *in einem einzigen beweglichen Punkt* schneiden, hat Cremona nach Sylvester *homaloidal* zu nennen vorgeschlagen, während Cayley es als *unicursal* bezeichnet.

Alle Curven eines homaloidalen Netzes sind vom Geschlecht Null.

Wenn $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_s$ *die Vielfachheiten der Basispunkte für jede Curve eines homaloidalen Netzes sind, so bestehen die Relationen:*

$$\sum_1^s \varrho_i^2 = n^2 - 1,$$

$$\sum_1^s \frac{\varrho_i(\varrho_i - 1)}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2},$$

$$\sum_1^s \frac{\varrho_i(\varrho_i + 1)}{2} = \frac{n(n+3)}{2} - 2,$$

$$\sum_1^s \varrho_i = 3(n-1).$$

Ein lineares System k^{ter} Stufe von Curven n^{ter} Ordnung heisst *vollständig*, wenn es durch die Basispunkte bestimmt ist, d. h. wenn es das lineare System aller Curven n^{ter} Ordnung ist, die mit gegebener Vielfachheit $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_s$ durch s bestimmte feste Punkte gehen.

Es bestehen dann die Fundamentalbeziehungen (Erweiterung der Formeln für das homaloidale Netz):

$$n^2 - \sum_1^s \varrho_i^2 = D \text{ (Grad)},$$

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} - \sum_1^s \frac{\varrho_i(\varrho_i - 1)}{2} = p \text{ (Geschlecht)},$$

$$\frac{n(n+3)}{2} - \sum_1^s \frac{\varrho_i(\varrho_i + 1)}{2} \leqq k \text{ (Dimension oder Stufe)}.$$

Der Grad D stellt die Anzahl der variabelen Schnitte zweier Curven des Systems dar.

Das System heisst *überreichlich* (*sovrabbondante*), wenn in der letzten Formel das Zeichen $<$, *regulär*, wenn das Zeichen $=$ zu nehmen ist.

Ein System ist regulär, wenn $D > 2p - 2$ oder $k > p$ ist. Siehe darüber Segre, *Rend. Palermo,* 1 und Castelnuovo, *m. Acc. Torino,* 1891.

Sind drei Curven von den Ordnungen n_1, n_2, n_3 gegeben, so sen sich für das System der drei Curven covariante Curven con- uiren, welche der Jacobi'schen und Steiner'schen Curve eines Netzes alog und für $n_1 = n_2 = n_3 = n$ ihnen gleich sind, und welche ch bei ungleichen Ordnungen diese Namen beibehalten können.

Die Jacobi'sche Curve des Systems dreier Curven ist von r Ordnung $n_1 + n_2 + n_3 - 3$ und der Ort der Punkte, deren olargeraden in Bezug auf die drei Curven sich in demselben nkt treffen. Der Ort dieses letzteren Punkts ist die Steiner'- he Curve und *ihre Ordnung*

$$n_1 n_2 + n_2 n_3 + n_3 n_1 - 2(n_1 + n_2 + n_3) + 3.$$

Die Jacobi'sche Curve der drei Curven ist auch der Ort r Punkte, in welchen sich die in Bezug auf die drei Curven sten Polaren desselben Punkts schneiden.

Wenn es Punkte giebt, die allen drei gegebenen Curven ge- einschaftlich sind, so gehen die Jacobi'sche und Steiner'sche Curve urch diese Punkte.

Die Jacobi'sche Curve geht auch durch die Doppelpunkte er gegebenen Curven.

Sind $\varphi(x) = a_x^{n_1} = 0$, $\psi(x) = b_x^{n_2}$, $\chi(x) = c_x^{n_3}$ die drei egebenen Curven, so lautet die Gleichung der Jacobi'schen Curve:

$$(abc)a_x^{n_1-1}b_x^{n_2-1}c_x^{n_3-1} = \frac{1}{n_1 n_2 n_3}\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, & \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, & \frac{\partial\varphi}{\partial x_3} \\ \frac{\partial\psi}{\partial x_1}, & \frac{\partial\psi}{\partial x_2}, & \frac{\partial\psi}{\partial x_3} \\ \frac{\partial\chi}{\partial x_1}, & \frac{\partial\chi}{\partial x_2}, & \frac{\partial\chi}{\partial x_3} \end{vmatrix} = 0.$$

Die Theorie der linearen Curvensysteme ist in letzter Zeit nach verschiedenen Richtungen hin studirt worden, soweit sie mit verschiedenen anderen geometrischen Lehren, wie mit der ein-eindeutigen Transformation, mit der Abbildung der Flächen auf eine Ebene und der sogenannten Geometrie der Punktgruppen auf einer algebraischen Curve in Verbindung steht; vergl. § 4.

Zwei Curvenbüschel lassen sich als in projectiver Zuordnung zu einander stehend ansehen und es ergibt sich dann der wichtige Satz, *dass jede algebraische Curve als der Ort der Schnittpunkte*

der sich entsprechenden Curven zweier projectiver Curvenbüsch betrachtet werden kann. Dieses Theorem wurde von Chasles *Compt. Rend.*, 41, 1853 für die Curven 3. O. aufgestellt un bewiesen und von Jonquières, *Mém. de l'Ac. de Paris*, 1 1858 auf den allgemeinen Fall ausgedehnt. Es verallgemeine den Begriff der *projectiven Erzeugung* der Kegelschnitte.

Von Arbeiten über die linearen Systeme führen wir ausse der *Introduzione* von Cremona an: Jonquières, *Math. Ann.*, 1 Caporali, *Collect. Math.*, Mailand 1881; Jung, *Ann. di mat.*, 1 16; Guccia, *Rend. Palermo*, 7 etc. Dazu kommen alle Arbeite welche die Geometrie der Punktgruppen auf einer Curve behandel und von denen in dem folgenden Paragraphen die Rede sein wir

Ueber die Singularitäten der Jacobi'schen Curve von dr Curven sehe man Gerbaldi, *Rend. Palermo*, 8 nach.

§ 4. Die Punktgruppen auf einer algebraischen Curv

In der sogenannten *Geometrie auf einer algebraischen Cur* werden die Eigenschaften der Gruppen von Punkten studi welche auf einer Grundcurve von der n^{ten} Ordnung durch d Schnitte derselben mit Systemen anderer Curven beliebiger Or nung entstehen, speciell, wenn diese Systeme *linear* sind, d. wenn ihre Gleichungen variabele Parameter *linear* enthalten.

Wenn die Grundcurve eine Gerade ist, so bilden die Punktgruppen die sogenannten *Involutionen höherer Ordnun* von denen wir in Kap. 2, § 2 gesprochen haben.

Wir müssen einige Sätze über die Schnittpunkte zwei Curven vorausschicken.

Es liege eine Grundcurve f von der n^{ten} Ordnung vor u sie werde von einer Curve φ von der m^{ten} Ordnung geschnitte welche durch δ singuläre Punkte von f geht, wobei in δ au die Zahlen mitgerechnet sind, die angeben, wie oft φ dur einen singulären Punkt von f geht. Die Schnittpunkte d beiden Curven sind nicht unabhängig von einander; ein Th von ihnen wird durch die anderen bestimmt. *Es sei k die Anza der Schnittpunkte der beiden Curven, welche durch alle übrig bestimmt sind; es bestehen dann die Fundamentalungleichheiten:*

$$\text{für } m < n-2 \text{ ist } k \leqq mn - \frac{m(m+3)}{2} - \delta,$$

$$\left[= \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \delta - \frac{(n-m-1)(n-m-2)}{2}\right]$$

$$\text{für } m \geqq n-2 \text{ ist } k \leqq \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \delta.$$

Eine Curve wird eine *adjungirte Curve* genannt, wenn sie -1 mal durch jeden r-fachen Punkt von f geht; hat mithin keine anderen mehrfachen Punkte, als Doppelpunkte und Spitzen, so hat eine *adjungirte Curve* nur die Bedingung zu erfüllen, *einfach* durch jeden Doppelpunkt oder jede Spitze von f zu gehen.

Nehmen wir nun an, φ sei eine *adjungirte Curve von der Ordnung* m.

Wenn man alsdann mit k *die Anzahl der* nm *Schnittpunkte von* f *und* φ *bezeichnet, welche durch die übrigen bestimmt sind, bestehen (unter* p *das Geschlecht von* f *verstanden) die Ungleichheiten:*

$$\text{für } m < n-2 \text{ ist } k \leqq p - \frac{(n-m-1)(n-m-2)}{2};$$

$$\text{für } m \geqq n-2 \text{ ist } k \leqq p.$$

Beachtenswerth ist, dass in dem zweiten Fall die Zahl k *nicht, wie im ersten, von der Ordnung* m *der schneidenden Curve abhängt, und dass in dem ersten Fall* $k \leqq p-1$ *für* $m = n-3$ *wird.*

Die Curve φ sei eine *adjungirte Curve.* In ihre Gleichung möge *linear* eine gewisse Anzahl willkürlicher Parameter derart eingehen, dass alle durch Variation dieser Parameter erhaltenen φ ein *lineares System* bilden.

Es sei Q die Anzahl der beweglichen Schnittpunkte von f mit φ, d. h. die Anzahl der Schnittpunkte, welche beim Uebergang von einer Curve φ zur anderen variiren; wenn k von ihnen durch die übrigen $Q-k$ bestimmt sind, so beträgt die Anzahl der Punkte, die man willkürlich auf f wählen kann, $Q-k=q$; diese Zahl wollen wir die *Mannigfaltigkeit des Systems von* Q *Punkten* nennen, weil es alsdann ∞^q Gruppen von Q Punkten gibt, in welchen f durch Curven der Art φ geschnitten wird. *Die Zahl* q *stellt die Anzahl der willkürlichen Parameter dar, die linear in die Gleichung von* φ *eingehen.* Das eben angegebene Theorem ergibt alsdann:

$$\text{für } m \leqq n-3 \text{ ist } q \geqq Q - p + \frac{(n-m-1)(n-m-2)}{2};$$

$$\text{für } m > n-3 \text{ ist } q \geqq Q - p.$$

Man kann diese Formeln in eine andere Gestalt bringen, welche erlaubt, eine *obere Grenze* für die Zahl Q anzugeben, wenn die Mannigfaltigkeit q des Systems bekannt ist. Es lässt sich behaupten:

$$\text{für} \quad m = n - 3 \quad \text{ist} \quad Q \leqq q + p - 1;$$
$$\text{für} \quad m > n - 3 \quad \text{ist} \quad Q \leqq q + p.$$

Brill und Noether, *Math. Ann.*, 7 fanden später auc *eine untere Grenze für Q; es ist nämlich immer*

$$Q \geqq \frac{q(q+p+1)}{q+1}.$$

Es existiren ferner, wenn man

$$Q(q+1) - q(q+p+1) = r$$

setzt, ∞^r *Systeme von Q Punkten und der Mannigfaltigkeit*

Für $r = 0$ *ist die Anzahl dieser Systeme endlich, nämli gleich*

$$\frac{2!\,3!\cdots q!\,2!\cdots(p-1-Q+q)!\,p!}{2!\,3!\cdots(2q+p-Q)!}$$

Castelnuovo, *Lincei*, 1889.

Für $q = 1$ *beträgt diese Zahl*

$$\frac{p!}{(p-Q+1)!\,(p-Q+2)!}$$

Brill-Noether, *Math. Ann.* 7.

Wir wollen mit dem Symbol G_Q^q *eine Gruppe* eines linear Systems von Q Punkten und der Mannigfaltigkeit q bezeichn und mit g_Q^q das ganze System dieser Gruppen.

Wenn Q grösser als $2p - 2$ *ist, so muss genau* $q = Q - p$ *sei*

Für $Q = 2p - 2$ *ist* $q = p - 1$ oder, wenn das Syste kein Specialsystem ist (siehe unten), $q = p - 2$.

Ist f eine unzerlegbare Curve, so existiren p adjungi linear unabhängige Curven von der Ordnung $n - 3$, *welche a f keine anderen, als die vielfachen Punkte gemeinschaftlich hab*

Lässt sich f in k Factoren zerlegen, so existiren

$$p + k - 1$$

derartige adjungirte linear unabhängige Curven von der Ordnu $n - 3$. Christoffel, *Ann. di Mat.*, 10.

Die adjungirten Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung schneiden Grundcurve f (ausser in den singulären festen Punkten) noch $2p - 2$ Punkten. Nun existirt das interessante Theorem:

Jedes q-fach unendliche lineare System von Q Punkten ka immer auf der Grundcurve f von einem System adjungirter Curv $(n-3)^{\text{ter}}$ *Ordnung ausgeschnitten werden, wenn*

$$q \geqq Q - p + 1 \quad \text{ist;}$$

ese Bedingung schliesst nach einem früheren Theorem aus, dass $> 2p - 2$ *ist.*

Ins Besondere:

Wenn ein Büschel ($q = 1$) *adjungirter Curven p bewegliche chnittpunkte mit der Curve f hat, so liegt jede Gruppe dieser Punkte auf einer adjungirten Curve* $(n - 3)^{\text{ter}}$ *Ordnung.*

Eine Gruppe von Q Punkten, durch welche wenigstens eine djungirte Curve $(n - 3)^{\text{ter}}$ Ordnung geht, heisst eine *Specialruppe;* das System, welchem sie angehört, wird *Specialsystem* enannt.

Das System g_{2p-2}^{p-1} pflegt man *canonisches System* zu nennen. *Es hat keine festen Punkte und ist das einzige System dieser Art* (siehe oben).

Eines der grundlegenden Theoreme für die Theorie, die uns ier beschäftigt, ist der sogenannte *Restsatz*, der nachweist, dass lie Punktgruppen auf einer Curve sich gewissermassen als unabhängig von den Curven auffassen lassen, durch welche sie ausgeschnitten werden.

Zwei Punktgruppen G_Q, $G_{Q'}$ heissen *corresidual* zu einander, wenn eine andere Gruppe G_R von der Beschaffenheit existirt, dass die beiden Gruppen G_Q, G_R alle beweglichen Schnittpunkte (mit Ausschluss der singulären Punkte) von f mit einer adjungirten Curve und die Gruppen $G_{Q'}$, G_R alle beweglichen Schnittpunkte von f mit einer anderen adjungirten Curve darstellen. Die beiden Gruppen G_Q und G_R heissen dann *residual zueinander.*

Der *Restsatz* lautet:

Wenn G_Q *und* $G_{Q'}$ *in Bezug auf die Gruppe* G_R *corresidual zu einander sind, so müssen sie es auch in Bezug auf eine beliebige andere Gruppe* $G_{R'}$ *sein, welche mit einer von ihnen das vollständige System der beweglichen Schnittpunkte von f mit einer beliebigen anderen Curve bildet.* Mit anderen Worten: *Die Eigenschaft zweier Punktgruppen, corresidual zu einander zu sein, ist von der zu beiden residualen Punktgruppe unabhängig; d. h. sie hängt nicht von den Curven ab, von welchen diese Punktgruppen auf f ausgeschnitten werden.*

Oder auch: *Wenn man durch* G_Q *eine beliebige andere adjungirte Curve legt, welche f in einer Gruppe* $G_{R'}$ *schneidet, so bilden die Gruppen* $G_{R'}$ *und* G_Q *das vollständige System der beweglichen Schnittpunkte von f mit einer adjungirten Curve.*

Dieser Satz, von algebraischem Standpunkt aufgefasst, ist bei Brill-Noether, *Gött. Nachr.*, 1873 und *Math. Ann.*, 7 zu

finden. Seinen Ursprung jedoch verdankt er dem Abel'schen Theorem über die transcendenten Integrale. Siehe *Repertorium*, I, Kap. 15, § 8.

Es liege eine Gruppe von Q Punkten vor, welche einem linearen System g_Q^q angehört. Es sei $\tau = r + 1$ die Anzahl der linear unabhängigen adjungirten Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche durch die Q Punkte gehen; alsdann ist die Mannigfaltigkeit q durch die Formel

$$q = Q - p + r + 1 \quad \textit{gegeben.}$$

Dieses ist das sogenannte Riemann-Roch'sche Theorem, *Crelle*, 64. Es wurde bei der Untersuchung der algebraischen Functionen entdeckt, siehe *Repert.* I, p. 395.

Die Zahl r gibt die Anzahl der nicht homogenen Parameter an, welche linear in die allgemeine Gleichung einer durch die Q Punkte gehenden adjungirten Curve $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung eingehen; sie stellt die Mannigfaltigkeit des Systems dieser Curven dar. Für ein allgemeines System (kein Specialsystem) ist $r + 1 = 0$.

Das Riemann-Roch'sche Theorem lässt sich auch auf die folgende Art anders fassen und heisst dann (nach Klein) das Brill-Noether'sche *Reciprocitätstheorem*:

Eine adjungirte Curve $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung schneide f in $2p-2$ Punkten, die in zwei Gruppen von $Q + R = 2p - 2$ Punkten zerfallen; die Gruppe der ersten Q Punkte gehöre einem linearen System von der Mannigfaltigkeit q an; die Gruppe der zweiten R Punkte wird dann einem linearen System von der Mannigfaltigkeit r derart angehören, dass die Relationen

$$q - r = Q - p + 1,$$
$$r - q = R - p + 1$$

bestehen.

Das folgende Theorem, welches eine Folge des Riemann-Roch'schen Satzes ist, wird das Clifford'sche genannt, *Phil. Trans.*, 1878:

Wenn das System g_Q^q ein Specialsystem (d. h. die entsprechende Zahl $r + 1$ grösser als Null) ist, so muss $Q \geq 2q$ sein.

Wenn ein lineares System g_Q^q gegeben ist, so gibt es gewisse Gruppen von Q dem System angehörigen Punkten, welche zwei oder mehrere zusammenfallende Punkte besitzen; diese Punkte heissen *vielfache Punkte* des Systems.

Die Anzahl der $(q+1)$fachen dem System angehörigen nkte ist durch die Formel

$$(q+1)(Q+qp-q)$$

geben. Siehe Brill, *Math. Ann.*, 4; Clebsch-Lindemann, ometrie, 1, p. 461. Untersuchungen dieser Art haben De nquières, *Crelle*, 66; Cayley, Lond. *Phil. Trans.*, 158 = ll. Math. Pap., 6, p. 191 und Andere geführt.

In dem System g^{p-1}_{2p-2}, d. h. in dem System der sämmtlichen ruppen von Punkten, welche auf f durch alle zu f adjungirten urven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung ausgeschnitten werden, gibt es im llgemeinen eine endliche Anzahl von Gruppen von nur $p-1$ unkten, von denen jeder zweimal gezählt wird; diese Anzahl trägt $(2^p-1)2^{p-1}$; solche Gruppen entsprechen adjungirten urven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche Berührungscurven von f nd, d. h. f in jedem Punkt, in welchem sie es treffen, berühren.

Es gibt ferner $(2^p+1)2^{p-1}$ adjungirte Curven $(n-2)^{\text{ter}}$ rdnung, welche f in p Punkten berühren.

Es kann jedoch f eine derartige Curve sein, dass es unendlich iele solcher Gruppen gibt, nämlich ∞^{m-1} $(m=2,3,\cdots)$. Das tudium dieser Systeme ist für die Theorie der Abel'schen unctionen von Bedeutung und wurde von Weber, *Math. Ann.*, 3; Kraus, ib., 16 begonnen.

Wir wollen die Resultate von Kraus in Bezug auf die eschaffenheit einer Curve f, die solche Systeme von Punktruppen besitzt, hier angeben:

Der Typus einer Curve f, welche ∞^1 Gruppen von $p-1$ unkten enthält, in welchen sie von einer adjungirten Curve $n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung berührt wird, ist für $p>3$ eine Curve $p+1)^{\text{ter}}$ Ordnung mit einem Selbstberührungspunkt und mit

$$\frac{(p-4)(p+1)}{2}$$

auf einer Curve $(p-4)^{\text{ter}}$ Ordnung liegenden Doppelpunkten. Für $p=3$ ist dagegen die Curve 5ter Ordnung und hat einen reifachen Punkt.

Der Typus einer Curve f, auf welcher ein System von ∞^2 Gruppen von $p-1$ Punkten der eben angegebenen Art existirt, st eine Curve $(p-1)^{\text{ter}}$ Ordnung mit $\frac{1}{2}(p-1)(p-6)$ Doppelpunkten, welche auf einer adjungirten Curve $(p-6)^{\text{ter}}$ Ordnung liegen. Das kleinste Geschlecht einer solchen Curve ist $p=6$.

Der Typus schliesslich einer Curve f, auf welcher es ein Syste von ∞^{m-1} $(m > 3)$ *Gruppen der angegebenen Art gibt, ist ei Curve* $(p - m + 2)^{\text{ter}}$ *Ordnung mit*

$$\tfrac{1}{2}\,[(p-m)^2 - (p+m)]$$

Doppelpunkten, welche auf einer adjungirten die Normalcurve i $m - 3$ *anderen Punkten berührenden Curve* $(p - m + 3)^{\text{ter}}$ *Or nung liegen. Der kleinste Werth von p für* $m = 4$ *ist* $p =$

Die Existenz solcher Systeme von Gruppen entspricht d Existenz von Funktionen ϑ (siehe *Repert.* 1, Kap. 17), die z gleich mit ihren Devirirten der verschiedenen Ordnungen für d Argumente Null verschwinden; doch können wir uns auf die Einzelheiten nicht einlassen. Vergl. Weber, l. c.

Hierher gehört auch der folgende wichtige Satz v Weber:

Die $(p-1)+(p-1) = 2p-2$ *Berührungspunkte zwei adjungirter demselben System angehöriger Berührungscurv* $(n-3)^{\text{ter}}$ *Ordnung liegen auf derselben anderen adjungirt Curve* $(n-3)^{\text{ter}}$ *Ordnung.*

Daraus folgt die Existenz gewisser *identischer quadratisch Beziehungen,* welche alsdann zwischen den linken Seiten d Gleichungen der adjungirten Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung besteh müssen.

Eine sehr wichtige Kategorie von Curven sind die genannten *hyperelliptischen.* Vom Standpunkt der Punktgruppe theorie aus werden sie durch die Eigenschaft definirt, dass ein System g_2^1 besitzen.

In diesem System g_2^1 *gibt es* $2p + 2$ *Paare zusamm fallender Punkte.*

In einer hyperelliptischen Curve ordnen sich die Punkte der paarweise zusammen, dass jede adjungirte Curve $(n-3)^{\text{ter}}$ *O nung, die durch den einen der Punkte des Paares geht, no wendiger Weise auch durch den anderen gehen muss.*

Eine Formel, welche für die Theorie, die uns hier beschäfti von grosser Bedeutung ist und verschiedene Anwendungen lässt, ist die sogenannte *Correspondenzformel* von Cayley u Brill, welche man als eine Verallgemeinerung der Chasle schen ansehen kann. Vergl. Kap. 1, § 2.

Nehmen wir an, es sei eine Relation

$$\Phi(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3) = 0$$

om r^{ten} Grad in (x) und dem s^{ten} in (y) festgestellt.

Ist ein Punkt (x) gegeben, so bestimmt diese Relation eine urve der Ebene, welche die Fundamentalcurve n^{ter} Ordnung f in s Punkten schneidet und ist ein Punkt (y) gegeben, eine Curve, ie f in nr Punkten schneidet.

Man wähle die Punkte (x), (y) auf der Curve f; variirt nan (x) auf der Curve f, so ergibt sich eine Reihe von Gruppen on ns Punkten auf f und durch Variation von (y) auf f eine Reihe von Gruppen von nr Punkten. Man erhält mithin *eine Correspondenz zwischen zwei Reihen von Punktgruppen auf f.* Die in Rede stehende Formel gibt die Anzahl der *Doppelpunkte* dieser Correspondenz an.

Wir wollen annehmen, einem Punkt (x) entsprechen β durch die Schnitte von f mit einer Curve der zweiten Reihe gegebene Punkte (y) und diese Curve der zweiten Reihe treffe dann wieder f in γ mit (x) zusammenfallenden Punkten, und wollen ferner voraussetzen, einem Punkt (y) entsprechen α durch die Schnitte von f mit einer Curve der zweiten Reihe gegebene Punkte. Diese Curve der zweiten Reihe muss dann noch γ mal durch (y) gehen und die Anzahl der Punkte (x), welche mit entsprechenden Punkten (y) zusammenfallen, beträgt

$$\alpha + \beta + 2\gamma p.$$

Ist $p = 0$, d. h. f unicursal, so reducirt sich diese Formel auf die Chasles'sche.

Die Coincidenzpunkte bilden immer ein vollständiges System der Schnitte von f mit einer anderen Curve.

Das oben angegebene Theorem wurde zuerst von Cayley aufgestellt, *Compt. Rend.*, 62; *Proc. London math. soc.*, 1; später wurde es von Brill bewiesen, *Math. Ann.*, 6, 7, 31; siehe auch Junker, *Dissert.*, Tübingen, 1889. Andere Beweise sind von Schubert, *Calcül der abzähl. Geom.*, Leipzig 1879, § 18; Bobek, *Wiener Akad.*, 93; Lindemann, *Crelle*, 84; Hurwitz, *Math. Ann.*, 28; Zeuthen, *Math. Ann.*, 40, Segre, *Ann. di mat.*, 22, § 12. Einige dieser Autoren z. B. Hurwitz haben auch ein allgemeineres Theorem betrachtet. In der Clebsch-Lindemann'schen *Geometrie*, Bd. 1, S. 441 wird dem Correspondenzprincip ein besonderer Abschnitt gewidmet.

Den Grund zu der Geometrie der Punktgruppen auf einer Curve hat wohl Riemann gelegt; er betrachtete diese Lehre jedoch vom Standpunkt der Theorie der algebraischen Funktionen auf einer Riemann'schen Fläche (was schliesslich auf dasselbe hinauskommt). Siehe *Repert.*, I, Kap. 15. Später hat sich die Theorie nach verschiedenen Richtungen entwickelt: nach der Richtung, welche man die *functionale* nennen könnte, und die gerade von Riemann und den zahlreichen Arbeiten über die Abel'schen Integrale ausgeht; nach der *algebraisch-geometrischen* die einer grundlegenden Abhandlung von Brill-Noether, *Math. Ann.*, 7 ihre Entstehung verdankt und der *algebraisch-arithmetischen* Kronecker, Dedekind, Weber; vergl. besonders *Crelle*, 92. In der letzten Zeit tritt auch noch die *rein geometrische* Auffassungsweise hinzu; wir empfehlen, eine neuere Arbeit von Segre, *Ann. di mat.*, 22 darüber nachzusehen.

Die Theorie der Punktgruppen ist für das Studium der eindeutigen Transformation der ebenen Curven (siehe weiter unten § 5) von der grössten Bedeutung, weil die Eigenschaften der Gruppen für diese Transformation invariante Merkmale darstellen.

Der Kürze wegen verzichten wir darauf, alle anderen zahlreichen Arbeiten von Noether, Brill, etc. zu citiren.

Küpper, Bobek und Amodeo, *Lincei*, 1893; *Ann. di mat.*, 21, 24; *Acc. Nap.*, 1896 haben auch die sogenannten k-seitigen Curven studirt, d. h. solche, welche eine lineare Schar g_k^1 besitzen, ohne eine einfach unendliche lineare Schar niedrigeren Grads zu enthalten, und von welchen die hyperelliptischen Curven ein specieller Fall sind.

Selbstverständlich ist jede Curve k-seitig, wenn nur dem k der geeignete Werth beigelegt wird.

Wir fügen noch hinzu, dass man in einer neuen Arbeit von Bertini, *Ann. di mat.*, 22 die Theorie auf algebraische Art behandelt findet. Ueber weitere Angaben siehe das ausgezeichnete Referat über die Geschichte der Theorie von Brill-Noether in den *Jahresber. d. deutsch. Math.-Verein.*, 3, 1892, 1893.

§ 5. Birationale Transformationen der Ebene oder ebener Curven. Mehrdeutige Transformationen.

Wir wollen

$$y_i \equiv f_i(x_1, x_2, x_3)^*), \quad (i = 1, 2, 3) \tag{1}$$

*) Das Zeichen $\equiv$ bedeutet hier *proportional*; die obigen Relationen sind daher wesentlich nur *zwei*, nicht *drei*.

·tzen, worin die f_i ganze rationale Funktionen von der Ordnung in den x_1, x_2, x_3 (ohne gemeinschaftlichen Factor) bedeuten, und nnehmen, dass man durch Auflösung dieser beiden Relationen ach den x

$$x_i \equiv \varphi_i(y_1, y_2, y_3), \quad (i = 1, 2, 3) \tag{2}$$

rhalte, worin die φ ebenfalls ganze rationale Funktionen sind. lsdann sagen wir, die Beziehungen (1) bestimmen *eine ebene irationale oder ein-eindeutige Transformation* in dem Sinn, dass an bei ihnen die Punkte zweier Ebenen (der Ebene x und er Ebene y, die auch superponirt sein können) derart einander uordnen kann, *dass einem Punkt der einen ein und nur ein Punkt der anderen entspricht und umgekehrt.*

Eine solche Transformation wird auch eine *Cremona*-Transormation nach dem Autor genannt, der diese Theorie zuerst n ihrer ganzen Allgemeinheit ausgebildet hat.

Eine der ersten grundlegenden Eigenschaften lautet: *Der Grad der φ_i muss derselbe, wie der Grad der f_i, sein.*

Ferner:

Damit die Transformation ein-eindeutig sei, ist es nöthig, dass das aus den drei Curven

$$f_1 = 0, \; f_2 = 0, \; f_3 = 0$$

gebildete Netz $n^2 - 1$ feste Punkte (Fundamentalpunkte der Transformation) habe. Ein solches Netz heisst bekanntlich (vergl. S. 146) *homaloidal.*

Dasselbe gilt natürlich auch für das Netz der drei Curven $\varphi_i = 0$.

Die Curven $f_i = 0$, $\varphi_i = 0$ müssen sämmtlich vom Geschlecht $p = 0$ sein und ihre vielfachen Punkte müssen ohne Ausnahme in den Fundamentalpunkten der Transformation liegen.

Wenn man annimmt, unter den $n^2 - 1$ Fundamentalpunkten gebe es α_1 einfache für alle Curven, α_2 Doppelpunkte für alle Curven, $\cdots$, α_{n-1}, $(n-1)$-fache für alle Curven, *so müssen zwischen den Zahlen α die folgenden drei Relationen bestehen, von denen jede die Folge der beiden anderen ist:*

$$\alpha_1 + 4\alpha_2 + 9\alpha_3 + \cdots + (n-1)^2\alpha_{n-1} = n^2 - 1,$$
$$\alpha_2 + 3\alpha_3 + \cdots + \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)\alpha_{n-1} = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2),$$
$$\alpha_1 + 3\alpha_2 + 6\alpha_3 + \cdots + \tfrac{1}{2}n(n-1)\alpha_{n-1} = \tfrac{1}{2}n(n+3) - 2.$$

Ist der Werth von n gegeben, so lassen sich aus diesen Formeln die möglichen Werthe für die Zahlen α ableiten;

Tabellen zu diesem Zweck sind von Cremona und Cayley aufgestellt worden.

Ein für alle Curven der Transformation k-facher Fundamentalpunkt heisst *Fundamentalpunkt k^{ter} Ordnung.*

Die vorstehenden Formeln gelten, wenn die f (und die φ) in den Fundamentalpunkten keine gemeinschaftlichen Tangenten haben.

Einem Fundamentalpunkt k^{ter} Ordnung in der einen Ebene entspricht in der anderen Ebene eine Curve k^{ter} Ordnung vom Geschlecht $p = 0$ (die k^{te} Fundamentalcurve).

Die Fundamentalcurven einer Ebene haben ihre vielfachen Punkte in den Fundamentalpunkten derselben Ebene und schneiden sich gegenseitig nur in ihnen.

Die k^{te} Fundamentalcurve geht durch den Fundamentalpunkt h^{ter} Ordnung dieselbe Anzahl α_{kh} mal, wie die h^{te} Fundamentalcurve durch den Fundamentalpunkt k^{ter} Ordnung.

Daraus folgt $\alpha_{hk} = \alpha_{kh}$. Ferner ist die Determinante $|\alpha_{hk}| = \pm n$.

Jede Fundamentalcurve geht durch einen Fundamentalpunkt k^{ter} Ordnung $3k - 1$ mal.

Wenn, wie oben, α_i die Anzahl der Fundamentalpunkte i^{ter} Ordnung in einer der Ebenen und β_i die analoge Anzahl in der anderen Ebene bezeichnet, so ist $\sum\alpha_i = \sum\beta_i$ und die Zahlen α unterscheiden sich von den Zahlen α nur der Anordnung nach.

Cremona'sches Theorem.

Die Summe der drei Ordnungszahlen für die drei höchsten Fundamentalpunkte einer Transformation n^{ter} Ordnung ist grösser als n.

Sehr wichtig ist das folgende Theorem:

Jede Cremona-Transformation lässt sich durch eine Reihenfolge quadratischer Transformationen ersetzen, indem man die drei Fundamentalpunkte einer solchen in die höchsten Basispunkte des Systems der Transformationscurven hineinlegt.

Dieses Theorem wurde gleichzeitig von Clifford (siehe Cayley, *Proc. of the Lond. math. Soc.*, 3), Noether, *Math. Ann.* 3; 5 und Rosanes, *Crelle*, 73 gefunden.

Bei einer quadratischen Transformation ($n = 2$) entsprechen den Geraden der einen Ebene in der anderen Kegelschnitte, die durch drei feste Punkte gehen, und dem Schnittpunkt zweier Geraden entspricht der vierte Schnittpunkt der beiden entsprechenden Kegelschnitte.

Die Gleichungen der quadratischen Transformation lassen sich immer auf die Form reduciren (Cayley):

$$x_1 y_1 = x_2 y_2 = x_3 y_3.$$

Legt man von den drei Fundamentalpunkten zwei in die beiden imaginären unendlich fernen Kreispunkte der Ebene und den dritten in den Anfangspunkt der Cartesischen Coordinaten, so erhält man die sogenannte *Inversion* oder *Transformation durch reciproke Radienvectoren.* Manche Autoren geben auch der allgemeinen quadratischen Transformation den Namen *Inversion.*

Bei einer quadratischen Transformation entspricht einer Curve n^{ter} Ordnung, die k_1, k_2, k_3 mal durch die drei Fundamentalpunkte geht, eine Curve $(2n - k_1 - k_2 - k_3)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche $n - (k_2 + k_3)$, $n - (k_3 + k_1)$, $n - (k_1 + k_2)$ mal durch die drei Fundamentalpunkte der eigenen Ebene geht.

Bei einer Transformation n^{ter} Ordnung entspricht einer Curve ν^{ter} Ordnung, welche l_i mal durch einen Fundamentalpunkt r_i^{ter} Ordnung geht, eine Curve von der Ordnung $\mu = n\nu - \sum_i r_i l_i$, die

$$\lambda_k = \nu s_k - \sum_i r_i \alpha_{ik}$$

mal durch jeden Fundamentalpunkt s_k^{ter} Ordnung geht; dabei haben die α_{ik} die oben angegebene Bedeutung.

Soll die Transformation nicht *für die ganze Ebene* ein-eindeutig sein, sondern nur für die Punkte zweier sich entsprechender Curven F und F', so braucht das Transformationsnetz nicht, wie bisher, homaloidal zu sein. *Es dürfen sich aber die Curven des Netzes, welche sich in einem Punkt von F treffen, nur dann auch noch in einem anderen Punkt von F schneiden, wenn dieser letztere Punkt ein Fundamentalpunkt, d. h. allen Curven des Netzes gemeinschaftlich ist.*

Bei jeder birationalen Transformation bleibt das Geschlecht jeder Curve unverändert. Riemann's sogenannter *Satz von der Erhaltung des Geschlechts.*

Eine nicht reducibele, rationale (unicursale) Curve lässt sich birational in eine Gerade transformiren.

Jede Curve vom Geschlecht Eins (elliptische Curve) kann birational in eine Curve 3ter Ordnung transformirt werden.

Die adjungirten Curven $(n-3)^{ter}$ Ordnung (vergl. § 4 zeigen bei einer *birationalen* Transformation eine bemerkenswertl Eigenschaft, nämlich:

Wenn in Folge einer birationalen Transformation aus eine Curve F von der Ordnung n eine Curve F' von der ν^{ten} Ordnun wird, so transformirt sich das System der Schnittpunkte von F m den adjungirten Curven $(n-3)^{ter}$ Ordnung von F in das Syste der Schnittpunkte von F' mit seinen adjungirten Curven $(\nu-3)^t$ Ordnung.

Betrachtet man ein Netz von adjungirten Curven $(n-3)^t$ Ordnung bezügl. einer gegebenen Curve F vom Geschlecht p nimmt die Basispunkte des Netzes sämmtlich auf der Curve an und denkt sich schliesslich dieses Netz als Basis einer b rationalen Transformation der Curve, *so verwandelt sich die Cur F in eine solche $(p+1)^{ter}$ Ordnung mit vielfachen Punkten, d $\frac{1}{2}p(p-3)$ Doppelpunkten gleichwerthig sind.*

Eine solche Curve kann man als den *Normaltypus* eine Curve vom Geschlecht p ansehen.

Wählt man nun auf F die $p-3$ Basispunkte des Netze auf geeignete Art aus, so wird die transformirte Curve ei solche von der *kleinsten Ordnung,* in die sich überhaupt ei Curve vom Geschlecht p verwandeln lässt; *diese kleinste Or nung ist:*

die $2\pi+2^{te}$ für $p=3\pi$,
„ $2\pi+3^{te}$ für $p=3\pi+1$,
„ $2\pi+4^{te}$ für $p=3\pi+2$,

Brill-Noether, *Math. Ann.*, 7.

An diese Betrachtungen schliesst sich das Problem an, d Anzahl der *Moduln* einer Curve von gegebenem Geschlecht p bestimmen, d. h. die Anzahl derjenigen Functionen der Coef cienten der Curvengleichung, welche sich bei jeder beliebige birationalen Transformation als *absolute Invarianten* verhalte

Man kommt zu dem folgenden Resultat (Riemann):

Für $p=0$, d. h. also für rationale Curven ist die Anza der Moduln Null, für $p=1$, d. h. für elliptische Curven, b trägt diese Zahl 1 und für $p>1$ ist sie $3p-3$.

Eine wichtige Anwendung finden die Cremona-Tran formationen der Ebene auf die sogenannte *Zerlegung der Sing laritäten.*

Mittelst einer Cremona-Transformation kann man aus ner Curve mit vielfachen Punkten, in welchen die Tangenten usammenfallen, eine Curve mit nur gewöhnlichen Singularitäten . h. nur mit vielfachen Punkten, in welchen die Tangenten ge- ennt sind, ableiten.

Dieses Problem hat speciell Noether, *Gött. Nachr.*, 1871; *Math. Ann.*, 9 behandelt.

Man kann ferner durch birationale Transformationen eine urve, die nur gewöhnliche Singularitäten hat, in eine andere erwandeln, welche nur Doppelpunkte besitzt. Siehe Bertini, *Math. Ann.*, 44.

Die *quadratischen* birationalen Transformationen wurden on Magnus untersucht, *Sammlung von Aufg.* etc., Berlin 1833, on Steiner, *Crelle*, 8 und später von Schiaparelli, *Mem. Acc. Torino*, 1862; die allgemeine Theorie der birationalen ransformationen dagegen hat Cremona begründet, *Acc. Bologna*, 863, 1865; *Giorn. di Batt.*, 1, 3. Andere wichtige Arbeiten ind von Cayley, *Proc. Lond. math. Soc.*, 3, 1870; Rosanes, *Crelle*, 73; Clebsch, *Math. Ann.*, 3; Noether, *ib.*, 5.

Wir empfehlen, die Darstellung der Theorie der birationalen ransformationen von Ebenen sowohl wie von Curven in der *Geom.* von Clebsch-Lindemann zu Rath zu ziehen. Bezüglich neuerer Untersuchungen vergl. man: Fano, *Ueber Gruppen ins- esondere Gruppen von Cremona-Transformationen der Ebene und les Raumes. Monatshefte für Math. und Physik*, 9. Jahrg., 1898.

Man hat auch die nicht ein-eindeutigen (mehrdeutigen) ransformationen einer Ebene in eine andere studirt ebenso wie lie mehrdeutigen Transformationen einer Curve in eine andere.

Eine Formel, welche die Geschlechter zweier nicht in ein-ein- leutiger Zuordnung stehender Curven verbindet, ist von Zeuthen:

Es mögen zwei Curven vorliegen, die sich derart ent- sprechen, dass einem Punkt der ersten (vom Geschlecht p) n Punkte der zweiten (vom Geschlecht p') und einem Punkt der zweiten n' Punkte der ersten entsprechen. Auf den beiden Curven gebe es μ bez. μ' Coincidenzen, d. h. es komme μ mal vor, dass auf der ersten Curve von den einem Punkt der zweiten entsprechenden Punkten zwei zusammenfallen etc. *Alsdann gilt die Formel*, Zeuthen, *Math. Ann.*, 3:

$$\mu - \mu' = 2n'(p - 1) - 2n(p' - 1).$$

Für $m = m' = 1$ erhält man die ein-eindeutige Zuordnun
und aus der Formel folgt dann ferner $p = p'$. *Riemann'sch*
Theorem.

Zu den mehrdeutigen Correspondenzen zwischen zwei Ebene
gehören die *isogonalen* (*gleichwinkligen*), bei welchen die Wink
unverändert bleiben; siehe das Werk von Holzmüller, *The*
der isog. Verwandtsch., Leipzig, 1883.

Die wichtigsten Arbeiten über die mehrdeutigen Tran
formationen sind von Ch. Wiener, *Math. Ann.*, 3; De Paoli
Mem. Lincei, 1877, 1878; Noether, *Erlang. Berichte*, 187
Jung, *Rend. Lincei*, 1886; *Ist. Lomb.*, 1888; Bertini, *I*
Lomb., 1889.

Kapitel VI.

Die Theorie der ebenen Connexe.

§ 1. Allgemeines.

Nachdem wir in den vorstehenden Kapiteln die Figuren udirt haben, welche analytisch durch das Verschwinden einer rnären Form mit nur *einer* Reihe von Variabelen dargestellt erden, gehen wir nun zu den Formen mit zwei Reihen von ariabelen über.

In den §§ 11, 12, 21 des Kapitels XII im 1ten Band war on solchen ternären Formen mit zwei Reihen von Variabelen, h. mit einer Reihe von Variabelen x und einer Reihe von ntragredienten Variabelen u die Rede.

Die geometrische Figur, welche analytisch dargestellt wird, dem man diese ternäre Form gleich Null setzt und, wie gewöhnlich, die x als die Punktcoordinaten der Ebene und die u s die Liniencoordinaten (Geradencoordinaten) der Ebene interretirt, heisst *Connex*.

Wenn die Form vom n^{ten} Grad in den x und vom m^{ten} rad in den u ist und mithin symbolisch durch

$$a_x^n u_\alpha^m$$

argestellt wird, so sagt man, der entsprechende Connex sei von er n^{ten} *Ordnung* und der m^{ten} *Classe* und bezeichnet ihn mit em Symbol (n, m).

Vermöge der Gleichung eines Connexes entspricht jedem unkt der Ebene eine in Tangentialcoordinaten ausgedrückte urve m^{ter} Classe und jeder Geraden der Ebene eine in Punktoordinaten ausgedrückte Curve n^{ter} Ordnung.

Ein Punkt und eine Gerade, die sich in dem Connex entprechen, heissen zusammengenommen *Element des Connexes*.

Es kann vorkommen, dass ein Punkt der Ebene existi
der mit *jeder* Geraden der Ebene ein *Element* des Connex
bildet; er heisst dann *Fundamentalpunkt* und ebenso wi
Fundamentalgerade des Connexes eine Gerade genannt, die n
jedem Punkt der Ebene ein Element bildet.

Die Anzahl der Fundamentalpunkte oder -Geraden ka
endlich oder auch unendlich gross sein. So lässt sich z. B.
Gleichung einer Curve in Punktcoordinaten als die Gleichu
eines Connexes ansehen, der unendlich viele Fundamentalpunk
hat, welche die unendlich vielen Punkte der Curve sind, w
ein Punkt der Curve mit einer beliebigen Geraden der Eb
zusammengenommen, offenbar ein *Element* des Connexes bild
d. h. eine Combination von Punkt und Gerade, deren Coordina
der gegebenen Gleichung genügen.

Der durch die Gleichung

$$u_x \equiv u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$$

dargestellte Connex heisst *identisch*.

Die Gesammtheit der in doppelt unendlicher Anzahl v
handenen Elemente, welche zweien Connexen gemeinschaft
sind, bildet eine sogenannte *Coincidenz*. In einer Coincid
entspricht jeder Geraden der Ebene eine endliche Anzahl ν
Punkten und jedem Punkt eine endliche Anzahl μ von Gera
Die Zahlen ν und μ heissen *Ordnung* und *Classe* der Coincid

Die Coincidenz, welche ein gegebener Connex mit
identischen Connex $u_x = 0$ gemeinschaftlich hat, heisst *Ha
coincidenz*.

Liegen zwei Connexe (n, m), (n', m') *vor, so sind die*
nung und Classe der entsprechenden Coincidenz

$$\nu = nn', \quad \mu = mm'.$$

Ist ein Punkt x *gegeben, so ergeben sich die* μ *Geraden*
Coincidenz als die Tangenten, welche den Curven gemeinsc
lich sind, die in den beiden Connexen diesem Punkt x *entspre*
ähnliches gilt für die ν *Punkte, welche einer Geraden zug*
net sind.

Die Gesammtheit der dreien Connexen gemeinsamen
mente oder ein Theil dieser Gesammtheit bildet ein *Curven*
Eliminirt man aus den Gleichungen der drei Connexe die
ergibt sich die Gleichung einer Curve in Liniencoordinaten,

minirt man die u, die Gleichung einer Curve in Punktcoordi-
ten. *Die Classe der ersten Curve ist durch*

$$mn'n'' + m'n''n + m''nn'$$

geben und die Ordnung der zweiten durch

$$nm'm'' + n'm''m + n''mm',$$

nn (n, m), (n', m'), (n'', m'') *die drei Connexe sind.*

Die Anzahl der Elemente (Punkt und entsprechende Gerade), die vier Connexen (n, m), (n', m'), (n'', m''), (n''', m''') *gemeinschaftlich sind, ist:*

$$m'n''n''' + m'm''n'''n + m''m'''nn' + mm''n'n''' + m'm'''n''n + mm'''n''n'.$$

Wie es bei den Curven *singuläre Punkte* geben kann, d. h. lche, für welche die linke Seite der in Punktcoordinaten ge-benen Gleichung der Curve in höherem als dem 1ten Grad rschwindet (d. h. auch die partiellen Derivirten der linken ite dieser Curve sich annulliren), so können auch die Connexe *guläre Elemente* haben. Diese treten unter Umständen auch einfach oder doppelt unendlicher Anzahl auf; d. h. in dem gebenen Connex können *singuläre Coincidenzen* oder *singuläre urvenpaare* enthalten sein.

Selbstverständlich führt das Studium der Eigenschaften der onnexe zu der Construction der *invarianten Formen*, welche er Fundamentalform $a_x^n u_\alpha^m$ angehören; davon war kurz in dem ten Band die Rede, wo wir auch in Kap. 12, § 12 die Grund-ge eines auf die Connexe angewandten *Uebertragungsprincips* klärt haben, mit dessen Hülfe sich specielle Formen con-ruiren lassen, die in Bezug auf den Connex covariant sind.

2. Conjugirter Connex. Geschlecht der Connexe und der Coincidenzen.

Von den invarianten Bildungen in Bezug auf einen ge-ebenen Connex ist besonders diejenige von Interesse, die dem ogenannten *conjugirten Connex* entspricht.

Einem gegebenen *conjugirt* heisst der Connex, der in Bezug uf den gegebenen die folgende invariante Beziehung hat: Jedes einer Elemente (y, v) ist so beschaffen, dass dem Punkt y in iem gegebenen Connex *wenigstens eine* doppelt zu zählende Gerade nd der Geraden v in dem gegebenen Connex *wenigstens ein* oppelt zu zählender Punkt entspricht.

Die Gleichung des dem gegebenen $f(x, u) = 0$ conjugirte Connexes $F(y, v) = 0$ erhält man durch Elimination von ϱ, σ, x_i, u aus den Gleichungen

$$\varrho v_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad \sigma y_i = \frac{\partial f}{\partial u_i}, \quad f = 0.$$

Bei der Aufstellung der Gleichung des conjugirten Connexes kann man das Uebertragungsprincip, Bd. 1, Kap. 12, § 1 benutzen. Man hat die Discriminante der doppelt binären Gleichung zu bilden, welche bei Anwendung derselben Bezeichnung, wie in dem erwähnten § 12,

$$\varphi \equiv A_\lambda^n \mathsf{A}_\mu^m, \quad (n, m > 1)$$

lautet, d. h. die Invariante zu bilden, die, gleich Null gesetzt, die Bedingung angibt, unter welcher diese Form gleichzeitig eine doppelte Wurzel in λ und eine doppelte Wurzel in μ hat, unter welcher also zwei Werthe λ_1, μ_1 von λ und μ derart existiren, dass λ_1 eine Doppelwurzel von $\varphi(\lambda, \mu_1) = 0$ und μ_1 eine Doppelwurzel von $\varphi(\lambda_1, \mu) = 0$ ist. Alsdann ändere man nach dem Uebertragungsprincip jede binäre Determinante in eine ternäre um. *Diese Invariante ergibt sich durch Elimination von* $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ *aus den Gleichungen*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_1} = 0, \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_2} = 0, \frac{\partial \varphi}{\partial \mu_1} = 0, \frac{\partial \varphi}{\partial \mu_2} = 0;$$

ihr Grad ist der $2\{mn + 2(m-1)(n-1)\}^{\text{te}}$.

Wenn eine der Zahlen n oder m z. B. m gleich 1 *wird, so ist*

$$\varphi = A_\lambda^n \mathsf{A}_\mu = P_1 \mu_1 + P_2 \mu_2$$

und die gesuchte Invariante die Resultante von P_1 *und* P_2.

Der dem Connex $(1, 1)$: $a_x u_\alpha = 0$ *conjugirte Connex ist*

$$(abu)(\alpha\beta x) = 0;$$

der dem Connex $(2, 1)$: $a_x^2 u_\alpha = 0$ *conjugirte:*

$$(abu)^2 (cdu)^2 (\beta\gamma x)(\alpha\delta x) = 0,$$

und der dem Connex $(2, 2)$: $a_x^2 u_\alpha^2 = 0$ *conjugirte schliesslich*

$$(W + 3U^2)^3 - 27(UW - U^3 - V^2)^2 = 0,$$

worin

$$U = -\tfrac{1}{12}(abu)^2 (\alpha\beta x)^2,$$
$$V = -\tfrac{1}{12}(abu)(bcu)(cau)(\alpha\beta x)(\beta\gamma x)(\gamma\alpha x),$$
$$W = \tfrac{1}{8}(abu)^2 (cdu)^2 (\alpha\gamma x)^2 (\beta\delta x)^2 - 9U^2$$

ist.

Man kann sagen, dass sich der conjugirte Connex auf eine wisse Art zu dem gegebenen Connex verhält, wie die Gemmtheit der Tangenten an eine Curve zu den Punkten dieser rve.

Der conjugirte Connex des conjugirten ist wieder der urrüngliche.

Die Elemente zweier einander conjugirter Connexe entsprechen h ein-eindeutig.

Die Ordnung und die Classe des conjugirten Connexes eines onnexes (n, m) *sind im Allgemeinen:*

$$n' = m\{nm + 2(n-1)(m-1)\},$$
$$m' = n\{mn + 2(m-1)(n-1)\}.$$

Von Literatur über die conjugirten Connexe citiren wir sser der Clebsch-Lindemann'schen *Geometrie* eine Arbeit on Kyparissos Stephanos, *Bull. des sciences math.*, (2), , 1880.

Die Beziehung, welche zwischen dem gegebenen Connex und einem conjugirten besteht, ist ein specieller Fall einer ein-eineutigen Transformation eines Connexes. Wenn wir, anstatt die oordinaten y, v der Punkte und Geraden des neuen Connexes, ie am Anfang dieses Paragraphen, den partiellen Derivirten er linken Seite der Gleichung des gegebenen Connexes proortional zu setzen, diese Coordinaten y, v rationalen ganzen unktionen der x und der u proportional und derart annehmen, lass sich auf ähnliche Art mit Hülfe dieser Beziehungen auch lie x und u rational aus den y und v ableiten lassen, so ergibt sich eine *birationale Transformation des Connexes.*

Bei dem Studium dieser Transformation wurde man zu der Untersuchung einer Zahl geführt, die für den Connex das ist, was das *Geschlecht* für die Curven bedeutet, d. h. einer Zahl, lie von den Zahlen abhängt, welche die Ordnung und die Classe les Connexes angeben, und deren Werth bei einer birationalen Transformation dieses Connexes unverändert bleibt.

Dieselbe Untersuchung lässt sich auch bei *Coincidenzen* anstellen; dabei ist bemerkenswerth, dass die Connexe und Coincidenzen, da sie keine Mannigfaltigkeiten nur einer Dimension darstellen, nothwendigerweise nicht *ein einziges Geschlecht*, sondern *mehrere* Geschlechter besitzen. Siehe Kap. 9, § 4.

Für einen allgemeinen Connex (n, m) *ist die Zahl*

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} \cdot \frac{(m-1)(m-2)}{2}$$

eines der Geschlechter.

Für eine Coincidenz, welche der Schnitt der beiden Connex (n, m), (n', m') *ist, gibt die Zahl*

$$\pi = \frac{(n+n'-1)(n+n'-2)}{2} \cdot \frac{(m+m'-1)(m+m'-2)}{2} -$$
$$- \frac{(n'-1)(n'-2)}{2} \cdot \frac{(m'-1)(m'-2)}{2} -$$
$$- \frac{(n-1)(n-2)}{2} \cdot \frac{(m-1)(m-2)}{2}$$

eines der Geschlechter an.

§ 3. Die Hauptcoincidenz eines Connexes. Integralcurve eines Connexes.

Die Coincidenz, welche ein gegebener Connex mit dem ide tischen Connex $u_x = 0$ gemeinschaftlich hat, heisst, wie sch oben gesagt wurde, Hauptcoincidenz des gegebenen Connexes $(n, m$

Jedem Punkt sind in dieser Figur m durch diesen Punl gehende Strahlen zugeordnet, welche die von diesem Punl nach der entsprechenden Curve des Connexes gezogenen Ta genten sind, und jeder Geraden sind n auf ihr gelegene Punk zugeordnet, welche die Schnitte der Geraden mit der Curve sin die in dem Connex der gegebenen Geraden entspricht.

Jedem Connex entspricht eine Hauptcoincidenz; umgekeh aber gibt es unendlich viele Connexe, die derselben Hauptcoi cidenz entsprechen; denn alle Connexe von dem Typus

$$f + Mu_x = 0,$$

worin M eine Form mit zwei Reihen von Variabelen und v den Graden $n-1$ in den x und $m-1$ in den u bezeichn haben offenbar dieselbe Hauptcoincidenz.

Das Studium der Hauptcoincidenz eines Connexes steht besonderer und enger Beziehung zu der Untersuchung der *gebraischen* Differentialgleichungen 1ter Ordnung.

Durch einen Punkt x der Ebene gehen m Gerade d Hauptcoincidenz; betrachten wir nun die m unendlich klein Strecken der Geraden in der Umgebung des Punktes x als unendlich kleinen Bogen von m durch diesen Punkt gehend

urven, so erhalten wir ein System von Curven von der Behaffenheit, dass durch jeden Punkt der Ebene m Curven des ystems gehen.

Die Differentialgleichung dieses Curvensystems ist leicht zu mitteln; denn, wenn x und u ein Punkt bez. eine Gerade sind, ie sich in der Coincidenz entsprechen, so hat man:

$$a^n u_\alpha^m = 0,$$
$$u_x = 0.$$

Betrachtet man einen Nachbarpunkt $x + dx$ auf der eraden u, so ist

$$u_{dx} = 0,$$
$$u_x = 0;$$

araus folgt:

$$u_1 : u_2 : u_3 \equiv \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ dx_2 & dx_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ dx_3 & dx_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ dx_1 & dx_2 \end{vmatrix},$$

nd durch Substitution dieser Werthe in die Gleichung des Connexes

$$a_x^n (\alpha x dx)^m = 0;$$

ieses ist eine Differentialgleichung 1ter Ordnung und m^{ten} Grads.

Selbstverständlich kann man auch auf correlative Art verfahren und so zu einer Differentialgleichung 1ter Ordnung und n^{ten} Grads in Liniencoordinaten kommen. *Das durch diese beiden Arten von Differentialgleichungen dargestellte Curvensystem ist jedoch immer dasselbe;* solche Curven werden *die Hauptcoincidenzcurven oder die Integralcurven des Connexes* genannt.

Man kann so mit Hülfe eines Connexes jede Differentialgleichung 1ter Ordnung mit algebraischen Coefficienten erhalten.

Ein einfaches Beispiel für die Art, auf welche die Integralcurven eines Connexes bestimmt werden, ist das folgende:

Es liege der Connex $(1, 1)$ vor, der sich im Allgemeinen auf die canonische Form

$$k_1 u_1 x_1 + k_2 u_2 x_2 + k_3 u_3 x_3 = 0$$

reduciren lässt. Die entsprechende Differentialgleichung lautet:

$$(k_2 - k_3) \frac{dx_1}{x_1} + (k_3 - k_1) \frac{dx_2}{x_2} + (k_1 - k_2) \frac{dx_3}{x_3} = 0,$$

deren Integral

$$x_1^{k_2 - k_3} x_2^{k_3 - k_1} x_3^{k_1 - k_2} = \text{Const.}$$

ist.

Die durch diese Gleichung dargestellten Curven sind die Integralcurven.

Die Theorie der Differentialgleichungen 1ter Ordnung steht auf diese Art in enger Beziehung zu der Theorie der Connexe; dies ist auch der Grund, weshalb die genialen Untersuchungen Lie's über die Transformationsgruppen (vergl. *Repert.* 1, Kap. 9) und speciell über die Berührungstransformationen (ib., § 2) ihre geometrische Anwendung, die von so grosser Bedeutung ist, in der Lehre von den ebenen Connexen finden.

Der Ort der Punkte der Ebene, welche so beschaffen sind, dass von den ihnen in der Hauptcoincidenz entsprechenden Strahlen zwei zusammenfallen, ist eine Curve $F = 0$, die zugleich der Ort der Cuspidalpunkte der Integralcurven des Connexes ist. — Offenbar sind die Punkte von $F = 0$ auch diejenigen Punkte der Ebene, denen in dem Connex Curven entsprechen, die durch diese Punkte gehen.

Correlativ:

Die Enveloppe der Geraden der Ebene, welche so beschaffen sind, dass von den ihnen in der Hauptcoincidenz entsprechenden Punkten zwei zusammenfallen, ist eine Curve $F' = 0$, die zugleich die Enveloppe der Inflexionstangenten der Integralcurven des Connexes ist. — Offenbar sind die Tangenten von $F' = 0$ auch diejenigen Geraden der Ebene, denen in dem Connex sie berührende Curven entsprechen.

Die Cuspidaltangenten der Integralcurven hüllen eine Curve ein, die wir $\Phi = 0$ nennen wollen, und die Inflexionspunkte der Integralcurven bilden eine andere Curve, die wir mit $\Phi' = 0$ bezeichnen.

Die Ordnung von $F = 0$ ist die $(m - 1)(2n + m)^{te}$ und die Classe von $F' = 0$ die $(n - 1)(2m + n)^{te}$.

Die Classe von $\Phi = 0$ ist die $(n^2 + 2mn - n + m)^{te}$ und die Ordnung von $\Phi' = 0$ die $(m^2 + 2mn - m + n)^{te}$.

Die Anzahl der Doppelpunkte von $F = 0$ beträgt

$$\tfrac{1}{2}(m - 2)(m - 3)\{(2n + m)^2 + 3m\}$$

und die Anzahl der Cuspidalpunkte:

$$3(m - 2)(n^2 + mn + m).$$

Vertauscht man in diesen Ausdrücken n mit m, so ergibt sich die Anzahl der Doppeltangenten bez. der Inflexionstangenten von $F' = 0$.

§ 4. Der Connex (1, 1).

Geometrisch stellt der Connex (1, 1) nichts Anderes, als ine *ebene Collineation* (siehe oben Kap. 1, § 3) dar; bei ihm ntspricht jedem Punkt x ein Punkt y, welcher das Centrum es Büschels der Geraden ist, die dem Punkt x zugeordnet sind. Venn

$$0 = a_x u_\alpha = \sum a_{ij} u_i x_j = f, \ (a_{ij} \neq a_{ji})$$

lie Gleichung des Connexes ist, so sind die Coordinaten des lem Punkt (x) entsprechenden Punkts (y)

$$y_i \equiv a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + a_{i3} x_3$$

ınd die Coordinaten der Geraden (v), welche (u) entspricht:

$$v_i \equiv a_{1i} u_1 + a_{2i} u_2 + a_{3i} u_3.$$

Das volle System der invarianten Bildungen der Form

$$a_x u_\alpha$$

hat Clebsch gefunden. Es besteht aus 7 Formen. *Math. Ann.,* 1 vergl. auch *Repert.,* Bd. 1, p. 345.

Dieses System enthält die drei Invarianten:

$$i = a_\alpha, \ i_1 = b_\alpha a_\beta, \ i_2 = b_\alpha a_\gamma c_\beta.$$

Mittelst dieser Invarianten lässt sich die Discriminante der Form, nämlich

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

durch die Formel

$$\Delta = \frac{i^3 + 2i_2 - 3ii_1}{6} \text{ ausdrücken.}$$

Die gegebene Form $a_x u_\alpha$ lässt sich im Allgemeinen auf die canonische Form

$$k_1 u_1 x_1 + k_2 u_2 x_2 + k_3 u_3 x_3$$

zurückführen.

Für diese canonische Form sind die drei Invarianten i, i_1, i_2:

$$\begin{aligned} i &= k_1 + k_2 + k_3, \\ i_1 &= k_1^2 + k_2^2 + k_3^2, \\ i_2 &= k_1^3 + k_2^3 + k_3^3. \end{aligned}$$

Zur Bestimmung der k (der Coefficienten der canonischen Form) dient mithin die Gleichung

$$k^3 - ik^2 + \tfrac{1}{2}(i^2 - i_1)k - \tfrac{1}{6}(i^3 - 3ii_1 + 2i_2) = 0,$$

die mit

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22} - k, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} - k \end{vmatrix} = 0$$

äquivalent ist.

Eine *Zwischenform* der Form f ist

$$f_1 = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial u_i} = a_x u_\beta b_\alpha,$$

welche, gleich Null gesetzt, die Collineation darstellt, die sich aus der zweimaligen Anwendung der Collineation $f = 0$ ergibt.

Der *conjugirte Connex* des Connexes $f = 0$ ist

$$g = (abu)\,(\alpha\beta x) = 0,$$

der sich durch u_x, f und f_1 auf die folgende Art ausdrücken lässt:

$$g = (i^2 - i_1)u_x - 2if + 2f_1.$$

Der Connex $g = 0$ stellt die Transformation dar, welche zu der durch $f = 0$ gegebenen Transformation invers ist.

Construirt man die Zwischenformen

$$f_2 = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f_1}{\partial u_i} = \sum \frac{\partial f}{\partial u_i}\frac{\partial f_1}{\partial x_i},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f_h = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f_{h-1}}{\partial u_i} = \sum \frac{\partial f}{\partial u_i}\frac{\partial f_{h-1}}{\partial x_i},$$

und die

$$g_h = \sum \frac{\partial g}{\partial x_i}\frac{\partial g_{h-1}}{\partial u_i} = \sum \frac{\partial g}{\partial u_i}\frac{\partial g_{h-1}}{\partial x_i}, \quad (g_0 \equiv g),$$

so ergibt sich:

Alle f_h lassen sich linear durch u_x, f, f_1 ausdrücken. Die $f_h = 0$ stellen die Collineationen dar, welche eine $(h+1)$-malige Anwendung der Collineation $f = 0$ liefert.

Die $g_h = 0$ repräsentiren die Collineationen, welche zu den durch die $f_h = 0$ dargestellten Collineationen invers sind.

Gibt man f die oben angegebene canonische Form, so lassen sich f_h, g, g_h durch die Formeln ausdrücken:

$$f_h = k_1^{h+1} u_1 x_1 + k_2^{h+1} u_2 x_2 + k_3^{h+1} u_3 x_3,$$
$$\tfrac{1}{2} g = k_2 k_3 u_1 x_1 + k_3 k_1 u_2 x_2 + k_1 k_2 u_3 x_3,$$
$$\tfrac{1}{2} g_h = (k_2 k_3)^{h+1} u_1 x_1 + (k_3 k_1)^{h+1} u_2 x_2 + (k_1 k_2)^{h+1} u_3 x_3.$$

Näheres über den Connex (1, 1) findet man bei Clebsch, *Math. Ann.*, 1 und in der Clebsch-Lindemann'schen *Geometrie.* Andere hierher gehörige Arbeiten sind von Battaglini, *Giorn. di mat.*, 21, 22; *Atti Acc. Napoli*, 1880; *Memorie Acc. Lincei*, (3), 9, 1880; Lazzeri, *Atti Ist. Veneto*, (6), 3, 1885.

§ 5. Der Connex (1, 2).

Dieser Connex wurde zuerst von Godt, *Dissert.*, Göttingen 1873 untersucht und die Resultate, zu denen er gekommen, von Clebsch auf den Connex $(1, m)$ ausgedehnt.

Bei dem Connex (1, 2) *ist die Curve* $F = 0$ (siehe oben § 3) *eine allgemeine Curve* 4ter *Ordnung ohne singuläre Punkte.*

Offenbar können in diesem Fall die Curven $F' = 0$, $\Phi' = 0$ nicht existiren, da jede Gerade der Ebene, weil $n = 1$ ist, mit *nur einem* ihrer Punkte ein Element der Hauptcoincidenz bildet, und es daher nicht vorkommen kann, dass *zwei* solche Punkte zusammenfallen.

Die Curve $F = 0$ hat die Gleichung:

$$a_x b_x (\alpha\beta x)^2 = 0,$$

und die Curve $\Phi = 0$:

$$(abu) c_\alpha u_\alpha u_\beta^2 u_\gamma^2 = 0.$$

Die Curve Φ ist also von der 6ten Klasse.

Ueber den dem Connex (1, 2) conjugirten Connex siehe oben § 2.

In jedem Connex (1, 2): $a_x u_\alpha^2 = 0$ *bilden die Punkte, deren entsprechende Kegelschnitte in zwei Punkte zerfallen, die Curve* 3ter *Ordnung*

$$a_x b_x c_x (\alpha\beta\gamma)^2 = 0,$$

und die Geraden, welche die beiden Punkte, in die jeder dieser Kegelschnitte zerfällt, miteinander verbinden, sind die Tangenten der Curve 3ter *Classe*

$$(abc)(\alpha\beta\gamma) u_\alpha u_\beta u_\gamma = 0,$$

während die nämlichen Punktepaare sich ihrerseits auf der Curv 3ter *Ordnung*

$$(abc)\,(\alpha\beta x)\,(\beta\gamma x)\,(\gamma\alpha x) = 0$$

befinden.

In jedem Connex $(1, 2)$ *gibt es 7 Gerade, die, mit einem beliebigen ihrer Punkte zusammengenommen, Elemente der Haupt coincidenz bilden.* Diese Geraden heissen *Grundstrahlen. Si machen einen Theil des Systems der Integralcurven aus, sind ein Theil der Doppeltangenten der Curve* $F = 0$ *und die einzige Doppeltangenten von* $\Phi = 0$.

Die Gleichung

$$u_v = (auv)u_\alpha{}^2 = 0$$

stellt, wenn in ihr die v als Parameter angesehen werden, da Tangentialnetz (vergl. Kap. 5) der Curven 3ter Klasse dar, welch die 7 Grundstrahlen berühren.

Wenn die Gerade v eine der übrigen 21 Doppeltangente von $F = 0$ (siehe Kap. 8) *ist, so zerfällt die Curve* $u_v = 0$ *i einen Punkt, nämlich einen der 21 Schnittpunkte von zweien de 7 Grundstrahlen, und in einen Kegelschnitt, welcher der Be rührungskegelschnitt an die anderen 5 Strahlen ist.*

Wichtig ist das folgende Theorem:

Die Hauptcoincidenz eines Connexes $(1, 2)$ *lässt sich stet als Hauptcoincidenz eines Connexes von der speciellen Form*

$$a_x u_2 u_3 + b_x u_3 u_1 + c_x u_1 u_2 = 0$$

darstellen; dabei ist diese Gleichung auf drei der 7 Grundstrahle bezogen und sind diese 3 Strahlen zu Seiten des Basisdreieck der Coordinaten genommen.

Die Geraden $a_x = 0$, $b_x = 0$, $c_x = 0$ *sind die drei Doppel tangenten von* $F = 0$, *welche auf die in einem früheren Theorem angegebene Art den drei Eckpunkten des Basisdreiecks entspreche (das zu Seiten drei andere Doppeltangenten hat).*

Aus dem Gesagten geht klar hervor, dass die Theorie de Connexe $(1, 2)$ in enger Beziehung zu der Lehre von den ebene Curven 4ter Ordnung steht. Vergl. Kap. 8.

Ueber den Connex $(1, 2)$ siehe auch Peano, *Atti Ac Torino,* 16, 1881.

§ 6. Die Connexe $(1, m)$ und Literaturangaben über de Connex $(2, 2)$.

Die vorstehenden Resultate, zu denen, wie wir schon obe sagten, Godt, kam, wurden von Clebsch verallgemeinert un auf den Connex $(1, m)$ ausgedehnt.

Indem wir auf die Darstellung in den *Vorlesungen über Geometrie* von Clebsch-Lindemann verweisen, wo man Näheres findet, wollen wir hier nur einiges Wenige mittheilen.

In dem Connex $(1, m)$ *gibt es* $m^2 + m + 1$ *Grundstrahlen,* die, wie in § 5, definirt werden.

Die Ordnung von $F = 0$ *ist die* $(m - 1)(m + 2)^{\text{te}}$; *die Anzahl der Doppelpunkte:*

$$\tfrac{1}{2}(m - 2)(m - 3)[(m + 2)^2 + 3m];$$

die Anzahl der Cuspidalpunkte:

$$3(m - 2)(2m + 1);$$

das Geschlecht:

$$p = \tfrac{1}{2}m(7m - 11);$$

die Classe ist die $(3m^2)^{\text{te}}$;
die Anzahl der Inflexionspunkte beträgt:

$$12m(m - 1),$$

der Doppeltangenten: $\tfrac{1}{2}(9m^4 - 40m^2 + 35m + 2)$.

Die $m^2 + m + 1$ Grundstrahlen sind die einzigen Doppeltangenten der Curve $\Phi = 0$ und sind auch ein Teil der Doppeltangenten von $F = 0$.

Man kann dann auch hier gewisse Curven $u_v = 0$ von der $(m + 1)^{\text{ten}}$ Classe betrachten, die denen in § 5 analog sind, und kann die in demselben Paragraphen angegebene Beziehung zwischen speciellen Curven $u_v = 0$ und den anderen

$$\tfrac{3}{2}m(m - 1)(3m^2 + 3m - 11)$$

Doppeltangenten von $F = 0$ weiter ausdehnen. Wir halten es jedoch nicht für angemessen, länger bei diesen Einzelheiten zu verweilen.

Die Theorie der ternären Connexe begründete, wie man wohl sagen kann, Clebsch mit der Untersuchung des Connexes (1, 1), *Math. Ann.,* 1 und besonders mit der in den *Math. Ann.,* 6 enthaltenen Arbeit und der eingehenden Darstellung in seinen 1871, 1872 gehaltenen *Vorlesungen über Geometrie,* die von Lindemann bearbeitet und zuerst im Jahr 1876 herausgegeben wurden.

Den Connex (2, 2) behandelte zuerst Clebsch, der den zu ihm *conjugirten Connex* (siehe oben § 2) berechnete; auf ihn folgten Armenante, *Atti Lincei,* (2), 3, 1876 und Peano, *Atti Acc. Torino,* 16, 1881. Mit *speciellen* Connexen (2, 2) beschäftigten

sich Battaglini, *Giorn. di mat.*, 19, 1881; *Atti Acc. Napol* 1879; Amodeo, *Giorn. di mat.*, 25, 1885 und Pannelli, il 26, 1888.

Erweiterungen der Tbeorie der Connexe auf den Rau findet man bei Battaglini, *Mem. Acc. Lincei*, (3), 12, 188 *Giorn. di Mat.*, 22, 1884, der die *bilinearen quaternären Form* untersuchte; Lazzeri, *Mem. Lincei*, (4), 4, 1887, der d Connex (1, 1) im Raum betrachtete; Krause, *Math. Ann.*, 1 der den Connex (1, 2) im Raum behandelte und D. Sintso *Théorie des connexes dans l'espace*, *Bull. des sciences math.*, 189 Der letztere Artikel ist ein Bericht über ein russisches We des Verfassers.

Kapitel VII.

Die ebenen Curven dritter Ordnung.

§ 1. Allgemeines über die Curven dritter Ordnung. Wendepunkte. Tangentialpunkte.

Die allgemeine Gleichung einer Curve 3ter Ordnung enthält mogen zehn Coefficienten; sind daher in der Ebene neun Punkte illkürlich gegeben, so geht im Allgemeinen eine einzige Curve ritter Ordnung durch sie.

Die neun Punkte können jedoch derart von einander abängig sein, dass unendlich viele Curven 3ter Ordnung durch e gehen.

Alle durch acht Punkte der Ebene gehenden Curven 3ter Ordung gehen auch durch einen neunten von den ersten bestimmten unkt.

Die Curve 3ter Ordnung ist im Allgemeinen von der 6ten lasse und dem Geschlecht Eins; sie hat neun Wende- oder nflexionspunkte.

Hat sie einen Doppelpunkt, so ist ihr Geschlecht Null; sie t dann von der 4ten Classe und hat nur drei in einer Geraden egende Wendepunkte. Die Gleichung einer solchen Curve hängt on acht Constanten ab.

Wenn die Curve eine Spitze hat, so ist ihr Geschlecht wieder ull, ihre Classe die 3te und die Anzahl der Wendepunkte 1. ie Gleichung einer solchen Curve hängt von sieben Constanten ab.

Die Gerade, welche zwei Wendepunkte verbindet, geht immer urch einen dritten Wendepunkt.

Die neun Wendepunkte liegen zu je dreien auf zwölf Geraden nd durch jeden Wendepunkt gehen vier dieser Geraden.

Die neun Wendepunkte können nicht sämmtlich reell sein, öchstens drei von ihnen sind reell.

Die vier durch einen Wendepunkt gehenden Geraden bilden edesmal eine äquianharmonische Gruppe.

Die 12 Geraden ordnen sich in vier Gruppen zu je dr so dass jede aus drei Linien bestehende Gruppe sämmtlic 9 Wendepunkte enthält; jedes der Dreiecke, welches die dr Geraden eines Tripels zu Seiten hat, heisst *Wendepunktsdreie*

Durch die neun Wendepunkte einer Curve 3ter Ordnu gehen unendlich viele solche Curven, welche sämmtlich dieselb Wendepunkte haben. Das Büschel aller dieser Curven heis *syzygetisches Büschel.*

Bezeichnet man mit $f = 0$ die Gleichung der gegeben Curve und mit $H = 0$ die der Hesse'schen Curve (vergl. Kap. *so lautet die Gleichung des syzygetischen Büschels*

$$\lambda_1 f + \lambda_2 H = 0.$$

Unter den Curven dieses Büschels sind daher auch die v Wendepunktsdreiecke enthalten.

Der Polarkegelschnitt eines Wendepunkts zerfällt in z Gerade, von denen die eine die Wendetangente und die and eine Gerade ist, welche die harmonische Polare (Gerade) Wendepunkts heisst.

Die harmonische Polare des Wendepunkts hat die Eig schaft, dass jede durch diesen Punkt gezogene Gerade sie in ein Punkt schneidet, welcher in Bezug auf die beiden anderen Pun in denen die Gerade die Curve 3ter Ordnung trifft, harmoni conjugirt zu dem Wendepunkt ist. Daher der Name *harmonis Polare (bez. Gerade).*

Daraus folgt auch:

Die harmonische Polare eines Wendepunkts schneidet Curve 3ter Ordnung in den drei Berührungspunkten der von Wendepunkt an die Curve gezogenen Tangenten.

Alle Curven des syzygetischen Büschels haben auch diesel harmonischen Polaren.

Die Tangenten in zwei Wendepunkten treffen sich auf harmonischen Polaren des Wendepunkts, welcher mit den erst in einer Geraden liegt.

Die harmonischen Polaren dreier in einer Geraden liegen Wendepunkte schneiden sich in demselben Punkt.

Jedem Punkt einer Curve 3ter Ordnung entspricht ein ande welcher der Schnitt der Tangente in dem ersteren Punkt der Curve ist.

Dieser Punkt heisst *Tangentialpunkt* oder *Begleiter (Sat* des gegebenen.

Die drei Tangentialpunkte dreier in einer Geraden liegenden Punkte gehören ebenfalls einer Geraden an, der Begleiterin (Satelite) der ersteren.

Es gibt eine Gerade der Ebene (die Begleiterin der unendlich fernen Geraden), welche die Eigenschaft hat, dass der Abstand eines Punkts der Curve von ihr in constantem Verhältniss zu dem Product der Abstände desselben Punkts von den drei Asymptoten (den Tangenten in den drei unendlich fernen Punkten der Curve) steht.

Die vier Berührungspunkte der vier Tangenten, welche sich von einem Punkt P der Curve an die Curve ziehen lassen, sind die Ecken eines Vierecks, dessen drei Gegenseiten-Schnittpunkte oder Diagonalpunkte (-Ecken) ebenfalls auf der Curve liegen; und die Tangenten an die Curve in diesen drei Punkten treffen sich ebenso wie die Tangente in P in einem und demselben Punkt der Curve.

Das anharmonische Verhältniss der vier Tangenten, welche sich von einem Punkt der Curve an die Curve ziehen lassen, bleibt bei dem Variiren des Punktes constant. Dieser Satz ist sehr wichtig.

Durch einen Punkt A einer Curve 3ter Ordnung ziehen wir eine Gerade, welche die Curve in zwei anderen Punkten P, Q schneidet und bilden dann das vollständige Viereck, dessen Ecken die vier Punkte sind, zu denen A der Tangentialpunkt (Begleiter) ist; zwei Gegenseiten dieses Vierecks schneiden dann die gegebene Gerade in zwei in Bezug auf P und Q einander harmonisch conjugirten Punkten. Maclaurin'scher Satz.

Wenn die Tangentialpunkte dreier Punkte A, B, C in einer Geraden liegen, so gehören auch die Punkte A′, B′, C′, in denen BC, CA, AB von neuem die Curve schneiden, einer Geraden an.

Es gibt unendlich viele Polygone von 2n Seiten und 2n Ecken, deren Ecken auf einer allgemeinen Curve 3ter Ordnung liegen und von denen die geraden Seiten sich in einem Punkt A der Curve treffen, und die ungeraden durch einen zweiten Punkt B der Curve gehen. Die Steiner'schen Polygone, Crelle, 32. Die beiden zusammengehörigen Punkte *A* und *B* heissen *ein zur Zahl n gehöriges Steiner'sches Punktepaar (associati).*

Diese Polygone werden am besten mit Hülfe der elliptischen Functionen studiert.

Die Hesse'sche und Steiner'sche Curve einer cubischen Curve sind identisch und von der 3ten Ordnung.

Die Cayley'sche Curve einer cubischen Curve ist 3ter Classe und 6ter Ordnung; sie ist die Enveloppe aller derjenigen Polar-

kegelschnitte der Punkte der Ebene, welche in zwei Gerade zer fallen.

Jede beliebige Curve 3ter Ordnung lässt sich als die Hesse sche dreier anderer Curven 3ter Ordnung ansehen und jede Curv 3ter Classe als die Cayley'sche einer Curve 3ter Ordnung.

Man habe zwei Gerade u, u' und betrachte das Büsch von Polarkegelschnitten der Punkte von u bez. der Curve 3t Ordnung. Der Pol von u' bez. eines jeden dieser Kegelschnitt des Büschels beschreibt einen Kegelschnitt, welcher *gemisch (mista) Poloconica (Polkegelschnitt) der zwei Geraden* genannt wir (Cremona). Wenn die beiden Geraden zusammenfallen, so gi der Satz:

Die Curve, welche von den Polargeraden aller Punkte ein Geraden bez. einer Curve 3ter Ordnung eingehüllt wird, ist e Kegelschnitt und heisst die gemeine (pura) Poloconica der Gerade

Die Hesse'sche Curve wird von jeder gemeinen Poloconi einer Geraden in drei Punkten berührt.

Legt man durch die drei Punkte, in denen die Curve v Hesse von einer gemeinen Poloconica berührt wird, einen b liebigen zweiten Kegelschnitt, so schneidet dieser die Curve v Hesse in drei weiteren Punkten, in denen dieselbe von ein zweiten gemeinen Poloconica berührt wird.

Wenn man von einem Punkt der Ebene die sechs Tangent an eine Curve 3ter Ordnung zieht, so liegen die Tangentialpun der sechs Berührungspunkte auf einem Kegelschnitt, welcher konische Begleiterin (Satellite) des Punktes a oder des Polarkeg schnitts von a (auf welchem sich die sechs Berührungspunkte d sechs Tangenten befinden) genannt wird (Cremona).

Der Polarkegelschnitt eines Punktes und die konische B gleiterin dieses Punktes berühren sich in den beiden Punkten, welchen sie von der Polargeraden des Punktes geschnitten werd

Wenn ein Kegelschnitt mit einer Curve 3ter Ordnung zu Berührungspunkte 2ter Ordnung hat (zwei Punkte, von denen je als die Vereinigung von drei unendlich nahen Punkten zu trachten ist), so geht die Gerade, welche diese beiden Punkte v bindet, durch einen Wendepunkt. Es gibt neun Systeme solc Kegelschnitte.

Durch jeden Berührungspunkt einer von einem Wendepu an die Curve gezogenen Tangente geht ein Kegelschnitt, welc mit der Curve in diesem Punkt eine sechspunktige Berühr (eine Berührung 5ter Ordnung) hat.

Auf der Curve 3ter Ordnung gibt es 27 Punkte, in denen Kegelschnitte die Curve 6-punktig berühren. Diese Punkte entsprechen auch den 27 Schnittpunkten der Curve mit den 9 harmonischen Polaren der 9 Wendepunkte der Curve 3ter Ordnung.

Es gibt drei verschiedene und je aus einer zweifach unendlichen Anzahl von Kegelschnitten bestehende Systeme, welche eine Curve 3ter Ordnung in drei Punkten berühren.

Die Tangentialpunkte der drei Punkte, in welchen einer dieser Kegelschnitte die Curve 3ter Ordnung berührt, liegen in einer Geraden.

Die cubischen Plancurven wurden studirt von: Newton, *Enumeratio linearum tertii ordinis,* 1704 und Maclaurin, *De linearum geometricarum proprietatibus generalibus Tractatus,* ins Französische übertragen von de Jonquières: *Mélanges de géométrie pure,* Paris, 1856, p. 197. Neuer sind Plücker, *System der analytischen Geometrie,* 1835; Steiner, *Werke,* 2; Hesse, *Crelle,* 28, 36, 38; Salmon, *Crelle,* 42 und die Arbeiten von Cayley, *Phil. Trans.,* 147; Chasles, *Géom. supérieure,* Paris 1852; Moebius, *Abh. der S. Ges.,* 1848, 1849; *Werke;* Bd. 2; Cremona, *Introd. etc.,* Bologna 1862, deutsch 1865; Durège, *Die ebenen Curven 3ter Ordnung,* Leipzig, 1871 und vielen Anderen.

Die Curven 3ter Classe haben Cayley, *Journ. de Liouville,* 9, 1844 = *Coll. Math. Pap.,* 1, p. 183; *Lond. Phil. Trans.,* 147, 1857 = *Coll. Math. Pap.,* 2, p. 381; Hesse, l. c.; Bellavitis, *Atti Istituto Veneto,* 1852 etc. untersucht.

Die bedeutendsten Werke, in denen man die Eigenschaften der Curven 3ter Ordnung zusammengestellt findet, sind von Cremona, l. c.; Salmon, *Analytische Geometrie der höheren ebenen Curven,* Leipzig, 1882; Durège, l. c.; Schroeter, *Die Theorie der ebenen Curven 3ter Ordnung,* Leipzig, 1888 und die oft citirte Clebsch-Lindemann'sche *Geometrie.*

Die Theorie der elliptischen Funktionen wurde zuerst in einem Aufsatz von Clebsch, *Crelle,* 63 auf das Studium der ebenen Curven 3ter Ordnung angewendet. Man sehe darüber auch die *Geom.* von Clebsch-Lindemann nach und Kap. 11 Bd. 2 des Halphen'schen Werkes *Fonctions elliptiques,* Paris 1886—1891.

In Betreff der Eigenschaften der verschiedenen Curven 3ter Ordnung vom Geschlecht Null (*unicursalen, rationalen*) citiren wir das neuere Buch von Binder, *Theorie der unicursalen*

Plancurven 4ter bis 3ter Ordnung in synthetischer Behandlung, Leipzig, 1896 und die Arbeiten von Pittarelli, *Rend. Acc. Napoli*, 1885; *Mem. Acc. Lincei*, (4), 3, 1886.

§ 2. Projective Erzeugungsweisen der Curven 3ter Ordnung.

Sind in der Ebene drei Punktepaare A, A_1; B, B_1; C, C_1 gegeben, welche nicht die Gegenecken eines vollständigen Vierecks sind, so ist der Ort eines Punktes P, welcher die Eigenschaft besitzt, dass die drei Strahlenpaare PA, PA_1; PB, PB_1; PC, PC_1 einer Involution angehören, eine allgemeine Curve 3ter Ordnung welche durch die sechs gegebenen Punkte geht.

Diesem Ort gehören die Schnittpunkte von AB mit A_1B_1 von AB_1 mit A_1B etc. an, welche wir D bez. D_1 nennen wollen ferner die Punkte

$$E = (AC, A_1C_1),\ E_1 = (AC_1, A_1C) \text{ etc.}$$

Punkte, wie A, A_1; B, B_1; D, D_1 etc. heissen *conjugirt*

Für zwei conjugirte Punkte ist die Eigenschaft charakteristisch, dass *die Tangenten in zwei conjugirten Punkten sich auf der Curve selbst in einem Punkt schneiden, welcher seinerseits mit dem Punkt conjugirt ist, in dem die Gerade, welche die beiden ursprünglichen conjugirten Punkte verbindet, die Curve zum dritten Mal trifft.*

Andere projective Erzeugungsweisen der cubischen Curven sind die folgenden:

Man betrachte ein Kegelschnittbüschel und ein Geradenbüschel, die zueinander projectiv sind (die Parameter eines Kegelschnitts und einer Geraden der beiden Büschel seien durch eine bilineare Relation verbunden); *alsdann ist der Ort der Schnittpunkte eines Strahls mit dem entsprechenden Kegelschnitt eine Curve 3ter Ordnung, welche durch das Centrum des Geradenbüschels und durch die vier Basispunkte des Kegelschnittbüschels geht* (Chasles).

Wenn man auf einer Curve 3ter Ordnung vier Punkte als Basispunkte eines Kegelschnittbüschels annimmt, so schneidet jeder Kegelschnitt dieses Büschels die Curve in zwei veränderlichen Punkten deren Verbindungsgerade durch einen festen Punkt der Curve geht (den Gegenpunkt der vier gegebenen Punkte).

Man betrachte die Schar der Kegelschnitte, welche vier gegebene Gerade berühren; von zwei gegebenen Punkten zieht man die beiden Paare von Tangenten an jeden Kegelschnitt

er Schar; der Ort der Schnittpunkte dieser Tangenten ist dann ine allgemeine Curve 3ter Ordnung.

Eine andere Erzeugungsweise ist die sogenannte Grassmann'sche.

Ein Punkt P beschreibt eine Curve 3ter Ordnung, wenn die Geraden, welche ihn mit drei festen Punkten verbinden, drei ndere feste Gerade in drei in gerader Linie liegenden Punkten chneiden. In diesem Fall umhüllt die bewegliche Gerade, in elcher die drei Schnittpunkte liegen, eine Curve 3ter Classe.

Eine weitere geometrische Construction findet man bei Schröter, *Math. Ann.*, 5.

Ueber die Construction einer Curve 3ter Ordnung, wenn eun Punkte von ihr gegeben sind, und über die Construction es neunten Punktes, durch welchen alle Curven 3ter Ordnung les durch 8 Punkte bestimmten Büschels gehen, siehe besonders Chasles, *Compt. Rend.*, 1853; Cayley, *Quart. J. of math.*, 5, 1862; Cremona, *Introd.*, etc.

§ 3. Canonische Formen der Gleichung der Curven 3ter Ordnung. Verschiedene Classificationen dieser Curven.

Nimmt man zur Ecke ($x_1 = 0$, $x_3 = 0$) des Fundamentaldreiecks der Coordinaten einen Wendepunkt der Curve, zur Geraden $x_3 = 0$ die Wendetangente und zur Geraden $x_2 = 0$ die harmonische Polare desselben Wendepunkts, so lautet die Gleichung der Curve 3ter Ordnung in homogenen Coordinaten:

$$x_3 x_2^2 = a x_1^3 + 3 b x_1^2 x_3 + 3 c x_1 x_3^2 + d x_3^3.$$

Zerlegt man das Polynom auf der rechten Seite in seine drei linearen Factoren, so stellt jeder von diesen, gleich Null gesetzt, eine der drei Tangenten dar, welche von dem Wendepunkt an die Curve gezogen werden können.

Wählt man als Gerade $x_1 = 0$ eine dieser Tangenten, so lässt sich die Gleichung der Curve auf die Form

$$x_3 x_2^2 = x_1 (x_1 - x_3)(x_1 - k^2 x_3)$$

oder auch, bei einer anderen geeigneten Wahl der Axe $x_1 = 0$, auf

$$x_3 x_2^2 = 4 x_1^3 - g_2 x_1 x_3^2 - g_3 x_3^3$$

reduciren.

Wenn die Gleichung der Curve 3ter Ordnung auf eine der vorstehenden Formen zurückgeführt wird, so erkennt man, *dass*

die Coordinaten eines Punkts der Curve elliptischen Functione eines Parameters proportional sind. Man kann nämlich

$$x_1 : x_2 : x_3 = p(u) : p'(u) : 1$$

setzen, worin p, p' die elliptischen Functionen von Weierstrass sin Vergl. Bd. 1, Kap. 16.

Wenn man bei der Reduction der Gleichung der Curve a die letztere Form $g_3 = 0$ erhält, so ergibt sich die sogenannt *harmonische Curve 3ter Ordnung,* welche die Eigenschaft besitz *dass die vier von einem Punkt der Curve an die Curve selb gezogenen Tangenten eine harmonische Gruppe bilden.*

Wenn dagegen $g_2 = 0$ ist, so hat man die *äquianha monische Curve 3ter Ordnung,* für welche der Satz gilt, *dass d vier von einem Punkt der Curve an die Curve selbst gezogene Tangenten eine äquianharmonische Gruppe ausmachen.*

Wird als Fundamentaldreieck der Coordinaten eines d Wendepunktsdreiecke angenommen, so lautet die Gleichung d allgemeinen Curve, dritter Ordnung

$$a(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + 6bx_1x_2x_3 = 0.$$

Nimmt man dagegen das aus den drei Wendetangenten g bildete Dreieck zum Fundamentaldreieck der Coordinaten, so wi die Gleichung der Curve:

$$(x_1 + x_2 + x_3)^3 + 27kx_1x_2x_3 = 0.$$

Die Gleichung einer Curve 3ter Ordnung mit einem Dopp punkt (der rationalen Curve 3ter Ordnung) lässt sich auf d Form bringen:

$$x_1^3 + x_2^3 + 6x_1x_2x_3 = 0,$$

wenn das aus der Geraden $x_3 = 0$, in welcher die drei Wend punkte liegen, und aus den beiden Tangenten in dem Doppelpun $(x_1 = 0,\ x_2 = 0)$ gebildete Dreieck zum Fundamentaldreieck d Coordinaten gewählt wird.

Der Gleichung der Curve 3ter Ordnung mit einer Spitze lä sich die Gestalt

$$x_2^3 - 3x_1^2x_3 = 0$$

geben, indem man das aus der Spitzentangente $(x_1 = 0)$, d Tangente im einzigen Wendepunkt $(x_3 = 0)$ und der Gerad $(x_2 = 0)$, welche die Spitze mit dem Wendepunkt verbindet, g bildete Dreieck zum Fundamentaldreieck nimmt.

Wenn die Gleichung der Curve die Gestalt

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6mx_1x_2x_3 = 0$$

t, so ist die Gleichung der Hesse'schen Form (siehe § 4):

$$H = -6m^2(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + 6(1 + 2m^3)x_1x_2x_3 = 0,$$

d die Gleichung der Cayley'schen in Geradencoordinaten:

$$s = -6m(u_1^3 + u_2^3 + u_3^3) - 6(1 - 4m^3)u_1u_2u_3 = 0.$$

Die Gleichung einer Curve 3ter Ordnung lässt sich so reduren, dass sie nur die Cuben von vier in den Coordinaten linearen ormen enthält.

Eine dieser Formen wähle man willkürlich; sie stellt, gleich ull gesetzt, eine Gerade dar; alsdann betrachte man das Büschel on Polarkegelschnitten der Punkte dieser Geraden in Bezug auf e Curve. Es ergibt sich dann:

Die drei Diagonalen des Vierecks, dessen Ecken die vier asispunkte dieses Kegelschnittbüschels sind, entsprechen den drei nderen linearen Formen, welche in Verbindung mit der gebenen, jede in die 3te Potenz erhoben, zur Darstellung der leichung der gegebenen Curve dienen können. Siehe darüber almon-Fiedler, *Höhere Curven,* Anm. 55.

Jede allgemeine Curve 3ter Ordnung (ohne Doppelpunkte), eren Gleichung nur reelle Coefficienten hat, kann zwei verchiedene Gestalten haben: eine eintheilige mit nur einem reellen Ast Zug), der sich ins Unendliche erstreckt oder eine zweitheilige mit wei getrennten Aesten, siehe Kap. 4, § 1. *Die eintheilige besitzt ie Eigenschaft, dass man von einem ihrer Punkte, ausser der angente in dem Punkt selbst, zwei reelle Tangenten an die Curve ehen kann; die beiden anderen sind imaginär. Die zweitheilige, elche aus einem Oval und einem Ast besteht, der sich ins Unndliche erstreckt, zeichnet sich dadurch aus, dass man von jedem unkt des Ovals ausser der Tangente in diesem Punkt selbst keine elle Tangente an die Curve legen kann, dass sich dagegen von edem Punkt des sich ins Unendliche erstreckenden Astes vier reelle angenten an die Curve ziehen lassen, zwei an das Oval und wei an den Ast, dem der Punkt angehört.*

Die eintheiligen Curven 3ter Ordnung unterscheiden sich nach er Art, auf welche sie von der unendlich fernen Geraden der Ebene geschnitten werden, in:

a) *die elliptische Serpentine, welche nur einen unendli fernen reellen Punkt hat, und deren Tangente in diesem Pun sich in das Endliche erstreckt und mithin eine Asymptote d Curve ist;*

b) *die parabolische Serpentine hat ausser einem reell Punkt im Unendlichen noch mit der unendlich fernen Gerad zwei andere Schnittpunkte, die reell sind und zusammenfalle sie besitzt mithin eine Asymptote im Endlichen und berührt unendlich ferne Gerade;*

c) *die hyperbolische Serpentine mit drei reellen Punkten Unendlichen und daher drei Asymptoten im Endlichen.*

Die zweitheiligen Curven dritter Ordnung theilt man ähnli ein in:

a) *die elliptische Serpentine mit elliptischem Oval und einem ei zigen reellen Punkt im Unendlichen, welcher auf der Serpentine lie*

b) *die elliptische Serpentine mit parabolischem Oval, welcher ein reeller Punkt im Unendlichen und die beiden ander zusammenfallenden Punkte auf dem Oval von parabolischer Gest liegen;*

c) *die elliptische Serpentine mit hyperbolischem Oval; reeller Punkt liegt auf der Serpentine im Unendlichen und z reelle Punkte auf dem Oval von hyperbolischer Gestalt im U endlichen;*

d) *die parabolische Serpentine mit elliptischem Oval; d reelle Punkte im Unendlichen, von denen wenigstens zwei sammenfallen, und die alle auf der Serpentine liegen;*

e) *die hyperbolische Serpentine mit elliptischem Oval; d verschiedene reelle Punkte im Unendlichen; diese drei Punkte lie auf der Serpentine.*

Eine andere Classification derjenigen Curven 3ter Ordnu deren Gleichung nur reelle Coefficienten enthält, nach fü Species von divergirenden Parabeln ist von Newton. Wie schon gesagt haben, lässt sich durch geeignete reelle Tra formation der Coordinaten die Gleichung einer jeden so schaffenen Curve 3ter Ordnung auf den Typus

$$x_3 x_2^2 = a x_1^3 + 3 b x_1^2 x_3 + 3 c x_1 x_3^2 + d x_3^3$$

reduciren, worin a, b, c, d reell sind. Man braucht zu dies Zweck nur eine der (reellen) Wendetangenten der Curve Geraden $x_3 = 0$, einen (reellen) Wendepunkt zum Pu $(x_1 = 0,\ x_3 = 0)$ und die harmonische Polare dieses Punk in Bezug auf die Curve zur Geraden $x_2 = 0$ zu nehmen.

Verlegt man die Wendetangente $x_3 = 0$ ins Unendliche, folgt: *Der Gleichung jeder Curve 3ter Ordnung in Cartesischen ordinaten lässt sich die Gestalt geben:*

$$y^2 = ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d.$$

Nimmt man nun Rücksicht auf die Natur der Factoren des lynoms auf der rechten Seite dieser Gleichung, so kommt man der *Unterscheidung der Curven 3ter Ordnung nach fünf Species ergirender Parabeln* (Newton) d. h.:

a) *Alle drei Factoren des Polynoms sind reell; die Curve teht aus einem Oval und einer Serpentine.*

b) *Ein einziger Factor ist reell; die Curve besteht nur aus er Serpentine.*

c) *Zwei der drei Factoren sind gleich, d. h. das Polynom fällt in $a(x-\alpha)^2(x-\beta)$, worin $\alpha < \beta$ ist; die Curve ist aus er Serpentine und dem Oval zusammengesetzt, welches sich entder auf zwei conjugirte imaginäre Punkte oder auf einen einen reellen Punkt reducirt.*

d) *Das Polygon zerfällt wieder in $a(x-\alpha)^2(x-\beta)$, aber ist grösser als β; das Oval und die Serpentine vereinigen sich rart, dass sie einen einzigen stetigen Ast bilden, der sich selbst neidet; die Curve hat einen Doppelpunkt (Knotenpunkt).*

e) *Alle drei Factoren des Polynoms sind gleich; der Curve mmt dann eine Spitze (ein stationärer oder Rückkehrpunkt) zu.*

Verlegt man dagegen die harmonische Polare $x_2 = 0$ ins endliche, *so lässt sich die Cartesische Gleichung der Curve er Ordnung immer auch schreiben:*

$$y = ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3.$$

Diese Curve 3ter Ordnung hat ein Centrum in dem Wendenkt ($x = 0$, $y = 0$), d. h. jede durch diesen Punkt gezogene hne wird durch ihn halbirt; unterscheidet man nun zwischen n Factoren der rechten Seite, wie oben, so erhält man *die assification der Curven nach fünf Arten von Centralcurven* hasles).

Noch eine weitere Eintheilung der Curven 3ter Ordnung it Plücker angegeben und auch Cayley studirt; sie geht von r Lage und Beschaffenheit der Tangenten (Asymptoten) in den ei unendlich fernen Punkten der Curve aus.

Was die Literatur über die Classification der Curven 3ter rdnung angeht, so citiren wir: Newton, *Enumeratio linearum rtii ordinis*, 1706, p. 19; Euler, *Introd.*, 1848; Chasles,

Aperçu historique, deutsche Ausg. von L. A. Sohnke: *G schichte der Geometrie, hauptsächlich mit Bezug auf die neue Methoden,* Halle, 1839, p. 143 u. Note 20, p. 367; Plück *System der anal. Geom.,* Berlin 1835; Cayley, *Transact. Cambridge,* etc., 11, 1865; Bellavitis, *Società italiana d scienze,* Modena, 1851; Möbius, *Abh. der Sächs. Gesells* 1848, 1849; Durège, *Crelle,* 75, 76; etc.

§ 4. Geometrische Interpretation der Invarianten u Covarianten der ternären cubischen Form.

Von dem System der ternären cubischen Form war Bd. 1, Kap. 12, § 17, p. 336 und folgende die Rede. kehren jetzt zu diesem Gegenstand zurück, um die wichtig geometrischen Interpretationen der dort gefundenen invarian Formen anzugeben.

Es sei die ternäre cubische Form symbolisch durch

$$f = a_x^3 = b_x^3 = \cdots,$$

oder auch mittelst der wirklichen Coefficienten durch

$$f = \sum a_{ihk} x_i x_h x_k$$

ausgedrückt.

Aus den drei invarianten Bildungen Δ, Q, R der bin cubischen Form erhält man durch Anwendung des Uebertragu principes (siehe Bd. 1, Kap. 12) drei für die ternäre cubi Form invariante Bildungen, nämlich:

$$\Theta = (abu)^2 a_x b_x,$$
$$Q_1 = (abu)^2 (cau) c_x^2 b_x,$$
$$F = (abu)^2 (cdu)^2 (acu) (bdu).$$

Die Relation $F = 0$ ist die Gleichung der Curve $f =$ Liniencoordinaten (die Tangentialgleichung der Curve 3ter Ordn

Die Gleichung $\Theta = 0$ liefert für $x =$ Const. die Tange gleichung des Polarkegelschnitts von x und für $u =$ Const. Gleichung der Poloconica der Geraden u (vergl. § 1).

Vermöge der Gleichung $Q_1 = 0$ wird jeder Geraden u Curve 3ter Ordnung zugeordnet als Ort der Punkte x, d Polargerade die Gerade u in einem Punkt treffen, welcher in Bezug auf die Poloconica von u conjugirt ist.

Die Curve 3ter Ordnung $Q_1 = 0$ schneidet die Gerade drei Punkten, die in Verbindung mit den Punkten, in welch

e Curve 3ter Ordnung $f = 0$ trifft, drei Paare derselben In-lution bilden, deren Doppelpunkte diejenigen sind, in welchen u e eigene Poloconica schneidet.

Ueber die Hesse'sche Form H, die Cayley'sche Form s, die ntravariante t und die beiden Invarianten S und T siehe die rmeln *Repert.*, 1, S. 336 und 337.

Gibt man f die canonische Gestalt (vergl. § 3)

$$f = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6mx_1x_2x_3,$$

wird

$$= -2(1-10m^3)(u_1^3+u_2^3+u_3^3) - 2(30m^2+24m^5)u_1u_2u_3,$$
$$= 24m(m^3-1),$$
$$= 6(8m^6+20m^3-1),$$

ährend die Gleichung $F = 0$ von f in Tangentialcoordinaten

$$-\tfrac{1}{2}F = u_1^6+u_2^6+u_3^6-(2+32m^3)(u_1^3u_2^3+u_2^3u_3^3+u_3^3u_1^3) - 24m^2u_1u_2u_3(u_1^3+u_2^3+u_3^3) - (24m+48m^4)u_1^2u_2^2u_3^2 = 0$$

utet. Ueber die Ausdrücke für H und s siehe § 3.

Die Bedingung $S = 0$ gibt an, dass die Hesse'sche Curve on $f = 0$ in drei Gerade zerfällt; die Cayley'sche Curve besteht lsdann aus den drei Doppelpunkten der Hesse'schen und das on letzteren gebildete Dreieck ist Polardreieck in Bezug auf alle olarkegelschnitte der Grundcurve.

Ist $S = 0$, so heisst die Curve 3ter Ordnung *äquianharmonisch; in diesem Fall bilden die vier von einem Punkt der Curve an die Curve selbst gezogenen Tangenten eine äquianharmonische Gruppe* (siehe § 1).

Wenn $T = 0$ ist, wird die Curve 3ter Ordnung *harmonisch* genannt; *alsdann bilden die vier eben genannten Tangenten eine harmonische Gruppe.*

Für $T = 0$ fällt die Hesse'sche Curve der Hesse'schen mit der Grundcurve $f = 0$ wieder zusammen, die Cayley'sche Curve der Hesse'schen dagegen mit $t = 0$.

Die Discriminante der Curve 3ter Ordnung $f = 0$, d. h. die Function, welche, gleich Null gesetzt, die Bedingung für die Existenz des Knotenpunkts angibt, ist

$$R = T^2 - \tfrac{1}{6}S^3.$$

Falls f die oben angegebene canonische Gestalt hat, ist die Discriminante

$$(1+8m^3)^3.$$

Der Ausdruck für diese Discriminante R als Determina
deren Elemente die Coefficienten von f und H sind, wu
Repert., 1, S. 337 angegeben.

Der Quotient $\frac{S^3}{T^2}$ *ist absolute Invariante für die cubische Fo*

Gibt man der cubischen Form wieder die canonische Ges
S. 189, *so ist*

$$\frac{S^3}{T^2} = \frac{384\,m^3(m^3-1)^3}{(8\,m^6+20\,m^3-1)^2}.$$

Wenn mit α *das anharmonische (constante) Verhältniss*
vier von einem Punkt der Curve 3ter Ordnung an die Cu
selbst gezogenen Tangenten bezeichnet wird, so besteht die
merkenswerthe Relation:

$$\frac{S^3}{T^2} = 24\,\frac{(1-\alpha+\alpha^2)^3}{(1+\alpha)^2(2-\alpha)^2(1-2\alpha)^2}.$$

Die nothwendigen und ausreichenden Bedingungen, damit
Curve 3ter Ordnung einen Rückkehrpunkt besitze, sind $S=0$, $T=$

Soll eine Curve 3ter Ordnung in einen Kegelschnitt und
Gerade zerfallen, so ist dazu nöthig und ausreichend, dass

$$Ts - St$$

identisch Null werde; soll ferner die Gerade den Kegelsch
berühren, so bestehen die Bedingungen in dem identischen
schwinden von t.

Damit die Curve dritter Ordnung in drei Gerade zerfa
ist es nöthig und ausreichend, dass f und H proportional zu
ander seien, d. h., dass die Zwischenform

$$(ahu)\,a_x^{\,2}h_x^{\,2}$$

identisch Null werde.

Die nothwendigen und ausreichenden Bedingungen für
Zerfallen von f in drei sich in einem Punkt schneidende Ger
sind durch das identische Verschwinden von H gegeben.

Das identische Verschwinden von F ist die Bedingung,
mit f in eine einfache und eine Doppelgerade ausarte, und
identische Verschwinden von Θ *schliesslich die Bedingung, u*
der sich f auf eine dreifache Gerade reducirt.

Wenn die Curve 3ter Ordnung einen Doppelpunkt hat,
schneiden die Tangenten in diesem Doppelpunkt die einzige We
punktslinie in zwei Punkten, welche durch die Hesse'sche Form
der die drei Wendepunkte repräsentirenden binären cubischen F
dargestellt werden. Die Covariante Q dieser binären cubisc

rm stellt alsdann die drei Punkte dar, in welchen die drei rmonischen Geraden der drei Wendepunkte (siehe § 1) *die endepunktslinie schneiden.*

Zwei Curven 3ter Ordnung $a_x^3 = 0$ *und* $\alpha_x^3 = 0$ *haben selben Wendepunkte, wenn die simultane Contravariante* $(\alpha u)^3 = 0$ *identisch verschwindet.*

Setzt man daher voraus, die zweite Curve sei die Hesse'sche urve H der ersten, so ergibt sich:

Die Contravariante $(ahu)^3$ *ist identisch Null,* wie schon d. 1, p. 338 gesagt wurde.

Für das Studium der ternären cubischen Form ist die ntersuchung der binären biquadratischen Form

$$G(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1^4 - S\lambda_1^2\lambda_2^2 - \tfrac{4}{3}T\lambda_1\lambda_2^3 - \tfrac{1}{12}S^2\lambda_2^4$$

on Interesse, welche bei der Bildung der Hesse'schen Form iner beliebigen Curve 3ter Ordnung des syzygetischen Büschels siehe § 1)

$$\lambda_1 f + \lambda_2 H \quad \text{auftritt.}$$

Die Gleichung der zwölf Wendepunktsgeraden lautet:

$$G(H, -f) = H^4 - SH^2f^2 + \tfrac{4}{3}THf^3 - \tfrac{1}{12}S^2f^4 = 0.$$

Ueber die Invarianten und Covarianten von G siehe Bd. 1, . 338, wo man auch Literaturangaben über die ternären cubichen Formen findet.

Kapitel VIII.

Die ebenen Curven 4ter Ordnung.

§ 1. Allgemeines. Erzeugungsarten der Curven 4ter Ordnung. Doppeltangenten. Berührungskegelschnitte und Berührungscurven 3ter Ordnung.

Aus den Plücker'schen Formeln ergeben sich die folgenden zehn möglichen Combinationen für die charakteristischen Zahlen einer ebenen Curve 4ter Ordnung:

n	d	r	ν	δ	ι	p
4	0	0	12	28	24	3
4	1	0	10	16	18	2
4	0	1	9	10	16	2
4	2	0	8	8	12	1
4	1	1	7	4	10	1
4	0	2	6	1	8	1
4	3	0	6	4	6	0
4	2	1	5	2	4	0
4	1	2	4	1	2	0
4	0	3	3	1	0	0

Wenn zwei projective Kegelschnittbüschel vorliegen, der Basispunkte verschieden sind, so ist der Ort der Schnittpunkte sich entsprechenden Kegelschnitte eine allgemeine Curve 4ter Ordnung, welche durch die 8 Basispunkte der beiden Büschel ge

Die beiden Kegelschnittbüschel seien durch

$$U + \lambda V = 0,$$
$$U' + \mu V' = 0$$

gegeben, worin $U = 0$, $V = 0$, $U' = 0$, $V' = 0$ die Gleichungen von vier Kegelschnitten darstellen und zwischen μ und λ eine bilineare Relation vom Typus

$$a\lambda\mu + b\lambda + c\mu + d = 0$$

besteht. Eliminirt man λ, μ aus diesen drei Gleichungen, so ergiebt sich die Gleichung der Curve 4ter Ordnung.

Man verliert nichts an Allgemeinheit, wenn $\mu = \lambda$ und $V' = V$ angenommen wird; d. h.:

Der Gleichung jeder Curve 4ter Ordnung lässt sich immer die Gestalt

$$UW = V^2$$

geben, worin $U = 0$, $W = 0$, $V = 0$ drei Kegelschnitte darstellen, die nicht sämmtlich durch denselben Punkt gehen.

Um die Gleichung der Curve 4ter Ordnung auf diese Form zu reduciren, braucht man nur zu Kegelschnitten U, W zwei *Berührungskegelschnitte* zu nehmen, d. h. Kegelschnitte, welche die Curve in vier Punkten berühren.

Nun gilt der Satz:

Es gibt 63 Systeme von Berührungskegelschnitten; jedes System besteht aus unendlich vielen Kegelschnitten von solcher Beschaffenheit, dass durch die acht Berührungspunkte zweier Kegelschnitte des nämlichen Systems derselbe andere Kegelschnitt geht. In der obigen Gleichung wird der letztere Kegelschnitt durch $V = 0$ dargestellt.

In jedem der 63 Systeme von Berührungskegelschnitten kommen 6 Paare von Doppeltangenten vor.

Wenn $T_1 = 0$, $T_2 = 0$, $T_3 = 0$, $T_4 = 0$ die Gleichungen von vier Doppeltangenten zweier solcher dem nämlichen System angehörigen Paare sind, *so lässt sich die Gleichung der Curve 4ter Ordnung immer schreiben:*

$$T_1 T_2 T_3 T_4 = S^2,$$

worin die T linear sind und S ein quadratischer Ausdruck ist.

Die Gleichung der Curve 4ter Ordnung in der Gestalt

$$UW = V^2$$

lässt sich als Enveloppe des Kegelschnittsystems

$$\lambda^2 U + 2\lambda V + W = 0$$

ansehen.

Die ebene Curve 4ter Ordnung kann auch durch zwei projective Büschel erzeugt werden, von denen das eine aus Geraden und das andere aus Curven 3ter Ordnung besteht. Siehe Milinowsky, *Schlömilch's Zeitschr.*, 23, 1878.

Aus der Gleichung $T_1 T_2 T_3 T_4 = S^2$ folgt, *dass sich die Doppeltangenten zu je vieren derart gruppiren lassen, dass die acht Berührungspunkte auf demselben Kegelschnitt liegen. Solche Kegelschnitte gibt es 315.*

Der Gleichung einer Curve 4ter Ordnung kann man auch die Form

$$T_1 F_3 = \Omega^2$$

geben, worin $T_1 = 0$ die Gleichung einer Doppeltangente, $F_3 =$ diejenige einer Curve 3ter Ordnung ist, welche die Curve 4ter Ordnung in 6 Punkten berührt und daher die Berührungscurve 3ter Ordnung heisst, und $\Omega = 0$ die Gleichung eines Kegelschnitt darstellt.

Es gibt 64 dreifach unendliche Systeme von Berührungscurven 3ter Ordnung. Diese 64 Systeme unterscheidet man in zwei Arten, 28 von der einen und 36 von der anderen Art. Diejenigen 1ter Art zeichnen sich dadurch aus, dass jedem derselben eine der 28 Doppeltangenten entspricht, deren beide Berührungspunkte ebenso wie die sechs Berührungspunkte der Curven 3ter Ordnung auf dem nämlichen Kegelschnitt liegen. Diejenigen 2ter Art besitzen dagegen diese Eigenschaft nicht; sie enthalten ein einfach unendliches System von Curven 3ter Ordnung, die in eine Tangente an die Curve 4ter Ordnung und einen Kegelschnitt degenerirt sind, welcher durch die beiden Punkte geht, in denen die Tangente die Curve 4ter Ordnung wieder trifft, und welcher diese Curve in weiteren drei Punkten berührt.

Gibt man der Gleichung der Curve 4ter Ordnung die Gestalt $T_1 F_3 = \Omega^2$, so ist $F_3 = 0$ ein Curve 3ter Ordnung eines System 1ter Art.

Die Berührungscurven 3ter Ordnung von der 1ten oder 2ten Art zeichnen sich immer dadurch aus, dass durch die zwölf Berührungspunkte zweier Curven 3ter Ordnung desselben Systems eine neue Curve 3ter Ordnung geht.

In jedem System von Berührungscurven 3ter Ordnung gibt es 64 cubische Curven, welche die Curve 4ter Ordnung in drei

unkten vierpunktig berühren. Die Anzahl solcher cubischen urven beträgt mithin $4^6 = 4096$.

Es existiren 728 Systeme von Curven 3ter Ordnung, welche ie Curve 4ter Ordnung in vier Punkten dreipunktig berühren. iese 728 Systeme zerfallen derart in je 364, dass die Berührungspunkte einer Curve des einen Systems und diejenigen einer urve des anderen Systems auf demselben Kegelschnitt liegen.

Eine allgemeine Curve 4ter Ordnung lässt sich auch auf die olgende von Hesse, *Crelle*, 49 angegebene Art erzeugen:

Es liege ein Netz von Flächen 2ten Grads vor:

$$x_1 \sum_1^4 \alpha_{ik} z_i z_k + x_2 \sum_1^4 \beta_{ik} z_i z_k + x_3 \sum_1^4 \gamma_{ik} z_i z_k = 0,$$

worin die x_1, x_2, x_3 die homogenen Parameter des Netzes, die $_1, z_2, z_3, z_4$ die Punktcoordinaten des Raums sind, und

$$\alpha_{ik} = \alpha_{ki},\ \beta_{ik} = \beta_{ki},\ \gamma_{ik} = \gamma_{ki} \quad \text{ist.}$$

Die Spitzen der in diesem Netz enthaltenen Kegel liegen uf einer Raumcurve 6ter Ordnung. Interpretirt man nun die als Punktcoordinaten der Ebene, *so entsprechen den Punkten ieser gewundenen Curve 6ter Ordnung (den Spitzen der Kegel) in der Ebene die Punkte einer allgemeinen ebenen Curve 4ter Ordnung, deren Gleichung sich ergibt, wenn man die Discriminante der allgemeinen Fläche 2ten Grads des Netzes gleich Null setzt.*

Schreibt man

$$\pi_{ik} = x_1 \alpha_{ik} + x_2 \beta_{ik} + x_3 \gamma_{ik},$$

so lautet die Gleichung der Curve 4ter Ordnung

$$C_4 = \begin{vmatrix} \pi_{11}, & \pi_{12}, & \pi_{13}, & \pi_{14} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \pi_{41}, & \pi_{42}, & \pi_{43}, & \pi_{44} \end{vmatrix} = 0.$$

Gibt man der Gleichung der Curve diese Gestalt, so ist

$$\Phi_{uu} = \begin{vmatrix} \pi_{11}, & \cdots, & \pi_{14}, & u_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot, & u_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot, & u_3 \\ \pi_{41}, & \cdots, & \pi_{44}, & u_4 \\ u_1, & \cdots, & u_4, & 0 \end{vmatrix} = 0$$

bei variabelen u die Gleichung einer Berührungscurve 3ter Ordnung aus einem System 2ter Art und

$$\Phi_{uv} = \begin{vmatrix} \pi_{11}, \cdots, \pi_{14}, u_1 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \pi_{41}, \cdots, \pi_{44}, u_4 \\ v_1, \cdots, v_4, 0 \end{vmatrix} = 0$$

die Gleichung der Curve 3ter Ordnung, welche durch die Berührungspunkte von $\Phi_{uu} = 0$ und $\Phi_{vv} = 0$ geht.

Wenn die Gleichung des Netzes von Flächen 2ter Ordnung in der symbolischen Form $0 = a_x\alpha_z^2 = b_x\beta_z^2 = \cdots$ geschrieben wird, worin die x ternäre und die z quaternäre Variabele sind, *so lautet die Gleichung von C_4*

$$(\alpha\beta\gamma\delta)^2 a_x b_x c_x d_x = 0,$$

und die Gleichungen der Curven 3ter Ordnung Φ_{uu}, Φ_{uv} sind

$$\Phi_{uu} = (\alpha\beta\gamma u)^2 a_x b_x c_x = 0,$$
$$\Phi_{uv} = (\alpha\beta\gamma u)(\alpha\beta\gamma v) a_x b_x c_x = 0.$$

Von Interesse ist auch, *dass sich eine eindeutige umkehrbare Zuordnung zwischen den Geraden, welche die acht Fundamentalpunkte des Netzes der Flächen 2ter Ordnung zu je zweien verbinden, und den 28 Doppeltangenten feststellen lässt.*

Eine andere Erzeugungsart einer allgemeinen Curve 4^{t} Ordnung ist die folgende von Geiser, *Math. Ann.*, 1:

Wenn von einem Punkt P der Berührungskegel an eine cubische Fläche gezogen wird, so erhält man einen Kegel 6ter Ordnung, wenn aber der Punkt P auf der Fläche selbst liegt, so ergiebt sich ein Kegel 4ter Ordnung und zugleich die zweimal gezählte Berührungsebene in diesem Punkt P. Schneidet man mit diesen Kegel mit einer Ebene, so wird dadurch eine allgemeine Curve 4ter Ordnung erzeugt, deren Doppeltangente die Gerade ist, in welcher diese Ebene die in P berührende Ebene trifft.

Die ebenen Schnitte der Fläche 3ter Ordnung lassen sich Curven 3ter Ordnung projiciren, welche die Curve 4ter Ordnung berühren; insbesondere ergibt sich das dreifach unendliche System von Berührungscurven 3ter Ordnung von der 1ten Art, welches der Doppeltangente zugeordnet ist, die aus der Berührungsebene P resultirt. Die Projectionen der 27 Geraden der Fläche 3 Ordnung sind die übrigen 27 Doppeltangenten der ebenen Curve 4ter Ordnung.

Für das Studium der Configuration der Doppeltangenten der ebenen Curve 4ter Ordnung ist es von Vortheil, eine Bezeichnungsweise oder Darstellungsart zu benutzen, aus welcher die gesuchte Configuration leicht hervorgeht.

Eine der zur Anwendung gekommenen Darstellungsarten, zu welcher die oben erwähnte *Hesse'sche Figur* führen kann, geschieht *mittelst der 28 Geraden, welche acht Fundamentalpunkte zu je zweien verbinden.*

Eine andere Art, sie darzustellen, ist die *mittelst der sogenannten ungeraden Charakteristiken vom Geschlecht 3.* Siehe *Repert.*, 1, p. 454.

Jede Doppeltangente lässt sich durch das Symbol

$$\begin{pmatrix} i & j & h \\ i_1 & j_1 & h_1 \end{pmatrix}$$

ausdrücken, worin i, j, h, i_1, j_1, h_1 *die Zahlen* 0 *oder* 1 *sind und die Summe*

$$ii_1 + jj_1 + hh_1$$

ungerade ist.

Nach der ersten Darstellungsart wird eine Gruppe von vier Doppeltangenten, durch deren Berührungspunkte ein Kegelschnitt geht, entweder durch die vier Seiten eines Vierseits (210 mal) repräsentirt oder durch vier Gerade, von denen keine zwei einen der acht Punkte gemeinschaftlich haben (105 mal).

Nach der zweiten Darstellungsart dagegen wird eine solche Gruppe durch vier ungerade Charakteristiken repräsentirt, die derart sind, dass die Summen der Elemente, welche die nämlichen Stellen einnehmen, sämmtlich gerade Zahlen sind.

Von diesen Principien ausgehend, kann man untersuchen, wie viel Triaden, Tetraden, etc. von Doppeltangenten existiren, denen besondere Eigenschaften zukommen; z. B. Triaden, deren 6 Berührungspunkte nicht auf einem Kegelschnitt liegen, Tetraden, von deren 8 Berührungspunkten 6 (oder auch niemals 6) sich auf einem Kegelschnitt befinden, etc.

Unter den Gruppen von *sechs* Doppeltangenten (den *Hexaden* von Doppeltangenten) sind diejenigen zu beachten, welche Hesse und Steiner studirt haben: *es gibt 1008 Hexaden von Doppeltangenten, durch deren Berührungspunkte eine eigentliche Curve* 3ter *Ordnung geht.*

Bei der ersten der oben angegebenen Darstellungsarten werden diese Gruppen durch drei verschiedene Figuren repräsentirt, nämlich: a) *die Seiten zweier Dreiecke, deren Ecken 6 der 8 Punkte*

sind; b) *die Gerade, welche zwei Punkte verbindet, und die fünf Geraden, welche einen anderen Punkt mit den dann noch übrigen 5 Punkten verbinden;* c) *die Geraden, welche einen Punkt mit 3 anderen und einen anderen Punkt mit den 3 übrigen verbinden.*

Es existiren ferner 5040 Gruppen von 6 Doppeltangenten, deren 12 Berührungspunkte sich derart in je 6 theilen, dass durch jede Gruppe von 6 Punkten ein Kegelschnitt geht.

Die 6 Doppeltangenten einer der 1008 Gruppen der ersten Art berühren den nämlichen Kegelschnitt, während jede der 5040 Gruppen der zweiten Art in drei Paare von Doppeltangenten derart sich theilt, dass die drei Schnittpunkte der Tangenten eines jeden Paares in einer Geraden liegen.

Unter den Gruppen von *sieben* Doppeltangenten (den Heptaden von Doppeltangenten) gibt es 288, welche die *vollen Systeme* Aronhold's heissen und aus 7 Doppeltangenten bestehen, die so beschaffen sind, dass *niemals* die 6 Berührungspunkte dreier von ihnen sich auf einem Kegelschnitt befinden.

Diese vollen Systeme werden durch die 7 Geraden repräsentirt, welche einen der 8 Punkte mit den übrigen 7 verbinden oder von den Geraden, welche die drei Seiten eines Dreiecks bilden, und von den vier Verbindungslinien eines der übrigen Punkte mit den anderen vier.

Es gibt 72 Aronhold'sche Systeme, welche eine gegebene Doppeltangente enthalten, und 16, in welchen zwei gegebene Doppeltangenten vorkommen.

Mittelst der sieben Doppeltangenten eines Aronhold'schen Systems lassen sich alle anderen durch lineare Constructionen bestimmen.

Umgekehrt: *Sind in der Ebene sieben beliebige Gerade gegeben, so kann man im Allgemeinen eine Curve 4ter Ordnung construiren, welche die sieben gegebenen Geraden zu Doppeltangenten hat, die in Bezug auf die Curve 4ter Ordnung ein volles Aronhold'sches System bilden.* Aronhold, *Berl. Monatsber.*, 1864; Salmon-Fiedler, *Höh. Curv.*, § 264, S. 307 u. ff.; Frobenius, *Crelle*, 99

Von den verschiedenen Formen, welche eine Curve 4ter Ordnung haben kann, ist die sogenannte Plücker'sche von Interesse, welche aus 4 Ovalen besteht, von denen jedes ausserhalb eines

eden anderen liegt. Jedem dieser Ovale entspricht eine Doppeltangente, welche es in zwei Punkten berührt.

Alle Doppeltangenten einer solchen Curve sind reell.

Die Curven 4ter Ordnung studirte Plücker, *Theorie der algebr. Curven,* Bonn, 1839; Hesse, *Crelle,* 49, 55, 59; Steiner, ib., 49; Cayley, ib., 68; Clebsch, ib., 63; Geiser, ib., 73; *Math. Ann.,* 1; Zeuthen, *Math. Ann.,* 7, 8; Klein, ib., 10, 11. Die letzteren beschäftigten sich speciell mit der Classification der Curven vom Gesichtspunkt der Realität der Doppeltangenten aus.

Die Bestimmung der Curve, welche durch die 56 Berührungspunkte der Doppeltangenten geht, führte aus: Hesse, *Crelle,* 36, 40, 41; Salmon, *Quart. Journ.,* 3; Cayley, *Phil. Trans.,* 1859, 1861 und Dersch, *Math. Ann.,* 7.

Von den Arbeiten über die Bestimmung der Doppeltangenten ist auch Aeschlimann's Dissertation: *Zur Theorie der ebenen Curven 4ter Ordnung,* Zürich 1880 zu erwähnen.

Die Curven 4ter Ordnung wurden auch eingehend vom Gesichtspunkt der Theorie der Abel'schen Funktionen vom Geschlecht 3 (siehe Bd. 1, Kap. 17) studirt, mit welcher Theorie sie in der engsten Beziehung stehen. Wir citiren in der Beziehung: Riemann, *Theorie der Abel'schen Funktionen, Crelle,* 54, 1857; Clebsch-Gordan, *Theorie der Abel'schen Funct.,* Leipzig, 1866; Weber, *Th. d. Abel'schen Funct. vom Geschlecht 3,* Berlin, 1876; Klein, l. c.; siehe auch die *Geom.* von Clebsch-Lindemann.

Andere Studien über die Configuration der 28 Doppeltangenten sind von Aronhold, l. c.; Noether, *Math. Ann.,* 15, 46; Frobenius, *Crelle,* 99; Weber, *Math. Ann.,* 23; Pascal, *Rend. Lincei,* 1892, 1893, etc.

Das Studium der Configuration der Doppeltangenten lässt sich auf die sogenannten *Charakteristiken* begründen. Siehe Pascal, *Ann. di mat.,* 20. Man vergleiche ferner die Darstellung in *Weber's Algebra,* Bd. 2, p. 479 u. ff.; dort wird auch eine Behandlung der algebraischen Seite der Frage geliefert.

Ueber die Configuration der 24 Wendepunkte der allgemeinen Curve*) 4ter Ordnung ist wenig bekannt. Eine *Dissertation* von Justus Grassmann in dieser Richtung, Berlin, 1875, in welcher

*) Unter *allgemeiner* Curve wird eine Ordnungscurve ohne Doppelpunkt (bez. eine Classencurve ohne Doppeltangente) verstanden.

bewiesen werden sollte, dass der durch 5 Wendepunkte gehende Kegelschnitt noch drei weitere Wendepunkte enthält, ist fehlerhaft; siehe Klein, *Math. Ann.*, 10, p. 397. Die Gleichung vom 24ten Grad, von welcher die Wendepunkte abhängen, untersuchte Gerbaldi, *Rend. Palermo*, 7.

§ 2. Curven 4ter Ordnung mit singulären Punkten.

Man gebe der Gleichung der Curve 4ter Ordnung die Gestalt $T_1 T_2 T_3 T_4 = S^2$. Wenn von den sechs Schnittpunkten der Geraden $T = 0$ einer, zwei, drei auf dem Kegelschnitt $S = 0$ liegen, so hat die Curve 4ter Ordnung einen, zwei, drei Doppelpunkte.

Gibt man ferner der Curve 4ter Ordnung die Form $UW = V^2$ und haben die drei Kegelschnitte

$$U = 0, \quad W = 0, \quad V = 0$$

einen, zwei, drei Punkte gemeinschaftlich, so besitzt die Curve 4ter Ordnung auch in diesem Fall einen, zwei, drei Doppelpunkte.

Eine Curve 4ter Ordnung mit einem Doppelpunkt hat nur 16 Doppeltangenten. Bei der Geiser'schen Darstellung (siehe § 1) erhält man sie, wenn das Projectionscentrum P auf einer der Geraden p der Fläche 3ter Ordnung angenommen wird; der Punkt, in welchem diese Gerade die schneidende Ebene trifft, ist alsdann der Doppelpunkt; die Projectionen der 16 Geraden, welche auf der Fläche 3ter Ordnung die Gerade p *nicht* schneiden, geben die 16 Doppeltangenten.

Bei der Hesse'schen Darstellung (siehe § 1) dagegen erhält man sie, indem man zwei von den 8 Fundamentalpunkten des Netzes von Flächen 2ter Ordnung zusammenfallen lässt.

Die Configuration der Doppeltangenten lässt sich auf die nämliche Art untersuchen, wie die allgemeine, wenn man sich denkt, zwei von den acht Fundamentalpunkten fallen zusammen und mithin die 16 Doppeltangenten durch die Geraden darstellt, welche *sechs* Fundamentalpunkte zu je zweien verbinden, und durch eine andere Gerade, welche durch einen siebenten Punkt geht. Die Geraden, welche diesen siebenten Punkt mit den übrigen sechs verbinden, entsprechen den sechs von dem Doppelpunkt an die Curve gelegten Tangenten.

Die 16 Doppeltangenten lassen sich auf 60 Arten in Gruppen von je vier derart vereinigen, dass durch die acht Berührungspunkte der vier Tangenten einer Gruppe ein Kegelschnitt geht.

Ueber die Curven 4ter Ordnung mit einem Doppelpunkt siehe Brioschi, *Math. Ann.*, 4; Cremona, ib., id.; Brill, *Crelle*, 65; *Math. Ann.*, 6, etc.

Von den Curven 4ter Ordnung *mit zwei Doppelpunkten* sind in besonders eingehender Art diejenigen untersucht worden, deren beide Doppelpunkte die *imaginären unendlich fernen Kreispunkte* sind. Sie heissen *bicirculare Curven 4ter Ordnung.* Casey, *Trans. of the R. Irish Acad.*, 24, 1869 und Siebeck, *Crelle*, 57, 59, 1860.

Aus jedem der beiden Doppelpunkte einer Curve 4ter Ordnung mit zwei Doppelpunkten gehen vier Tangenten an die Curve und die anharmonischen Verhältnisse dieser beiden Büschel von vier Tangenten sind einander gleich.

Die 16 Schnittpunkte der ersten 4 Tangenten mit den zweiten 4 Tangenten liegen zu je vieren auf Kegelschnitten, welche durch die beiden Doppelpunkte gehen.

Die bicirculare Curve lässt sich als die Enveloppe eines Kreises von variabelem Radius ansehen, dessen Centrum sich auf einem festen Kegelschnitt bewegt, und der einen anderen festen Kreis immer orthogonal durchschneidet. Ist der Kegelschnitt eine Parabel, so zerfällt die bicirculare Curve in die unendlich ferne Gerade und in eine Curve 3ter Ordnung.

Ein specieller Fall der Curven 4ter Ordnung mit zwei Spitzen sind die sogenannten Cartesischen *Ovale*, (Siehe Kap. 17, § 11) deren beide Spitzen die zwei imaginären unendlich fernen Kreispunkte sind.

Die Cartesischen aus zwei Ovalen bestehenden Curven haben die Eigenschaft, dass auf einer Geraden immer drei feste Punkte A, B, C existiren, für deren Abstände $\varrho, \varrho', \varrho''$ von einem Punkt der Curve die Relationen

$$l\varrho + m\varrho' = c$$
$$l\varrho + n\varrho'' = c'$$
$$m\varrho' - n\varrho'' = c''$$

bestehen, worin l, m, n, c, c', c'' Constante sind. Die Punkte *A, B, C* heissen *Brennpunkte*; sind sie sämmtlich reell, so heisst die Curve *die beiden Ovale des Cartesius*; ist nur einer reell, so ist die Curve von der, die Descartes studirte, verschieden.

Die Gleichung der Cartesischen Curve lautet

$$S^2 = k^3 L,$$

worin $S = 0$ die Gleichung eines Kreises, $L = 0$ die ein Geraden ist, und k eine Constante bedeutet. Die Gerade $L =$ ist eine Doppeltangente der Curve.

Die Summe der Abstände eines Brennpunkts von den vi Punkten, in welchen eine Transversale die Cartesische Cur schneidet, ist constant.

Specielle Fälle der Cartesischen Curve sind die *Pascal'sc Schnecke* oder *Limaçon (lumaca)* und die *Cardioide* (siehe Kap. 1 § 11), von denen die erste ausser den beiden Spitzen in d beiden Kreispunkten noch einen Knotenpunkt hat, und bei d zweiten dieser Knotenpunkt von neuem in eine dritte Spitze au geartet ist.

Der Gleichung der Curve 4ter Ordnung mit drei Dopp punkten kann man die Gestalt

$$a_{11}x_2^2x_3^2 + a_{22}x_3^2x_1^2 + a_{33}x_1^2x_2^2 + 2a_{23}x_1^2x_2x_3 + \\ + 2a_{31}x_2^2x_3x_1 + 2a_{12}x_3^2x_1x_2 = 0$$

geben, wenn die Ecken des Fundamentaldreiecks der homogen Coordinaten in die drei Doppelpunkte gelegt werden.

Dividirt man die linke Seite mit x_1^2, x_2^2, x_3^2, so erken man aus der so erhaltenen Gestalt der vorstehenden Gleichun dass sie sich aus der Gleichung eines Kegelschnitts durch Verta schung der Variabelen mit ihren reciproken Werthen ableiten läs

Diese Bemerkung kann mit Vortheil zum Studium d Curve benutzt werden.

Bei einer Curve 4ter Ordnung mit drei Doppelpunkten l rühren die sechs in diesen Punkten an die Curve gelegten Ta genten denselben Kegelschnitt.

Die sechs Tangenten, welche sich von den drei Doppelpunkt aus an die Curve ziehen lassen, berühren ebenfalls einen u denselben Kegelschnitt.

Die acht Berührungspunkte der 4 Doppeltangenten ein solchen Curve liegen auf dem nämlichen Kegelschnitt.

Die Gleichung der Curve 4ter Ordnung mit drei Cuspid punkten lässt sich immer in die Form

$$x_1^{-\frac{1}{2}} + x_2^{-\frac{1}{2}} + x_3^{-\frac{1}{2}} = 0$$

bringen; die drei Spitzentangenten sind dann durch die Gleichung

$$x_1 = x_2$$
$$x_2 = x_3$$
$$x_3 = x_1$$

gegeben und gehen mithin durch denselben Punkt.

Die Curven 4ter Ordnung mit drei Doppelpunkten wurden sonders von Brill, *Math. Ann.*, 12 und Bretschneider, *iss.*, Erlangen, 1875 untersucht. Siehe auch eine neuere Arbeit on De Vries, *La quartique trinodale, Archives Teyler*, (2), 7, aarlem 1900.

Die Curven 4ter Ordnung mit *Undulationspunkten*, d. h. unkten, in denen die Tangente die Curve vierpunktig berührt, urden von Cayley, Salmon, *höhere ebene Curven*, etc., Kantor, *itzungsber. d. Wiener Acad.*, 79, 1879 und Masoni, *Dissert.*, apoli 1882 studirt.

In den Undulationspunkten wird die Curve 4ter Ordnung on ihrer eigenen Hesse'schen Curve berührt. Cayley.

Ueber die biquadratische ternäre Form, ihre Covarianten nd Invarianten siehe Bd. 1, p. 339 und folgende.

Kapitel IX.

Allgemeine Theorie der algebraischen Flächen und algebraischen Raumcurven.

§ 1. Allgemeines. Abwickelbare und windschiefe Flächen. Schnitte von Flächen. Die Geometrie auf den algebraischen Flächen.

Der Ort der Punkte, welche analytisch durch eine algebraische Gleichung n^{ten} Grads zwischen den drei Cartesischen Coordinaten eines Punkts des Raums bestimmt werden, heisst eine *Fläche n^{ter} Ordnung.*

Die Fläche 1ter Ordnung ist die Ebene.

Jede Gerade des Raums trifft die Fläche n^{ter} Ordnung in n (reellen oder imaginären) Punkten und jede Ebene schneidet sie in einer Curve n^{ter} Ordnung.

Die Gleichung einer Fläche n^{ter} Ordnung enthält homogen

$$\tfrac{1}{6}n(n^2 + 6n + 11) + 1 = \binom{n+3}{n} = N(n) + 1$$

Coefficienten.

Tangente an eine Fläche wird die Grenzlage einer Geraden genannt, welche durch zwei Punkte der Fläche geht, wenn diese Punkte, immer auf der Fläche bleibend, sich unbegrenzt einander nähern (*zweipunktige Berührung*).

Osculationstangente einer Fläche ist die Grenzlage einer Geraden, welche durch drei oder mehr Punkte einer Fläche geht, wenn diese Punkte sich unbegrenzt einander nähern. *Dreipunktige Berührung, vierpunktige* etc.

Alle Tangenten an eine Fläche in einem Punkt P derselben liegen im Allgemeinen in einer Ebene, welche die Tangentenebene der Fläche in dem Punkt P heisst.

Die Tangentenebene einer Fläche in einem Punkt P schneidet die Fläche in einer Curve, die in P einen Doppelpunkt hat. Is

' eine Spitze (oder Cuspidalpunkt), so heisst die Tangentenebene 'ationär oder *Wendungsberührungsebene.*

Die beiden Tangenten in dem Doppelpunkt (Inflexions- oder Iaupttangenten) sind zwei Osculationstangenten der Fläche. Je achdem diese Tangenten reell oder imaginär sind oder zuammenfallen, heisst der Punkt P der Fläche *hyperbolisch, elliptisch* oder *parabolisch.*

Die parabolischen Punkte einer Fläche bilden die sogenannte *arabolische Curve (Curve der parabolischen Punkte).*

Die Anzahl der Tangentenebenen, die man von einer beiebig im Raum gelegenen Geraden aus an eine Fläche legen ann, heisst *Classe der Fläche.*

Eine Fläche n^{ter} Ordnung ist im Allgemeinen von der Classe $n(n-1)^2$, wenn die Fläche keine Singularität enthält.

Die Gleichung der Fläche sei in homogenen Coordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 gegeben und es werde angenommen, die linke Seite sei nach den Potenzen von x_4 geordnet, die Gleichung habe also die Gestalt

$$u_0 x_4^n + u_1 x_4^{n-1} + u_2 x_4^{n-2} + \cdots = 0,$$

worin $u_0, u_1, u_2, \ldots$ homogene ganze Funktionen vom Grad $0, 1, 2, \ldots$ in x_1, x_2, x_3 sind.

Wenn der Punkt $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ ein Punkt der Fläche ist, so folgt $u_0 = 0$, und *die Tangentenebene in diesem Punkt wird durch* $u_1 = 0$ *dargestellt.*

Wenn wir anstatt der Tangentialebene mit Dupin eine ihr parallele und unendlich nahe Ebene betrachten, so kann der Schnitt dieser Ebene mit der Fläche, abgesehen von Unendlichkleinen höherer Ordnung, annähernd als eine Curve 2ter Ordnung angesehen werden, welche die Dupin'sche Indicatrix genannt wird. Der Punkt der Fläche ist elliptisch, parabolisch oder hyperbolisch, je nachdem dieser Kegelschnitt eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel ist.

Gibt man der Gleichung der Fläche die Gestalt $z = f(x, y)$, so ist der Punkt (x, y, z) der Fläche elliptisch, parabolisch oder hyperbolisch, je nachdem

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 \lessgtr \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) \quad \text{ist.}$$

Der nicht ebene Schnitt oder ein Theil des nicht ebene Schnitts zweier *algebraischer* Flächen heisst *eine algebraische, nicht ebene oder gewundene, oder doppelt gekrümmte Curve oder auch eine algebraische Raumcurve.*

Jede algebraische Raumcurve wird von einer beliebigen Ebene des Raums in einer festen Anzahl von (reellen, zusammenfallenden oder imaginären) Punkten geschnitten. Diese Zahl heisst *die Ordnung der Raumcurve.*

Die geringste Ordnung einer nicht degenerirten Raumcurve ist die dritte.

Man beachte, dass *streng genommen nicht,* wie bei den ebenen Curven, die Gesammtheit zweier Raumcurven von den Ordnungen d, d' immer als Degeneration einer Raumcurve von der Ordnung $d + d'$ betrachtet werden kann; denn, wenn ein auf einer algebraischen Fläche liegende Raumcurve von der Ordnung $d + d'$ in zwei Curven von den Ordnungen d und d' zerfällt, so werden diese im Allgemeinen Schnittpunkte haben, und dieser Fall wird im Allgemeinen nicht eintreten, wenn die beiden gegebenen Curven beliebig im Raum liegen.

Die Grenzlage einer Geraden, welche durch zwei sich unbegrenzt einander nähernde Punkte einer Curve geht, heisst, wie immer, die *Tangente an die Curve,* und die Grenzlage einer Ebene, welche durch drei sich unbegrenzt einander nähernde Punkte einer Curve geht, *die Schmiegungsebene (Krümmungsebene oder Oculationsebene) an die Curve.*

Die Classe oder der Rang einer Raumcurve ist die Anzahl ihrer Tangenten, welche von einer beliebigen Geraden des Raums getroffen werden, oder auch die Anzahl der Ebenen, welche durch eine feste beliebige Gerade des Raums und durch Tangenten der Raumcurve gehen.

Einige Autoren nennen diese Zahl den *Rang* und verstehen unter *Classe* die Classe der osculirenden Developpabelen (siehe S. 207). Für uns jedoch sollen die Worte *Rang* und *Classe* einer gewundenen Curve dieselbe Bedeutung haben, ebenso wie wir den Worten *Ordnung* und *Rang* der Developpabelen (siehe § 4) denselben Sinn beilegen.

Jede durch die Bewegung einer Geraden erzeugte Fläche ist eine *Regelfläche.* Man unterscheidet *abwickelbare (developpabele)* und *windschiefe (nicht abwickelbare) Regelflächen.*

Jede *abwickelbare* Fläche ist der Ort der Tangenten einer ıumcurve. Sie wird daher durch die Bewegung einer Geraden zeugt, deren beide aufeinander folgenden Lagen sich in der-lben Ebene befinden.

Die Erzeugenden der Developpabelen sind die Tangenten r Raumcurve, welche ihrerseits *die Cuspidal- oder Rückkehr-ınte der Fläche* (*arête de rebroussement* nach Monge) ist.

Die Ordnung einer abwickelbaren Fläche ist der Classe der aumcurve gleich.

Diese Zahl wird *der Rang* des aus der Raumcurve und ırer Developpabelen bestehenden Systems genannt; vergl. S. 206.

Jede Osculationsebene der Raumcurve ist Tangentialebene an ie abwickelbare Fläche, welche mithin die Enveloppe der Oscu-ıtionsebenen der Raumcurve ist. Sie heisst daher auch *oscu-rende Developpabele. Schneidet man die abwickelbare Fläche ıit einer Ebene, so ist der Punkt, in welchem diese Ebene die Raumcurve trifft, eine Spitze der Schnittcurve.*

Die Punkte, in welchen sich zwei nicht benachbarte Er-eugende der abwickelbaren Fläche treffen, bilden die *doppelt ingeschriebene Curve der developpabelen Fläche oder kurz ihre Doppelcurve oder Knotencurve.*

Die Curve, in welcher die Developpabele durch eine Ebene eschnitten wird, hat einen Doppelpunkt in jedem Punkt, in elchem die Doppelcurve von der Ebene getroffen wird.

Jede beliebige Erzeugende einer Developpabelen n^{ter} Ordnung rifft $n - 4$ andere nicht benachbarte Erzeugende.

Die Ebenen, welche durch zwei nicht consecutive Erzeugende ıchen, hüllen eine neue Developpabele ein, welche die Raumcurve loppelt (in zwei Punkten) berührt und daher die *Bitangential-leveloppabele an die Raumcurve* genannt wird.

Bei einer Raumcurve heisst die Anzahl ihrer *scheinbaren Doppelpunkte* die Zahl der von einem Punkt des Raums aus ezogenen Geraden, welche die Curve zweimal treffen. *Diese Zahl ist selbstverständlich für jeden beliebigen Punkt des Raums lieselbe.*

Bei einer developpabelen Fläche nennt man die Anzahl ihrer *scheinbaren Doppelebenen* die Zahl der in einer beliebigen Ebene des Raums liegenden Geraden, in denen zwei der die Developpabele einhüllenden Ebenen sich schneiden. *Auch diese Zahl ist natürlich constant.*

Classe der abwickelbaren Fläche heisst die Zahl der Tan-gentialebenen, welche sich von einem beliebigen Punkt des Raums

aus an sie legen lassen, oder auch die Zahl der durch eine beliebigen Punkt des Raums gehenden Osculationsebenen an di Cuspidalcurve der Developpabelen.

Ein specieller Fall der abwickelbaren Fläche ist der *Kege* Diese Fläche wird durch die Bewegung einer Geraden erzeug von welcher ein Punkt festliegt.

Nimmt man an, der Schnitt des Kegels mit einer Eben sei eine algebraische Curve n^{ter} Ordnung, so heisst auch d Kegel algebraisch und n seine *Ordnung*. Die *Classe* des Kege ist die Classe der Schnittcurve.

Die windschiefe Regelfläche wird durch eine Gerade erzeug welche sich so bewegt, dass im Allgemeinen keine zwei cons cutiven Lagen derselben in der nämlichen Ebene liegen.

Eine windschiefe Fläche n^{ter} Ordnung ist auch n^{ter} Clas und umgekehrt. Cayley, *Cambr. Math. Journ.*, 7, 1852 = *Co math. papers*, 2, 33.

Die Punkte, in welchen sich zwei nicht benachbarte E zeugende der windschiefen Fläche schneiden, bilden auch hi eine *Doppel- oder Knotencurve* der Fläche.

Die Ebenen, welche durch zwei nicht consecutive Erzeugen einer windschiefen Fläche gehen, sind Doppeltangentialebenen d Fläche. Sie hüllen eine abwickelbare Fläche ein, welche Dopp tangentialdeveloppabele der gegebenen windschiefen Fläche g nannt wird.

Die Classe der Doppeltangentialdeveloppabelen einer win schiefen Fläche ist der Ordnung der Doppelcurve gleich (Cayley

---

Wir wollen nun einige Fundamentalrelationen bez. *ein allgemeinen Fläche n^{ter} Ordnung ohne Singularitäten* betrachte Vergl. § 4. Zugleich mit dieser allgemeinen Fläche sollen d beiden abwickelbaren Flächen in Betracht gezogen werden, welc von den Doppeltangentialebenen der Fläche und von den stati nären Ebenen eingehüllt werden.

Wir bezeichnen mit:

n die Ordnung der Fläche,

a die Ordnung des der Fläche umschriebenen Kegels, dess Spitze ein beliebiger Punkt des Raums ist,

δ die Anzahl der Doppelerzeugenden dieses Kegels,

$\varkappa$ die Anzahl der Rückkehrerzeugenden desselben Kegels,

n' die Classe der Fläche,
a' die Classe eines ebenen Schnitts derselben,
δ' die Anzahl der Doppeltangenten an diesen Schnitt,
$\varkappa'$ die Anzahl seiner Wendetangenten,
b' die Classe der von den Doppeltangentialebenen der Fläche umhüllten abwickelbaren Fläche,
k' die Anzahl der scheinbaren Doppelebenen dieser Developpabelen, d. h. die Anzahl der in einer beliebigen gegebenen Ebene liegenden Schnitte zweier ihrer Ebenen,
t' die Anzahl der die Fläche dreimal berührenden Ebenen,
q' die Ordnung der Developpabelen der Doppeltangentialebenen,
ϱ' die Ordnung der Curve der Berührungspunkte der Doppeltangentialebenen,
c' die Classe der Developpabelen der stationären Tangentialebenen der Fläche,
h' die Anzahl der scheinbaren Doppelebenen dieser Developpabelen,
r' die Ordnung derselben Fläche,
β' die Anzahl der den beiden abwickelbaren Flächen (d. h. der durch die Doppeltangentialebenen und der durch die stationären Ebenen erzeugten Developpabelen) gemeinschaftlichen Ebenen, welche für die letztere Fläche ebenfalls stationär sind,
γ' die Anzahl der denselben abwickelbaren Flächen gemeinsamen Ebenen, die jedoch auch für die erstere Fläche stationär sind,
σ' die Ordnung der parabolischen Curve.

Es bestehen dann die folgenden Relationen:

$a = a' = n(n-1)$, (diese Zahl pflegt man den *Rang der Fläche* zu nennen),

$\delta = \frac{1}{2}n(n-1)(n-2)(n-3)$,

$\varkappa = n(n-1)(n-2)$,

$n' = n(n-1)^2$,

$\delta' = \frac{1}{2}n(n-2)(n^2-9)$.

$\varkappa' = 3n(n-2)$,

$b' = \frac{1}{2}n(n-1)(n-2)(n^3-n^2+n-12)$,

$k' = \frac{1}{8}n(n-2)(n^{10}-6n^9+16n^8-54n^7+164n^6-$
$-288n^5+547n^4-1058n^3+1068n^2-1214n+1464)$,

$t' = \frac{1}{6}n(n-2)(n^7-4n^6+7n^5-45n^4+114n^3-$
$-111n^2+548n-960)$,

$q' = n(n-2)(n-3)(n^2+2n-4)$,

$\varrho' = n(n-2)(n^3-n^2+n-12)$,

$$c' = 4n(n-1)(n-2),$$
$$h' = \tfrac{1}{2}n(n-2)(16n^4 - 64n^3 + 80n^2 - 108n + 156),$$
$$r' = 2n(n-2)(3n-4),$$
$$\beta' = 2n(n-2)(11n-24),$$
$$\gamma' = 4n(n-2)(n-3)(n^3 + 3n - 16),$$
$$\sigma' = 4n(n-2).$$

Zwei Flächen von den Ordnungen n_1 und n_2 schneiden si in einer Raumcurve von der Ordnung $n_1 n_2$.

Alle Flächen n^{ter} Ordnung, welche durch

$$N(n) - 1 = \binom{n+3}{3} - 2$$

willkürlich im Raum gegebene Punkte gehen, schneiden sich einer und derselben Raumcurve von der Ordnung n^2.

Ist eine Raumcurve von der Ordnung n^2 der vollständ Schnitt zweier Flächen n^{ter} Ordnung, so enthält jede Fläche n Ordnung, welche durch $N(n) - 1$ beliebige Punkte der Curve g die Curve vollständig.

Wenn eine Raumcurve μ^{ter} Ordnung gegeben ist, so lä sich eine Fläche n^{ter} Ordnung durch sie legen, wenn nur

$$N(n) > n\mu$$

ist, weil alsdann jede Fläche n^{ter} Ordnung, die durch $n\mu +$ beliebig auf der Curve angenommene Punkte geht, die Curve Ordnung vollständig enthält.

Die Anzahl nicht weiter reducirbarer Bedingungen, un welchen eine Fläche n^{ter} Ordnung sich durch eine Curve μ^{ter} O nung legen lässt, hat als obere Grenze die Zahl

$$n\mu + 1.$$

Für eine Curve vom Geschlecht Null (vergl. § 4) *ist Anzahl der Bedingungen genau $n\mu + 1$.*

Bei einer Curve vom Geschlecht Eins (elliptischen Cur beträgt sie $n\mu$. Hermite, *Crelle, 82.*

Für eine Curve vom Geschlecht $p \leqq \mu - 3$ ist diese Z nicht weiter zurückführbarer Bedingungen $n\mu + 1 - p$, Lin mann, *Crelle,* 84; Halphen, *Journ. de l'École polyt.,* 52, p.

Man beachte jedoch, dass diese Zahlen nur für hinreich grosse n genau sind.

Wenn die Curve der vollständige Schnitt von Flächen Ordnungen n_1, n_2 ist, so beträgt die Anzahl der entsprechen

cht reducirbaren Bedingungen für eine Fläche n^{ter} Ordnung, lls sie durch die Curve gehen soll, wieder

$$n\mu + 1 - p$$

ir jedes beliebige p, vorausgesetzt dass

$$n \geqq n_1 + n_2 - 3$$

t; in dem anderen Fall setze man

$$n = n_1 + n_2 - \delta,$$

nd findet dann als gesuchte Anzahl von Bedingungen:

$$n\mu + 1 - p + \frac{(\delta - 1)(\delta - 2)(\delta - 3)}{6}.$$

iehe Halphen, l. c., p. 18.

Die Raumcurve, welche der vollständige Schnitt zweier Flächen m den Ordnungen n_1, n_2 ist, wird durch

$$N(n_1) - N(n_1 - n_2) - 1$$

illkürlich im Raum gegebene Punkte individualisirt.

Wenn die Schnittlinie zweier Flächen n^{ter} Ordnung eine vollständig auf einer Fläche p^{ter} Ordnung liegende Curve von der rdnung np enthält, so ist ihr übriger Theil eine auf einer Fläche on der Ordnung $n - p$ gelegene Curve $[n(n - p)]^{\text{ter}}$ Ordnung. oncelet, 1830.

Alle Flächen n^{ter} Ordnung, die durch $N(n) - 2$ beliebig n Raum gegebene Punkte gehen, schneiden sich ausser in diesen och in anderen $n^3 - N(n) + 2$ durch die ersteren bestimmten unkten.

Drei Flächen von den Ordnungen n_1, n_2, n_3 schneiden sich $n_1 n_2 n_3$ Punkten, von denen ein Theil durch die übrigen bestimmt ist. Es sind ins Besondere, wenn $n_1 \geqq n_2 + n_3$ ist,

$$\tfrac{1}{2} n_2 n_3 (2 n_1 - n_2 - n_3 + 4) - 1$$

unkte willkürlich und der Rest ist durch diese bestimmt; wenn lagegen $n_1 < n_2 + n_3$ aber $n_1 > n_2$, $n_1 > n_3$ ist, so beträgt die Anzahl der willkürlichen Punkte

$$\tfrac{1}{2} n_2 n_3 (2 n_1 - n_2 - n_3 + 4) + N(n_2 + n_3 - n_1 - 4).$$

Diese Formeln gelten nicht für $n_2 = n_3$. Jacobi, *Crelle*, 15.

Wenn von den n^3 Punkten, die drei Flächen n^{ter} Ordnung gemeinsam sind, $n^2 p$ auf einer Fläche p^{ter} Ordnung liegen, so befinden sich die $n^2(n - p)$ übrigen auf einer Fläche $(n - p)^{\text{ter}}$ Ordnung. Poncelet.

Drei Flächen von den Ordnungen n_1, n_2, n_3, welche ein Curve n^{ter} Ordnung und r^{ter} Classe (r^{ten} Rangs) gemeinsam haben schneiden sich überdies in

$$n_1 n_2 n_3 - n(n_1 + n_2 + n_3 - 2) + r$$

Punkten.

Wenn diese Curve auf der ersten Fläche eine Doppelcurv ist (vergl. § 4), *so beträgt die Anzahl der gemeinsamen Punk*

$$n_1 n_2 n_3 - n(n_1 + 2n_2 + 2n_3 - 4) + 2r.$$

Siehe Salmon-Fiedler, *Geom. des Raumes,* 2, p. 145, 14 3te Ausg.

Wenn ein drei Flächen von den Ordnungen n_1, n_2, n_3 g meinschaftlicher Punkt für sie ein vielfacher Punkt (vergl. § - *von den Ordnungen λ, μ, bez. ν ist, so besteht die nothwendi und ausreichende Bedingung, damit in diesem Punkt sich $\lambda\mu$ der $n_1 n_2 n_3$ Schnitte vereinigen, darin, dass die Berührungskeg an die drei Flächen in dem gemeinsamen Punkt keine gemei schaftliche Erzeugende haben.* Einen strengen Beweis dies Satzes, der die Erweiterung eines ähnlichen Theorems über d ebenen Curven ist (siehe z. B. die Arbeit von Voss, die a S. 129 citirt wurde, *Math. Ann.,* 27, p. 533 und ff.), hat Be zolari, *Ann. di mat.,* 24 zu geben versucht; doch sind sei Untersuchungen viel umfangreicher.

Mit den Schnitten von Flächen beschäftigten sich Poncele *Traité des propriétés projectives des figures* etc., 2, Metz u Paris, 1822; Jacobi, *Crelle,* 15; Plücker, ib., 16, 19; Cayle *Collected mathematical papers,* 13 Bde. und ein Indexban Cambridge 1889—1898, 1, p. 259; Reye, *Math. Ann.,* 2; e

Von besonderem Interesse sind die hierher gehörigen Unt suchungen über Flächen, welche vielfache Punkte oder Lini gemeinschaftlich haben.

Resultate darüber verdankt man Cayley's Abhandlung üb die birationalen Transformationen des Raums: *On the ration transf. between two spaces, Proc. of the Lond. Math. Soc.,* Bd. 1870 = *Coll. math. papers,* 7, p. 189 mit ihren sogenannten *Aeq valenz- und Postulationsformeln.* Spätere Untersuchungen si von Noether, *Ann. di mat.,* (2), 5 und Anderen.

Man kann über die Flächen und Raumcurven Theoreme a stellen, die sich als Erweiterungen der Sätze ansehen lass welche die Grundlage der Theorie der Punktgruppen auf ei ebenen Curve bilden.

Es sei eine allgemeine Fläche F_n von der Ordnung n gegeben. Zwei Curven R, R', welche zusammengenommen den vollständigen Schnitt von F_n durch eine andere Fläche bilden, heissen *residual* und die eine das *Residuum* der anderen. Zwei Curven heissen ferner *corresidual*, wenn jede von ihnen in Bezug auf dieselbe dritte Curve *residual* ist. Analoge Definitionen gelten für die Gruppen von Punkten, welche aus einer Raumcurve von Flächen ausgeschnitten werden.

Wir können jetzt die *Restsätze* über die Flächen und Raumcurven auf die folgende Art fassen:

Sind auf einer Fläche zwei Curven R, R' residual zu derselben Curve R'', also corresidual zueinander, so sind sie es auch in Bezug auf jede andere Curve $R''', \ldots$, welche zu einer von ihnen (etwa R) residual ist.

Es sei eine Curve R als Schnitt zweier Flächen F, Φ gegeben und R' sei eine Residual- oder Restcurve von R; die durch R' gehenden Flächen mögen R in Punktgruppen schneiden, die zu einer anderen gegebenen Gruppe corresidual sind; nimmt man nun für F, Φ und R' andere Flächen bez. Curven und lässt nur R unverändert, so bleibt das System der Punktgruppen dasselbe.

Untersuchungen dieser Art (über die *Geometrie auf einer algebraischen Fläche*), deren erste Anregung Clebsch zu verdanken ist, stellte speciell Noether, *Math. Ann.*, 2, 8 an; in der letzten Zeit haben sich namentlich Castelnuovo und Enriques in verschiedenen Publicationen damit beschäftigt. Eine Darlegung der erhaltenen Resultate findet man in einer Arbeit der letzteren Autoren, *Math. Ann.*, 48.

Die ersten Studien über die Theorie der Flächen stammen aus der Zeit Euler's, von dem auch die Grundlage der Theorie der abwickelbaren Flächen herrührt.

Systematische Behandlungen dieser Theorie der Flächen vom Standpunkt der höheren Geometrie aus gibt es nicht viele. Indem wir uns vorbehalten, die speciellen Arbeiten an den betreffenden Stellen zu citiren, führen wir hier als grundlegend nur an: die Abhandlung von Cremona, *Preliminari di una teoria geometrica delle superficie*, Bologna, 1866, deutsch von Curtze, *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Oberflächen*, Berlin, 1870 und *Die analytische Geometrie des Raumes* von Salmon, deutsch v. Fiedler, 3te Aufl., Leipzig 1880. Man

beachte, dass in der deutschen Uebersetzung des Cremona'sche Werkes zahlreiche neue Abschnitte hinzugefügt wurden, die i dem italienischen Text nicht enthalten sind; unsere Citate be ziehen sich überall auf die deutsche Ausgabe.

§ 2. Analytische Darstellung der gewundenen Curven. Die Monoidflächen Cayley's.

In der Lehre von den algebraischen Raumcurven ist d analytische Darstellung dieser Curven ein besonders interessant Problem.

Wenn die Coordinaten eines Punkts der Curve als Function eines Parameters festgestellt sind, so ist das Problem damit g löst; es ist jedoch nur selten thunlich, die Coordinaten in dies Art auszudrücken.

Der Gedanke, die Curve durch die Gleichungen zwei Flächen darzustellen, welche durch sie gehen, bietet sich als d natürlichste zunächst dar; man erkennt aber leicht, dass Curven gibt, welche nicht *vollständige Schnitte* zweier Fläch sind; diese Darstellung lässt uns daher im Stich, da sie d Raumcurve im Allgemeinen *nicht individualisiren* kann.

Alsdann dachte man daran, die Curve durch die Gleichung *dreier* durch sie gehender Flächen zu bestimmen, welche son keine Punkte gemeinschaftlich haben. Man sah aber ein, da im Allgemeinen auch *drei* Flächen nicht hinreichen, und fand Folge eines Theorems von Kronecker, *Crelle*, 92, welches si auf die Lehre von den algebraischen Funktionen bezieht, da die Gleichungen von *vier* Flächen nöthig sein können, um ei allgemeine Curve zu kennzeichnen. Vahlen, *Crelle*, 108 g dafür das folgende Beispiel an: Man nehme an, der Schn zweier Flächen F_μ, F_ν von den Ordnungen μ, ν zerfalle in zw Curven R_m^p, $R_{m'}^{p'}$ von den Ordnungen m, m' und den Geschlechte p, p'*). Die Anzahl der Schnittpunkte der beiden Curven

$$s = m(\mu + \nu - 4) - 2(p - 1).$$

Legt man nun eine neue Fläche F_ϱ nur durch R_m^p, so wi diese von $R_{m'}^{p'}$ in

$$S = \mu\nu\varrho - m(\mu + \nu + \varrho - 4) + 2(p - 1)$$

---

1) Ueber die Definition des Geschlechts der Raumcurven siehe §

nkten geschnitten werden, welche auf allen drei Flächen, aber cht auf R_m^p liegen.

Nun wird es im Allgemeinen nicht möglich sein, für eine gebene Curve R_m^p drei Flächen derart zu bestimmen, dass S rschwindet; denn, betrachtet man eine Curve 5ter Ordnung m Geschlecht Null R_5^0, welche eine vierfach schneidende erade (eine Quadrisecante) hat, so muss, wenn S verschwinden ll, weil durch R_5^0 keine Fläche zweiter Ordnung geht, $= \nu = \varrho = 3$ sein; durch drei Flächen 3ter Ordnung allein ann aber R_5^0 nicht bestimmt werden, da, wie man leicht sieht, de solche Fläche, weil sie R_5^0 enthält, auch die Quadrisecante nthalten müsste.

Eine andere Methode, eine Raumcurve darzustellen, besteht arin, die Gesammtheit aller die Curve treffender Geraden zu berachten; führt man die sechs Geradencoordinaten im Raum ein, so ird der Complex von Geraden analytisch durch eine Beziehung wischen diesen sechs Coordinaten ausgedrückt; umgekehrt aber tellt nicht jede Relation zwischen den sechs Geradencoordinaten uf solche Art eine Curve dar. Siehe Kap. 14. Mit dieser Darstellung beschäftigten sich Cayley, *Quart. Journ.*, 3, 5, 1860, 1862 und Voss, *Math. Ann.*, 13.

Noch eine weitere Darstellungsart schliesslich rührt ebenalls von Cayley her und beruht auf den sogenannten *Monoidflächen.*

Es seien x_1, x_2, x_3, x_4 die homogenen Coordinaten eines Punkts der Curve und von dem Punkt O $(x_1 = x_2 = x_3 = 0)$, iner Ecke des Fundamentaltetraeders, aus möge die Curve R_m^p von der Ordnung m und dem Geschlecht p auf die Ebene $x_4 = 0$ projicirt werden.

Die Gleichung der Projectionscurve sei

$$f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0,$$

worin wir uns die Coordinaten ξ derart gewählt denken, dass

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = x_1 : x_2 : x_3 \quad \text{ist.}$$

Es bestehen dann die Relationen

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \xi_1 : \xi_2 : \xi_3 : \frac{\psi_n(\xi)}{\psi_{n-1}(\xi)},$$

worin die ψ rationale ganze Functionen der ξ von der Ordnung n bez. $n - 1$ sind.

Die Curve R_m^p ergibt sich dann als Schnitt der beide Flächen

$$f_m(x) = 0 \quad \text{und} \quad x_4\psi_{n-1}(x) - \psi_n(x) = 0,$$

von welchen die erste ein Kegel m^{ter} Ordnung ist, dessen Spitz in dem Punkt O $(x_1 = x_2 = x_3 = 0)$ liegt, und die zweite ein Fläche n^{ter} Ordnung ist, die den Punkt O zum $(n-1)$-fache Punkt hat (vergl. § 4) und von Cayley eine *Monoid*fläche g nannt wurde.

Der Kegel und das Monoid schneiden sich ausser in h noch in $m(n-1)$ *durch O gehenden Geraden, welche die Schnit zweier Kegel* $f_m = 0$ *und* $\psi_{n-1} = 0$ *sind. Diese Geraden theil sich in*

$$(n-1)(m-n) + \alpha$$

doppelt zu zählende und

$$(n-1)(2n-m) - 2\alpha$$

weitere Gerade, wobei α *auch Null sein kann; jede d* $(n-1)(m-n) + \alpha$ *Geraden ist eine Doppelgerade d Kegels* $f_m = 0$; *sowohl die* $(n-1)(m-n) + \alpha$ *wie d* $(n-1)(2n-m) - 2\alpha$ *Geraden, deren Anzahl zusamm* $n(n-1) - \alpha$ *beträgt, liegen auf dem Kegel* $\psi_n = 0$.

Die beiden Kegel $\psi_n = 0$ und $\psi_{n-1} = 0$ heissen *der obe bez. der untere Kegel* des Monoids.

Wenn R_m^p *keine ebene Curve ist, so muss immer*

$$n \geqq \tfrac{1}{2}m \quad \textit{sein;}$$

im Uebrigen ist die Ordnung des Monoids nicht bestimmt, d man ein Monoid durch ein anderes von verschiedener Ordnu ersetzen kann.

Dieser Kunstgriff, wie man wohl sagen darf, wurde vo Cayley, *Compt. Rend.*, 1862 = *Coll. math. papers*, 5, 7 a gegeben und später von anderen Autoren Noether, Halphe Em. Weyr, etc. bei ihren Studien über die Raumcurven benutz

§ 3. Classification der gewundenen Curven.

Mit dem Problem der analytischen Darstellung der Raun curven steht das ihrer Classification in enger Verbindung; den für die Raumcurven gilt nicht, wie für die ebenen Curven od die Flächen, der Satz, dass die Ordnung zur Charakterisirun der Art der Curve genüge; in der That existiren schon für d

e Ordnung zwei besondere durch vollständig verschiedene Eigenhaften ausgezeichnete Curven, wie zuerst Salmon, *Cambr. ourn.*, 5, 1850 und dann Steiner, *Flächen 3ten Grades, Crelle,* 3, 1856 nachgewiesen hat.

Das Problem, von dem die Rede ist, lässt sich präcis auf ie folgende Weise aussprechen:

Die verschiedenen Familien von Curven derselben Ordnung d erart aufzuzählen, zu definiren und voneinander zu unterscheiden, ass niemals eine Familie der specielle Fall einer anderen allgemeineren sein kann.

Bei diesen Untersuchungen kommen nur Curven ohne singuläre Punkte in Betracht (vergl. § 4), indem als Postulat angenommen wird, dass jede Curve mit singulären Punkten der pecielle Fall einer Curve derselben Ordnung ohne singuläre 'unkte sei. Siehe Halphen, an dem unten citirten Ort.

Mit diesem Problem beschäftigten sich besonders Halphen nd Noether in zwei Abhandlungen, welche von der Berliner kademie 1882 den Steiner'schen Preis erhielten, Halphen, *Journ. de l'École polyt.,* Hft. 52, 1882; Noether, *Berlin. Abandl.,* 1883; *Crelle,* 93. Auf sie folgten Andere, darunter 'alentiner, *Acta math.,* 2; Noether, ib., 8; etc.

Diese Untersuchungen haben noch nicht dazu geführt, das 'roblem in seiner vollen Allgemeinheit aufzulösen; bisher ist lies nur in speciellen Fällen gelungen.

Geht man davon aus, dass die Ordnung d allein nicht genügt, ine Raumcurve zu charakterisiren, so wird man wohl daran lenken, andere Zahlen einzuführen, die man *Charakteristiken* ennen könnte, und die in Verbindung mit der Ordnung die Curve von den übrigen unterscheiden würden. Wenn man nun unächst die beiden Arten von Raumcurven 4ter Ordnung im Auge hat, so bietet sich der Gedanke, in Verbindung mit der Ordnung, die Anzahl h der *scheinbaren Doppelpunkte* zu betrachten, d. h. die Anzahl der Sehnen, die sich von einem *beliebigen* Punkt des Raums durch die Curve ziehen lassen.

Man findet aber, dass für die Ordnung 9 zwei *verschiedene* Curven existiren, für welche die Anzahl dieser Doppelpunkte dieselbe ist, nämlich $h = 18$. Die beiden Curven lassen sich jedoch durch eine andere Zahl unterscheiden, die Halphen mit dem Buchstaben n bezeichnete, *und welche die geringste Ordnung der Kegel angibt, welche alle h Sehnen enthalten, die von einem beliebigen Punkt des Raums an die Curve gezogen werden können; für die eine ist* $n = 4$, *für die andere* $n = 5$. Halphen selbst

jedoch bemerkte, dass zwei verschiedene Curven 15ter Ordnun existiren, für welche $h = 63$, $n = 9$ ist.

Cayley, *Coll. Math. Pap.*, 5, p. 613, sowie *Crelle*, 111 macht darauf aufmerksam, dass in gewissen Fällen, in welchen Halphe eine Curve gefunden hatte, eine solche in Wirklichkeit nur fü specielle Configurationen der h Knotenlinien existiren kann; wie e z. B. fand, reicht es für die Existenz der Curven 9ter Ordnun für welche $h = 16$ und $n = 4$ ist, nicht hin, dass die 1 Knotenlinien auf einem Kegel 4ter Ordnung liegen; sie müsse gleichzeitig auf zwei solchen Kegeln liegen. Die drei Zahle d, h, n genügen daher im Allgemeinen nicht, die Curve z individualisiren, es müssen ausserdem noch die Bedingunge untersucht werden, unter welchen die Curve, welche die charakteristischen Zahlen besitzt, wirklich existirt.

Wir wollen nun die Hauptsätze angeben, zu denen Halphe und Andere gekommen sind.

Die Curven von der Ordnung d mit h scheinbaren Doppe punkten bilden eine einzige Familie, wenn h zwischen

$$\frac{(d-1)(d-2)}{2} \text{ und } \frac{(d-2)(d-3)}{2} + 1 \text{ liegt.}$$

Der grösste Werth von h ist $\frac{(d-1)(d-2)}{2}$, *und der kleins ist die grösste ganze Zahl in* $\frac{1}{4}(d-1)^2$ *enthaltene Zahl.*

Man kann jedoch die Zahl h zwischen diesen Grenzen nic willkürlich wählen, weil für ein gegebenes d die Reihe der Lücken aufweist; von der grössten in

$$\frac{(d-1)(d-2)}{3}$$

enthaltenen ganzen Zahl an sind dagegen Lücken nicht me vorhanden.

Die Curven d^{ter} *Ordnung, für welche h kleiner als die gröss in* $\frac{(d-1)(d-2)}{3}$ *enthaltene ganze Zahl ist, liegen auf Fläch* 2ter *Ordnung; ist h grösser als diese Zahl, so befinden sich die en sprechenden Curven auf einer Fläche* 3ter *Ordnung, ist h gröss als* $3\frac{(d-2)^2}{8}$, *auf einer Fläche* 4ter *Ordnung etc.*

Jede Curve d^{ter} *Ordnung, für welche die Zahl n (siehe obe kleiner als* $\frac{2}{3}(d-3)$ *ist, liegt auf einer Fläche* 2ter *Ordnung.*

Jede Curve von der Ordnung d, welche nicht auf ein Fläche 2ter *Ordnung gelegen ist und für welche* $n < \frac{3}{4}(d-4)$ *i*

gt auf einer Fläche 3ter Ordnung; ist $n < \frac{4}{5}(d-5)$, so befindet sich die Curve auf einer Fläche 4ter Ordnung, wenn e nicht schon auf Flächen 2ter oder 3ter Ordnung liegt; ist $< \frac{3}{6}(d-6)$ und ist die Curve nicht auf einer Fläche niedrigerer rdnung gelegen, so liegt sie auf einer solchen 5ter Ordnung.

Die folgenden Tabellen geben für jede Ordnung d die Anhl der existirenden Curvenfamilien an; wir folgen dabei der itirten Abhandlung Halphen's, beschränken uns jedoch auf die rsten Fälle, um so mehr, weil die Resultate Halphen's nicht ollständig sicher sind; bei der neunten Ordnung muss z. B. die Halphen'sche Tabelle in der Art corrigirt werden, wie Cayley, *oll. Math. Papers*, 5, p. 616 angegeben hat; über die Definition on *Geschlecht* siehe § 4.

1) *Nicht degenerirte gewundene Curven 2ter Ordnung gibt s nicht;*

2) *Ordnung $d = 3$; es existirt eine einzige Familie gewundener Curven 3ter Ordnung; die Anzahl der scheinbaren Doppelpunkte ist $h = 1$; das Geschlecht $p = 0$;*

3) *Ordnung $d = 4$; es gibt zwei Familien gewundener Curven 4ter Ordnung; sie unterscheiden sich durch die Anzahl der scheinbaren Doppelpunkte, die 2 bez. 3 beträgt; ihr Geschlecht ist 1 bez. 0;*

4) *Ordnung $d = 5$; es existiren drei Familien gewundener Curven 5ter Ordnung.*

In der nachstehenden Tabelle sind die entsprechenden Werthe von h und n, die kleinsten Ordnungen der Flächen, aus deren Schnitten diese Curven sich ergeben, die aus den Schnitten dieser Flächen resultirenden Ergänzungscurven und schliesslich das grösste Geschlecht p der Curven jeder Familie angegeben:

$d = 5$ $h =$	$n =$	kleinste Ordnungen der Flächen etc.	Ergänzungscurven	$p =$
4	2	2 und 3	eine Gerade	2
5	2	3 und 3	eine gewundene Curve 4ter Ordnung mit 3 scheinbaren Doppelpunkten	1
6	3	3 und 3	zwei Kegelschnitte	0

Alle diese Curven werden durch 20 Bedingungen bestimmt.

Salmon unterscheidet in seiner *Geometrie des Raumes*, Thl. 2 vier Familien von Curven 5ter Ordnung; die 4te ist jedoch als

specieller Fall der 3ten anzusehen; siehe Halphen, *Éc. polyt* 52, p. 12, Anm.

5) *Ordnung* $d = 6$. *Es gibt fünf Familien von gewu denen Curven* 6ter *Ordnung. Die Anzahl der Constanten all dieser Curven beträgt 24, d. h. jede von ihnen wird durch 2 Bedingungen bestimmt.*

Die entsprechende Tabelle lautet:

$d = 6$	$h =$	$n =$	kleinste Ordnungen der Flächen etc.	Ergänzungscurven	$p =$
	6	2	2 und 3	0	4
	7	3	3 und 3	gewundene Curve 3ter Ordnung	3
	8	3	3 und 3	eine Gerade und ein Kegelschnitt	2
	9	3	3 und 3	3 Gerade	1
	10	4	3 und 4	eine zweite Curve 6ter Ordnung von derselben Familie	0

6) *Ordnung* $d = 7$. *Es gibt sieben Familien gewunden Curven* 7ter *Ordnung. Die Anzahl der Constanten einer jed beträgt 28.*

$d = 7$	$h =$	$n =$	kleinste Ordnungen der Flächen etc.	Ergänzungscurven	$p =$
	9	3	2 und 4	eine Gerade	6
	10	3	3 und 3	ein Kegelschnitt	5
	11	4	3 und 3	zwei Gerade	4
	12	4	3 und 4	eine gewundene Curve 6ter Ordnung mit 6 scheinbaren Doppelpunkten	3
	13	4	4 und 4	eine gewundene Curve neunter Ordnung	2
	14	4			1
	15	5			0

In allen diesen Fällen genügt, wie man sieht, die Zahl zur Charakterisirung der Curve; erst von der neunten Ordnu

n reicht die Zahl h, wie wir bereits gesagt haben, zu diesem weck nicht mehr aus.

Dementsprechend gilt für die Ordnung $d = 9$ auch die ndere Eigenschaft, dass es zwei Familien von Curven gibt, elche dasselbe grösste Geschlecht p, nämlich $p = 10$, haben, nd als verschieden voneinander anzusehen sind.

Ueber die Einzelheiten speciell in Bezug auf die vielfachen ecanten bei den verschiedenen oben aufgezählten Familien von urven verweisen wir auf Noether, an den angegebenen Stellen, . B. *Crelle,* 93, p. 310.

Zum Schluss dieses Paragraphen wollen wir noch hinzufügen, dass einige Autoren auch daran gedacht haben, die gefundenen Curven nach der Beschaffenheit der ihnen entsprechenden abwickelbaren Flächen zu classificiren. Damit beschäftigten sich Chasles, *Compt. Rend.,* 54 und Schwarz, *Crelle,* 64, p. 1.

§ 4. Singuläre Punkte der Flächen und Raumcurven. Ihre charakteristischen Zahlen. Vielfache Secanten der Raumcurven. Das Geschlecht. Die Cayley'schen Formeln. Berührungen von Flächen.

Wenn ein Punkt einer Fläche derart ist, dass jede durch ihn gehende Gerade daselbst die Fläche in zwei zusammenfallenden Punkten trifft, so heisst er ein *Doppelpunkt* der Fläche.

Es gibt unendlich viele Gerade, die durch den Doppelpunkt P gehen, und in ihm eine dreipunktige Berührung (drei unendliche nahe Schnittpunkte) mit der Fläche haben. Der Ort dieser Geraden ist ein Kegel 2ter Ordnung von der Beschaffenheit, dass jede Berührungsebene an ihn die Fläche in einer Curve schneidet, die in P eine Spitze hat.

Dieser Kegel kann in zwei verschiedene oder in zwei zusammenfallende Ebenen zerfallen; man erhält so drei Arten von Doppelpunkten: *conische, biplanare und uniplanare Punkte.*

Der *konische Punkt* führt auch den Namen *Knotenpunkt,* der *uniplanare* oder *Cuspidalpunkt* wurde von Cayley *Pinchpoint,* von den Franzosen auch *pinces-point* genannt.

Wenn $F = 0$ in homogenen Coordinaten die Gleichung der Fläche ist, so besteht die Bedingung, damit die Fläche einen Doppelpunkt habe, darin, dass ihre Discriminante, d. h. das Resultat der Elimination der x aus den vier Gleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x_4} = 0$$

gleich Null sei, und soll ein Punkt (x) ein doppelter sein, s müssen seine Coordinaten gleichzeitig diesen vier Gleichung genügen.

Es gibt im Allgemeinen sechs Erzeugende des eben erwähnte Tangentialkegels, welche die Fläche vierpunktig berühren, d. sie in vier unendlich nahen Schnittpunkten treffen.

Ein konischer Punkt vermindert im Allgemeinen die Clas der Fläche um zwei Einheiten und wird deshalb mit C_2 b zeichnet. Von biplanaren und uniplanaren Punkten gibt es ve schiedene Arten; zu ihrer Bezeichnung dienen die Symbole oder U_j, je nachdem sie die Classe der Fläche um i oder Einheiten erniedrigen.

Diese singulären Punkte wurden *für die cubischen Fläch* von Schläfli, *Phil. Trans.*, 1863; Cayley, ib., 1869; Roder berg, *Math. Ann.*, 14, p. 46 studirt. Siehe weiter unten Kap. 1 § 1. Ausschliesslich der Theorie der biplanaren und uniplanare Punkte für eine beliebige Fläche ist die Arbeit von Roh *Math. Ann.*, 22, p. 124 gewidmet.

Ein Punkt einer Fläche, welcher derart ist, dass jede dur ihn gehende Gerade die Fläche daselbst in r zusammenfallend Punkten trifft, heisst ein r-facher Punkt der Fläche. Auch hi wie in dem vorigen Fall, *lässt sich ein Kegel r^{ter} Ordnung co struiren, von welchem jede Erzeugende in diesem Punkt $r+$ Punkte mit der Fläche gemeinschaftlich hat (Osculationskegel); a diesem Kegel gibt es dann im Allgemeinen $r(r+1)$ Erzeugend welche $r+2$ Punkte mit der Fläche gemeinsam haben.*

Eine Fläche n^{ter} Ordnung mit einem n-fachen Punkt O nothwendiger Weise ein Kegel mit der Spitze in O.

Eine Fläche kann *mehrfache oder singuläre Linien* habe d. h. Linien, deren sämmtliche Punkte mehrfach sind. Dur eine r-fache Linie gehen r Schalen der Fläche.

Die Punkte einer r-fachen Linie sind r-fache Punkte, welche der oben besprochene Tangentenkegel in r Ebenen zerfä

Für $r = 2$ erhält man, wenn die beiden Tangentenebe zusammenfallen, die *Cuspidalcurve* der Fläche, deren Punk sämmtlich uniplanar sind.

Wie für die ebenen Curven, so lässt sich auch für Flächen eine Zahl definiren, die *Geschlecht* heisst, und im A gemeinen, wenn die Fläche keine anderen singulären Linien v höherer Ordnung hat, von der Anzahl ihrer Doppellinien u

uspidallinien abhängt; dabei besitzt die Fläche jedoch statt *ines einzigen* Geschlechts mehrere Geschlechter.

Eine so beschaffene Zahl wurde von Clebsch, *Compt. Rend.*, 7, 1868 eingeführt und wird für die Flächen n^{ter} Ordnung als ie Anzahl der Coefficienten definirt, welche in der Gleichung iner Fläche $(n-4)^{\text{ter}}$ Ordnung, die durch die Doppel- und uspidallinien der gegebenen Fläche geht, noch unbestimmt leiben. Diese Zahl heisst *geometrisches* oder *erstes Geschlecht* nd wird mit p_g bezeichnet.

Hat die Fläche keine Doppel- und Cuspidallinien, so ist hr geometrisches Geschlecht:

$$p_g = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3}.$$

Die Zahl p_g bleibt bei jeder birationalen Transformation nverändert. Der Satz wurde von Clebsch, *Compt. Rend.*, 1868 nitgetheilt und von Noether, *Math. Ann.*, 2 und Zeuthen, ib., 4 bewiesen. Neben diesem Geschlecht untersuchte Noether, ib., 8 zwei andere Zahlen von analoger Eigenschaft.

Wenn die Fläche eine Doppelcurve von der Ordnung $d\ (\geq 0)$ und dem Geschlecht π hat und eine gewisse endliche Zahl $t\ (\geq 0)$ von Punkten besitzt, welche für die Fläche und die Curve dreifach sind, so heisst die Zahl

$$p_n = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6} - (n-4)d + 2t + \pi - 1$$

numerisches Geschlecht. Cayley, *Math. Ann.*, 3. *Es ist immer* $p_g \geq p_n$. Wenn $p_g = p_n$ ist, so pflegt man die Fläche *regulär* zu nennen.

Für rationale (auf eine Ebene eindeutig abbildbare) Flächen (vergl. § 7) *ist* $p_n = p_g = 0$.

Zum *Geschlecht* der Regelflächen wird das Geschlecht p ihrer ebenen Schnitte genommen, *da diese offenbar sämmtlich dasselbe Geschlecht haben. Für die Regelflächen ist*

$$p_g = 0,\ p_n = -p.$$

Ueber *einen anderen Charakter der Flächen* siehe Segre, *Atti Torino*, 1896 und über weitere Untersuchungen bez. der verschiedenen Geschlechter der Flächen Castelnuovo-Enriques, *Math. Ann.*, 48, sowie das ausgezeichnete Buch von Picard und Simart, *Théorie des fonctions algebriques de deux variables indépendantes*, Paris 1897.

Die allgemeine Fläche von der Ordnung $n > 3$ besitzt kein Gerade.

Wenn eine Fläche n^{ter} Ordnung eine $(n-2)$-fache Curve enthält, so besitzt sie Gerade, ist die vielfache Curve eine Gerade, so enthält die Fläche ausser ihr noch $2(3n-4)$ andere Gerade.

Ueber eine solche Fläche siehe Noether, *Math. Ann.* 3, p. 17?

Eine Fläche n^{ter} Ordnung kann nicht mehr als $n(11n-24)$ Gerade haben.

Durch eine Gerade einer Fläche n^{ter} Ordnung gehen immer $(n+2)(n-2)^2$ Ebenen, welche die Fläche noch in einem anderen Punkt ausserhalb der Geraden berühren.

Wenn n die Ordnung einer Regelfläche ist, so liegt die Ordnung ihrer Doppelcurve (vergl. § 1) *zwischen $(n-2)$ und $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$.* Cayley.

Untersuchungen über die Relationen, welche zwischen den charakteristischen Zahlen und den Singularitäten der Fläche bestehen, wurden von Salmon, Cayley, Zeuthen angestellt; siehe Salmon-Fiedler, *Geom. d. Raum.*, 2, p. 671.

Wenn ein Punkt einer Raumcurve derart ist, dass jede durch ihn gehende Ebene die Curve daselbst in zwei zusammenfallenden Punkten trifft, so heisst er ein *Doppelpunkt* der Curve. *Es existiren im Allgemeinen in dem Doppelpunkt zwei Tangenten und zwei Osculationsebenen an die Curve.* Fallen die beiden Tangenten zusammen, so erhält man *eine Spitze* oder *einen stationären Punkt* der Curve. *In einem stationären Punkt fallen auch die beiden Osculationsebenen der Curve zusammen.*

Wenn zwei Flächen sich in einem Punkt P berühren (ein gemeinschaftliche Berührungsebene in P besitzen), so hat ihre Schnittcurve in P einen Doppelpunkt.

Ist dieser Punkt speciell eine Spitze, so sagt man, *die beiden Flächen haben in P eine stationäre Berührung.*

Wenn die Schnittcurve der beiden Flächen in P einen dreifachen Punkt hat, so sagt man, *sie osculiren sich in P. Alsdann schneidet jede Ebene durch P die beiden Flächen in Linien, die einander osculiren.*

Ist ein zwei Flächen gemeinschaftlicher Punkt für die eine ein r_1-facher und für die andere ein r_2-facher, so ist er für die Schnittcurve ein vielfacher von der Ordnung $r_1 r_2$; ist $r_1 = r_2 =$ und haben die beiden Flächen in diesem Punkt denselben Osc

tionskegel, so ist der Punkt für den Schnitt ein $r(r+1)$-*cher.*

Wenn zwei Flächen von den Ordnungen n_1, n_2 *längs einer urve* n^{ter} *Ordnung eine Berührung* $(k-1)^{\text{ter}}$ *Ordnung haben, schneiden sie sich in einer zweiten Curve von der Ordnung* $n_2 - kn$.

Die grösste Anzahl von Punkten, in welchen zwei Flächen n den Ordnungen n_1, n_2 *sich berühren können, beträgt, wenn r Schnitt der beiden Flächen nicht degenerirt,*

$$\tfrac{1}{2} n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 4) + 1.$$

Venn der Schnitt der beiden Flächen dagegen degenerirt, so ann die Anzahl der Berührungspunkte grösser sein, so können B. zwei Flächen 2ter *Ordnung 4 Berührungspunkte haben.*

Für die gewundenen Curven und die entsprechenden Osculationsdeveloppabelen sind die folgenden Formeln, die sogenannten Cayley'schen, *Journ. de Liouville*, 10, 1845 = *Coll. Math. Pap.*, 1, p. 207, von Bedeutung, welche die verschiedenen harakteristischen Zahlen der Curve miteinander verbinden und en Plücker'schen Formeln analog sind (siehe Kap. 5, § 1), nit deren Hülfe sie sich zum Theil ermitteln lassen.

(Man vergleiche in § 1 die Definitionen in Bezug auf as aus der Raumcurve, der Osculationsdeveloppabelen, der Knotencurve und der Bitangentialdeveloppabelen bestehende ystem.)

Es sei:

n die Ordnung der Raumcurve,

r die Classe der Raumcurve oder ihr Rang,

h die Anzahl der scheinbaren Doppelpunkte der Curve d. h. die Anzahl der Geraden, welche man von einem beliebigen Punkt aus so ziehen kann, dass sie die Curve zweimal treffen,

y die Zahl der Ebenen, die durch einen beliebigen Punkt des Raumes gehen, und die Curve in zwei verschiedenen Punkten berühren (Bitangentialebenen), d. h. die Classe der Bitangentialdeveloppabelen,

β die Anzahl der Spitzen (stationären Punkte),

H die Anzahl der Doppelpunkte,

v die Anzahl der Inflexionstangenten (stationären oder Wendetangenten) der Curve (Tangenten, welche mit der Curve drei unendlich nahe Punkte gemeinschaftlich haben).

Es sei ferner:

m die Classe der Osculationsdeveloppabelen an die Curve,

r ihre Ordnung oder ihr Rang,

g die Anzahl der Geraden einer durchaus beliebigen Ebene welche so beschaffen sind, dass durch jede von ihnen zwe Berührungsebenen an die Developpabele gehen, oder di Classe der Congruenz der Schnittgeraden der Osculation ebenen der Curve, siehe Kap. 14,

x die Anzahl der in einer beliebigen Ebene gelegenen Punkt durch deren jeden zwei verschiedene Erzeugende der D veloppabelen gehen, oder die Ordnung der Knotencurve,

α die Anzahl der stationären Ebenen (Ebenen, welche d Developpabele längs zweier unendlich naher Erzeugende berühren, oder Ebenen, welche mit der Curve vier unendlic nahe Punkte gemeinschaftlich haben),

G die Anzahl der Doppeltangentialebenen (in zwei Punkte berührenden Ebenen) an die Developpabele,

v die Anzahl der Erzeugenden, durch deren jede drei cons cutive Tangentenebenen gehen (Inflexionserzeugende),

ω die Anzahl der Doppelerzeugenden der Developpabelen.

Es gelten dann die folgenden (Cayley'schen) Relationen:

$$\begin{aligned}
m &= r(r-1) - 2(x+\omega) - 3(n+v),\\
n &= r(r-1) - 2(y+\omega) - 3(m+v),\\
r &= m(m-1) - 2(g+G) - 3\alpha =\\
&= n(n-1) - 2(h+H) - 3\beta,\\
\alpha &= 3r(r-2) - 6(x+\omega) - 8(n+v),\\
\beta &= 3r(r-2) - 6(y+\omega) - 8(m+v),\\
n+v &= 3m(m-2) - 6(g+G) - 8\alpha,\\
m+v &= 3n(n-2) - 6(h+H) - 8\beta,
\end{aligned}$$

welchen *sechs* unabhängige Beziehungen entsprechen.

Geschlecht einer Raumcurve oder ihrer Osculationsdevelopp belen heisst die durch die folgenden Formeln definirte Zahl:

$$\begin{aligned}
p &= \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) - (h+H+\beta),\\
&= \tfrac{1}{2}(r-1)(r-2) - (y+\omega+m+v),\\
&= \tfrac{1}{2}(m-1)(m-2) - (g+G+\alpha),\\
&= \tfrac{1}{2}(r-1)(r-2) - (x+\omega+n+v).
\end{aligned}$$

Führt man jetzt noch die Charakteristiken ein:

k die Anzahl der scheinbaren Doppelpunkte der Knotencurve,

λ die Anzahl der berührenden Geraden, welche die gegebene Curve noch anderswo schneiden,

τ die Anzahl der dreifachen Punkte der Knotencurve oder der dreifachen Punkte der Developpabelen oder die Anzahl der Punkte, in denen sich drei (nicht unendlich nahe) Tangenten an die gegebene Curve schneiden,

λ' die Anzahl der Osculationsebenen, welche die gegebene Curve noch anderswo berühren,

τ' die Anzahl der dreifachen Tangentialebenen der gegebenen Curve,

R der Rang oder die Classe der Knotencurve,

p' das Geschlecht derselben,

so ergeben sich ferner die Beziehungen:

$$\lambda = n(r+4) - 6(r+\beta) - 4(\omega + H) - 2v,$$

$$\tau = \tfrac{1}{3}[(x - m - 3n - 3v - 2\omega)(r-2) + 8m + 20v + 10\beta + 18\omega],$$

$$\lambda' = m(r+4) - 6(r+\alpha) - 4(\omega + G) - 2v,$$

$$\tau' = \tfrac{1}{3}[(y - n - 3m - 3v - 2\omega)(r-2) + 8n + 20v + 10\alpha + 18\omega],$$

$$R = rm + 6r - 3n - 9m - 3v - 2G,$$

$$k = \tfrac{1}{2}[r^4 - 6r^3 + 11r^2 + 66r - 2r(r-5)(m+3n+3v+2\omega) + (m+3n+3v+2\omega)^2 - 58m - 126n - 126v - 76\omega - 24H],$$

$$p - p'(r-14) = \tfrac{1}{2}(r-5)(r-6) - (\omega + G + H).$$

Diese Formeln wurden untersucht von: Salmon, *Trans. R. Irish Acad.*, 23, 1857; Cayley, *Quart. Journ.*, 11 = *Coll. Math. Pap.*, 8, p. 72; Cremona, *Deutsche Uebers. der Preliminari*, Kap. 2 und Thl. 2, Kap. 4; Zeuthen, *Ann. di mat.*, 3. Sie werden auch von Salmon-Fiedler, *Geom. d. Raum.*, 2, p. 660 u. ff., 3te Aufl. angegeben.

Da die verschiedenen Autoren sich verschiedener Symbole zur Bezeichnung der Charakteristiken bedienen, so wollen wir zur Bequemlichkeit des Lesers nachstehend eine Tabelle dieser zur Anwendung gekommenen Bezeichnungen zusammenstellen.

Bezeichnungen				Bezeichnungen			
Cayley's	Cremona's	Salmon's	die unsrigen	Cayley's	Cremona's	Salmon's	die unsrigen
m	ν	m	n	x	ξ	x	x
n	μ	n	m	y	η	y	y
r	ϱ	r	r	ω	ω	d	ω
α	α	α	α	k	$\varkappa$	k	k
β	β	β	β	γ	λ	γ	λ
ν	θ	θ	ν	γ'	λ_1	γ'	λ'
g	γ	g	g	t	τ	t	τ
h	ε	h	h	t'	τ_1	t'	τ'
Δ	γ	G	G	D_x		p^*	p'
H	ε'	D	H	q		R	R

Der Raumcurve von der Ordnung $n_1 n_2$, welche der vo ständige Schnitt von zwei Flächen n_1^{ter} und n_2^{ter} Ordnung i die sich in δ Punkten einfach berühren und χ stationäre Berührung haben, entsprechen die folgenden Charakteristiken:

$$p = \tfrac{1}{2} n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 4) - (\delta + \chi - 1),$$

$$m = 3 n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 3) - 6\delta - 8\chi,$$

$$r = n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2) - 2\delta - 3\chi,$$

$$h = \tfrac{1}{2} n_1 n_2 (n_1 - 1)(n_2 - 1),$$

$$g = \tfrac{1}{2} n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 3)[9 n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 3) - \\ - 6(6\delta + 8\chi) - 22] + \tfrac{5}{2} n_1 n_2 + 2(3\delta + 4\chi)^2 + 22\delta + 28\chi$$

$$y = \tfrac{1}{2} n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)[n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2) - \\ - 2(2\delta + 3\chi) - 10] + 4 n_1 n_2 + \tfrac{1}{2}(2\delta + 3\chi)^2 + 10\delta + \tfrac{27}{2}$$

$$x = \tfrac{1}{2} n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)[n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2) - \\ - 2(2\delta + 3\chi) - 4] + \tfrac{1}{2}(2\delta + 3\chi)^2 + 4\delta + \tfrac{11}{2}\chi,$$

*) Diese Formel ist in dem Cremona'schen Werk fehlerh angegeben, und der Fehler wird von allen späteren Autoren wied holt. Herr Prof. Pittarelli an der Universität zu Rom war so liebe würdig, die Berichtigung Herrn Prof. Pascal mitzutheilen.

$$\begin{aligned}
\iota &= 2n_1n_2(3n_1 + 3n_2 - 10) - 3(4\delta + 5\chi),\\
\varkappa &= \chi,\\
\eta &= \delta,\\
\tau &= 0,\\
\upsilon &= 0,\\
\omega &= 0.
\end{aligned}$$

Wenn sich zwei Flächen von den Ordnungen n_1, n_2 in zwei (Ergänzungs-) Curven von den Ordnungen n, n' und den Classen r, r' schneiden, welche bez. h, δ; h', δ' scheinbare und wirkliche Doppelpunkte und χ, χ' Spitzen haben, und wenn k die Anzahl ihrer scheinbaren Schnitte, d. h. die Anzahl der Geraden, welche von einem Punkt des Raums so gezogen werden können, dass sie beide Curven schneiden, und i die Anzahl der wirklichen Schnitte bezeichnen, so bestehen die Relationen:

$$\begin{aligned}
&h + h' + k = \tfrac{1}{2}(n + n')\,(n_1 - 1)\,(n_2 - 1),\\
&r - r' = (n - n')(n_1n_2 - 1) - 2(h - h') - 2(\delta - \delta') - 3(\chi - \chi'),\\
&(n_1 + n_2 - 2)n = r + i + 2\delta + 3\chi,\\
&(n_1 + n_2 - 2)n' = r' + i + 2\delta' + 3\chi',
\end{aligned}$$

woraus auch folgt:

$$\begin{aligned}
n(n_1 - 1)\,(n_2 - 1) &= 2h + k,\\
n'(n_1 - 1)\,(n_2 - 1) &= 2h' + k.
\end{aligned}$$

Für eine auf einem Hyperboloid beschriebene Raumcurve, welche in α_1 bez. α_2 Punkten jede Erzeugende des 1ten bez. 2ten System des Hyperboloids trifft, δ Doppelpunkte und χ Spitzen besitzt, gelten die folgenden charakteristischen Zahlen:

$$\begin{aligned}
r &= 2\alpha_1\alpha_2 - 2\delta - 3\chi,\\
m &= 6\alpha_1\alpha_2 - 3(\alpha_1 + \alpha_2) - 6\delta - 8\chi,\\
y &= \tfrac{1}{2}[2(\alpha_1\alpha_2 - \delta) - 3\chi]^2 - 10(\alpha_1\alpha_2 - \delta - \chi) + 4(\alpha_1 + \alpha_2) - \tfrac{7}{2}\chi,\\
h &= \tfrac{1}{2}[\alpha_1(\alpha_1 - 1) + \alpha_2(\alpha_2 - 1)],\\
y &= \tfrac{1}{2}[6(\alpha_1\alpha_2 - \delta) - 3(\alpha_1 + \alpha_2) - 8\chi]^2 - 22\alpha_1\alpha_2 +\\
&\quad + \tfrac{27}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) + 2(11\delta + 14\chi),\\
x &= \tfrac{1}{2}[2(\alpha_1\alpha_2 - \delta) - 3\chi]^2 - 4(\alpha_1\alpha_2 - \delta) + \tfrac{11}{2}\chi,\\
\alpha &= 4[3\alpha_1\alpha_2 - 2(\alpha_1 + \alpha_2)] - 3(4\delta - 5\chi).
\end{aligned}$$

Wenn speciell die Raumcurve der vollständige Schnitt de Hyperboloids mit einer allgemeinen Fläche μ^{ter} Ordnung ist, s genügt es, in diesen Formeln $\alpha_1 = \alpha_2 = \mu$ zu setzen, um au ihnen die charakteristischen Zahlen für diesen neuen Fall z erhalten.

Eine auf einem Hyperboloid beschriebene Raumcurve, welch jede Erzeugende des 1ten und 2ten Systems in α_1 bez. α_2 Punkte trifft, kann nicht mehr als

$$\alpha_1\alpha_2 - \alpha_1 - \alpha_2 + 1$$

Doppelpunkte und Spitzen haben. Setzt man $\alpha_1 = \alpha_2 = \mu$, so er gibt sich der entsprechende Satz für den Fall, in welchem di Curve der vollständige Schnitt des Hyperboloids mit einer Fläch μ^{ter} Ordnung ist.

Die vorstehenden Theoreme lassen sich mit Hülfe der Ab bildung des Hyperboloids auf eine Ebene ableiten. Siehe § 7

Es seien n und p die Ordnung und das Geschlecht (sieh oben) einer algebraischen Regelfläche; ν und π die Ordnung un das Geschlecht einer auf der Regelfläche aufgezeichneten alg braischen Curve, welche für die Fläche einfach sei; k die An zahl der Schnittpunkte der Curve mit jeder Erzeugenden de Regelfläche und δ die Anzahl ihrer Doppelpunkte; *es gilt alsdan die bemerkenswerthe Relation:*

$$(k-1)\,\nu - \pi - \delta = \frac{k(k-1)}{2}\,n - k(p-1) - 1.$$

Für den Fall, in welchem die Regelfläche ein Kegel is wurde die Formel von Sturm, *Math. Ann.*, 19, p. 487 gefunde den allgemeinen Fall findet man bei Segre, *Lincei*, 1887; *Mat Ann.*, 34 behandelt.

Mit den Formeln dieses Paragraphen stehen diejenigen fü die Geraden in Zusammenhang, die eine Raumcurve in mehr a zwei Punkten treffen (*die vielfachen Secanten*), oder die zwei od mehr Raumcurven schneiden.

Die dreifachen Secanten einer Raumcurve n^{ter} Ordnung m h scheinbaren Doppelpunkten bilden eine Regelfläche von d Ordnung

$$(n-2)\left(h - \frac{n(n-1)}{6}\right).$$

Diese Fundamentalformel findet sich zum ersten Mal bei euthen, *Ann. di mat.*, (2), 3, 1870; dann bei Picquet, *Bull. la Soc. math.*, 1, 1872, p. 268; Schubert, *Kalkül der abählenden Geometrie*, Leipzig 1879, § 43; Geiser, *Collect. math. memoriam Chelini*, Mediolani 1881 und bei Berzolari, *Rend. alermo*, 9, 1895.

Die Anzahl der vierfachen Secanten einer Raumcurve n^{ter} *rdnung mit* h *scheinbaren Doppelpunkten beträgt*

$$\tfrac{1}{2}h(h-4n+11)-\tfrac{1}{24}n(n-2)(n-3)(n-13).$$

Auch diese Formel kommt zuerst bei Zeuthen vor, l. c., ann bei Picquet, l. c. und *Compt. Rend.*, 77, 1873.

Die Anzahl der Geraden, welche eine Curve n^{ter} *Ordnung mit* h *scheinbaren Doppelpunkten dreimal schneiden und eine zweite Curve* n'^{ter} *Ordnung treffen, welche mit der ersten* i *Punkte gemeinschaftlich hat, ist:*

$$n'(n-2)\left[h-\tfrac{1}{6}n(n-1)\right]-i(h-n+2).$$

Von solchen Geraden, welche eine Curve n^{ter} *Ordnung mit* h *scheinbaren Doppelpunkten in zwei Punkten und eine zweite Curve, welcher die Charakteristiken* n' *und* h' *zugehören, und die mit der ersten* i *Punkte gemeinschaftlich hat, ebenfalls in zwei Punkten treffen, sind*

$$hh'+\tfrac{1}{4}nn'(n-1)(n'-1)-i(n-1)(n'-1)+\tfrac{1}{2}i(i-1)$$

vorhanden.

Die Anzahl von Geraden, welche eine Curve (n, h) *in zwei Punkten und jede von zwei anderen Curven* n'^{ter} *bez.* n''^{ter} *Ordnung, welche mit der ersten* i' *bez.* i'' *und unter sich* j *Punkte gemeinschaftlich haben, in einem Punkt treffen, beträgt:*

$$n'n''\left[h+\tfrac{1}{2}n(n-1)\right]-(n-1)(i'n''+i''n')-hj+i'i''.$$

Die Anzahl der Geraden, die vier Curven treffen, welche von den Ordnungen n_1, n_2, n_3, n_4 *und derart sind, dass diejenigen* n_r^{ter} *und* n_s^{ter} *Ordnung* i_{rs} *Punkte gemeinschaftlich haben, beträgt*

$$2n_1n_2n_3n_4-\sum_1^4 n_pn_qi_{rs}+\sum_1^4 i_{pq}i_{rs},$$

worin jeder der Indices p, q, r, s *einen anderen Werth als die übrigen hat.*

Bei diesen Formeln wird vorausgesetzt, dass alle den Curven gemeinschaftlichen Punkte von einander verschieden sind. Man

findet die Formeln bei Picquet, l. c. Ueber Correcturen einige von diesem Autor gefundenen Resultate siehe Guccia, *Rend. Palermo*, 1.

Mit den mehrfach schneidenden *Räumen* einer algebraische Curve beschäftigt sich eine neuere Arbeit von Tanturini, *Ann. di mat.*, (3), 4, 1900.

§ 5. Polarflächen. Covariante Flächen.

Wir wollen hier nicht die Definitionen und Sätze wieder holen, die der Polaritätstheorie zu Grunde liegen, da sie den i Kap. 5, § 2 für ebene Curven gegebenen analog sind. W führen nur dasjenige an, was sich bei den Flächen Neues biete

Die erste Polare eines beliebigen Punkts O bezüglich eine Fläche schneidet diese in einer Curve, welche die Berührungscurv des umschriebenen Kegels, dessen Spitze in O liegt, mit de Fläche ist.

Wenn der Pol auf der Fundamentalfläche liegt, so habe diese und alle ihre Polarflächen daselbst die nämliche Berührungs ebene und die nämlichen Osculationsgeraden.

Die Polarfläche 2ter Ordnung [die $(n-2)^{te}$ Polarfläch eines parabolischen Punkts der Fläche ist ein Berührungskeg an die betreffende stationäre Tangentenebene, und die Berührung erzeugende ist die Gerade, welche in diesem Punkt die Fund mentalfläche osculirt.

Ein parabolischer Punkt der gegebenen Fläche ist au parabolisch für alle ihm zugehörigen Polarflächen.

Die $(n-r)^{te}$ Polare eines r-fachen Punkts der Fund mentalfläche ist ein Kegel r^{ter} Ordnung, dessen Spitze in diese Punkt liegt, und die folgenden Polaren sind unbestimmt. Dies Kegel r^{ter} Ordnung ist der Ort der Geraden, die in diesem Pun $r+1$ Punkte mit der Fläche gemeinschaftlich haben, und sei Schnitte mit der $(n-r-1)^{ten}$ Polarfläche sind die $r(r+$ Geraden, welche $r+2$ unendlich nahe Punkte mit der Fläc gemeinschaftlich haben.

Der Ort der Punkte, deren Polarebenen durch eine Gera gehen, ist eine Raumcurve $(n-1)^{ter}$ Ordnung. Diese Curve wi *die Polarcurve der gegebenen Geraden* genannt.

Die Enveloppe der Polarebenen der Punkte einer Gerad ist eine abwickelbare Fläche $(n-1)^{ter}$ Classe und $2(n-2)$ Ordnung, welche *die $(n-1)^{te}$ Polare der Geraden* heisst.

Die Knotenlinie dieser Developpabelen ist eine Curve $(n-3)(n-4)^{\text{ter}}$ *Ordnung, welche der Ort der Pole ist, deren erste Polarflächen die Gerade in zwei verschiedenen Punkten berühren.*

Die Enveloppe der Polarebenen der Punkte einer Curve m^{ter} *Ordnung ist eine Developpabele* $m(n-1)^{\text{ter}}$ *Classe, welche auch der Ort der Punkte ist, deren erste Polarflächen die Curve berühren.*

Analog lassen sich viele andere ähnliche Sätze über die Enveloppen der Polarebenen der Punkte einer Fläche, die Orte der Pole der Tangentenebenen an eine Fläche, etc. aufstellen.

Der Ort der Doppelpunkte der ersten Polaren einer Fläche F_n ist eine neue Fläche und wird *die Hesse'sche Fläche* der gegebenen oder *die Jacobi'sche des Systems der ersten Polaren* genannt.

Der Ort der Punkte, deren erste Polaren Doppelpunkte haben, ist die sogenannte *Steiner'sche Fläche* der gegebenen.

Die Gleichungen dieser Flächen ergeben sich aus Formeln, die denjenigen für die gleichnamigen Curven in Kap. 5, § 2 entsprechen.

Andere Definitionen dieser Flächen sind:

Die Hesse'sche Fläche von F_n *ist der Ort eines Punkts, dessen Polarebenen bez. der ersten Polaren von* F_n *durch den nämlichen Punkt gehen,* oder:

der Ort der Berührungspunkte der ersten Polaren von F_n, oder:

der Ort eines Punkts, dessen Polarfläche 2ten *Grads bez.* F_n *ein Kegel ist.*

Die Steiner'sche Fläche von F_n *ist der Ort der Spitze eines eine Polarfläche* 2ter *Ordnung bildenden Kegels* 2ten *Grads,* oder:

die Enveloppe der Polarebenen der Punkte der Hesse'schen Fläche.

Die Hesse'sche Fläche ist von der Ordnung $4(n-2)$ *und hat im Allgemeinen* $10(n-2)^3$ *Doppelpunkte.*

Die Steiner'sche ist von der

$$4(n-1)^2(n-2)^{\text{ten}} \text{ Klasse}$$

und besitzt $10(n-2)^3$ *Gerade, von denen jede einem Doppelpunkt der Hesse'schen entspricht; d. h. also:*

die Polarfläche 2ten Grads eines Doppelpunkts der Hesse'sche Fläche besteht aus einem Paar von Ebenen, die durch die entsprechende Gerade der Steiner'schen Fläche gehen; und die Polarebene eines Doppelpunkts der Hesse'schen Fläche berührt die Steiner'sche längs der entsprechenden Geraden.

Die Curve der parabolischen Punkte einer gegebenen Fläche ist der vollständige Schnitt der Fläche mit ihrer Hesse'schen Fläche; die Curve ist daher von der Ordnung $4n(n-2)$.

Wenn die gegebene Fläche eine einfache Gerade besitzt, so berührt diese letztere die Hesse'sche Fläche und mithin die parabolische Curve in $2(n-2)$ Punkten.

§ 6. Lineare Flächensysteme.

Wenn $a_x^n = 0$, $b_x^n = 0, \cdots$ in symbolischer Bezeichnung die Gleichungen in *Punktcoordinaten* x von $k+1$ Flächen n^{ter} Ordnung sind, so bildet das durch

$$\lambda_1 a_x^n + \lambda_2 b_x^n + \cdots = 0$$

dargestellte System, worin $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ willkürliche $k+1$ Parameter sind, ein sogenanntes *lineares System k^{ter} Stufe.*

Wenn $k = 1$ ist, so erhält man das *Büschel*, für $k =$ das *Netz* oder *Bündel*. Werden die Flächen in *Ebenencoordinaten* ausgedrückt, so heisst ihr lineares System (∞^1) *Schar.*

Alle Flächen eines Büschels haben eine Curve von der Ordnung n^2 (die Basiscurve des Büschels) und alle Flächen eines Netzes haben n^3 Basispunkte gemeinschaftlich.

Ist $k = N(n) = \binom{n+3}{3} - 1$, siehe § 1, so besteht das System aus allen Flächen n^{ter} Ordnung des Raums.

Wenn eine Fläche n^{ter} Ordnung gegeben ist, so bilden die ersten Polaren der Punkte einer Ebene ein Netz und die ersten Polaren der Punkte des Raums ein lineares System 3ter Stufe.

Ein lineares System k^{ter} Stufe ist durch $k+1$ Flächen derselben Ordnung bestimmt, die nicht dem nämlichen linearen System niedrigerer Stufe angehören.

Unter den Flächen eines linearen Systems k^{ter} Stufe gibt es $(k+1)(n-k)$, welche eine Berührung k^{ter} Ordnung mit einer gegebenen Geraden haben, und

$$2^k \frac{(n-k)(n-k-1)\cdots(n-2k+1)}{k!},$$

von welchen jede eine gegebene Gerade k-mal berührt.

Von den Flächen eines Büschels berühren

$$2(n-1)$$

ne gegebene Gerade und $3(n-1)^2$ *eine gegebene Ebene.*

Unter den Flächen eines Netzes gibt es $3(n-2)$, *welche ne gegebene Gerade osculiren,*

$$\tfrac{3}{2}(n-1)(n-2)(3n^2-3n-11),$$

elche eine doppelte Berührung mit einer gegebenen Ebene, und $2(n-1)(n-2)$, *welche eine stationäre Berührung mit einer gebenen Ebene haben.*

Der Ort der Pole einer gegebenen Ebene in Bezug auf alle lächen eines Büschels ist eine Raumcurve von der Ordnung $(n-1)^2$.

In einem Flächenbüschel gibt es $4(n-1)^3$ *Flächen mit nem Doppelpunkt; jeder dieser Doppelpunkte hat die nämliche olarebene in Bezug auf alle Flächen des Büschels.*

Der Ort der Pole einer Ebene in Bezug auf alle Flächen ines Netzes ist eine Fläche $3(n-1)^{\text{ter}}$ *Ordnung.*

Der Ort der Punkte, in welchen sich eine Ebene und die lächen eines Netzes berühren, ist eine Curve von der Ordnung

$$3(n-1).$$

Der Ort der Doppelpunkte der Flächen eines Netzes ist eine Raumcurve von der Ordnung $6(n-1)^2$, *welche zugleich der Ort er Punkte ist, in denen sich die Flächen dieses Netzes berühren; r ist auch der Ort eines Punktes, dessen Polarebenen in Bezug auf lie Flächen des Netzes durch dieselbe Gerade gehen.* Diese Curve ührt den Namen *Jacobi'sche Curve des Netzes.*

Der Ort eines Punktes, dessen Polarebenen bezügl. der Flächen ines linearen Systems 3ter *Stufe sämmtlich durch einen Punkt ehen, ist eine Fläche* $4(n-1)^{\text{ter}}$ *Ordnung und heisst Hesse'sche oder Jacobi'sche Fläche des Systems; sie ist auch der Ort er Doppelpunkte der Flächen des Systems oder der Ort der Berührungspunkte dieser Flächen.*

Wenn das lineare System aus den ersten Polaren einer gegebenen Fläche besteht, so erhält man die Hesse'sche oder Jacobi'sche Fläche der Fläche, siehe § 5.

Eine analoge Fläche kann man auch in dem Fall definiren, in welchem vier Flächen vorliegen, die aber nicht von derselben Ordnung sind, d. h. kein lineares System bilden:

Der Ort eines Punktes, dessen Polarebenen in Bezug auf vi gegebene Flächen von den Ordnungen n_1, n_2, n_3, n_4 durch d nämlichen Punkt gehen, ist eine Fläche von der Ordnung

$$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 - 4$$

und heisst *die Hesse'sche oder Jacobi'sche Fläche* der vier Fläche

Man kann dann auch hier lineare Systeme k^{ter} Stufe v Flächen betrachten, *die in projectiver Zuordnung zu einand stehen oder projectiv sind,* und die Orte untersuchen, welche dur die Schnitte der entsprechenden Flächen erzeugt werden.

Ueber die vielen Theoreme, die sich auf diesen Gegenstan beziehen, verweisen wir speciell auf die oben citirte *Introduzio* von Cremona.

§ 7. Birationale Transformation des Raums oder d Flächen. Abbildung der Flächen auf eine Ebene.

Wie man sich in der Ebene die eindeutige umkehrba Transformation zwischen zwei Ebenen (die Cremona'sche) od eine solche *nur* zwischen zwei Curven der beiden Ebenen, oh dass sie zwischen den beiden Ebenen besteht, vorstellen kan so lassen sich auch im Raum ein-eindeutige Transformation zwischen zwei Räumen oder *nur* zwischen zwei Flächen d beiden Räume denken. Dieses letztere Problem ist das der s genannten Abbildung einer Fläche auf eine andere und e specieller Fall desselben ist *die Abbildung* der Flächen *auf ei Ebene.*

Es seien x_1, x_2, x_3, x_4 die homogenen Coordinaten der Punk eines Raums und y_1, y_2, y_3, y_4 diejenigen in einem anderen Rau und man habe die Relationen

$$y_i \equiv f_i(x_1, x_2, x_3, x_4), \ (i = 1, 2, 3, 4), \qquad (1)$$

worin die f rationale ganze homogene Funktionen n^{ten} Gra sind; diese Relationen seien derart, dass man aus ihnen die mittelst der y ableiten kann:

$$x_i \equiv \varphi_i(y_1, y_2, y_3, y_4), \qquad (2)$$

worin auch die φ rationale, ganze, homogene Funktionen al vom m^{ten} Grad sind. Eine solche Transformation heisst *ein-e deutig, birational oder eine Cremona'sche; bei ihr entspricht ein Punkt eines jeden der beiden Räume ein und nur ein Punkt anderen Raums.*

Ist der Punkt (x) gegeben, so ergibt sich der entsprechende unkt (y) aus den Formeln (1); ist der Punkt (y) als Schnitt der ei Ebenen

$$\sum_1^4 \lambda_i y_i = 0, \quad \sum_1^4 \mu_i y_i = 0, \quad \sum_1^4 \nu_i y_i = 0$$

geben, so sind die entsprechenden Punkte x die Schnitte der ei Flächen

$$\sum_1^4 \lambda_i f_i(x) = 0, \quad \sum_1^4 \mu_i f_i(x) = 0, \quad \sum_1^4 \nu_i f_i(x) = 0.$$

Damit die Transformation ein-eindeutig sei, ist es nöthig, ıss diese drei Flächen einen einzigen variabelen Schnittpunkt ıben. und dass alle anderen Schnittpunkte fest bleiben, wie man ıch die Parameter λ, μ, ν variiren mag. Daraus folgt:

Bei der ein-eindeutigen Transformation müssen alle Flächen des nearen Systems 3ter Stufe

$$\sum_1^4 \varrho_i f_i = 0$$

urch $n^3 - 1$ feste Punkte gehen.

Für die ein-eindeutige Transformation ist es nothwendig, dass ie Flächen $f_i(x) = 0$ vom Geschlecht Null seien. Die Coordiaten ihrer Punkte lassen sich durch rationale Funktionen zweier Parameter ausdrücken. Für diese Flächen hat Cremona nach Sylvester den Namen *homaloidale* vorgeschlagen, während Cayley die Bezeichnung *unicursale* wählte.

Der variabele (d. h. nicht allen f gemeinschaftliche) Schnitt R zweier beliebiger der Flächen $f_i = 0$ ist eine rationale Curve d. h. vom Geschlecht Null) m^{ter} Ordnung.

Auch das aus solchen Flächen f gebildete System wird *homaoidal* bez. *unicursal* genannt.

Man beachte, dass der für die ebenen birationalen Transformationen bestehende Satz, dass die Grade m und n gleich sein müssen, hier nicht mehr gilt.

Haupt- oder Fundamentalpunkte oder -Linien heissen die allen Flächen des homaloidalen Systems gemeinschaftlichen Punkte oder Linien.

Von den nm Schnitten einer Curve R (siehe oben) mit einer Fläche f, auf welcher die Curve nicht ganz liegt, befinden sich $nm-1$ in den Fundamentalpunkten und -Curven der Transformation.

Jedem Punkt einer Fundamentalcurve, welche i-fach für alle Flächen des homaloidalen Systems ist, entspricht eine rationale

Curve i^{ter} Ordnung, deren geometrischer Ort eine Fläche ist, welch einen Theil der Jacobi'schen Fläche des linearen Systems d Flächen $\varphi_i = 0$ bildet.

Eine für die Flächen $f = 0$, i-fache Fundamentalcurv des Raums (x), welche von den Curven R geschnitten wird, i $(4i - 1)$-fach für die Jacobi'sche Fläche der f. Wird sie d gegen von den Curven R nicht geschnitten, so ist sie $4i$-fach f diese Jacobi'sche Fläche der f.

Ein für die f, l-facher Fundamentalpunkt des Raums (ist $(4l - 2)$-fach für die Jacobi'sche Fläche der f.

Ueber die numerischen Relationen zwischen den Ordnung der Vielfachheit der Fundamentalpunkte und -Curven, analo denjenigen, welche für die ebenen Transformationen bestehen u von uns in Kap. 5, § 5 angegeben wurden, verweisen wir a Noether, *Ann. di mat.*, (2), 5, p. 175, 176.

Die Theorie der birationalen Transformation des Raums i noch nicht so vollständig durchforscht worden, wie die der Eben

Die Hauptarbeiten sind von Cayley, *Proc. of the Lond Math. Soc.*, 3 = *Coll. math. papers*, 7, p. 189; Cremona, *Gö Nachr.*, 1871; *Math. Ann.*, 4; *Rend. Ist. Lomb.*, 1871; *Ann. mat.*, (2), 5; *Mem. Acc. Bologna*, 1871, 1872; Noether, *Mat Ann.*, 3. Neuer sind: Montesano, *Rend. Ist. Lomb.*, 188 92, 93; *Rend. Acc. Lincei*, 1888, 1889; *Rend. Acc. Napoli*, 188 1895; *Mem. Acc. Bologna*, 1893; *Atti Acc. Torino*, 1892; *Gior di Batt.*, 1893. Montesano studirte speciell die *involutorisch* Transformationen.

Ein besonderer Fall ist *die Transformation durch recipro Radien vectoren oder Inversion* (vergl. Kap. 17, § 1), *welc die Eigenschaft besitzt, dass die Winkel erhalten bleiben.*

Soll die Transformation nicht *für den ganzen Raum*, so dern nur für zwei in den beiden Räumen enthaltene Fläch $F(x) = 0$ und $\Phi(y) = 0$ birational sein, so ist nicht erforde lich, dass die Flächen des linearen Systems

$$\sum_1^4 \varrho_i f_i(x) = 0$$

$n^3 - 1$ Punkte gemeinschaftlich haben; *es ist nur nöthig, da alle Flächen dieses Systems, welche durch einen Punkt von $F =$ gehen, sich nicht gleichzeitig auf dieser Fläche schneiden.*

Es gilt auch hier das Theorem, welches als eine Erweiteru des Riemann'schen anzusehen ist, *dass nämlich das Geschlec*

r beiden Flächen, die sich ein-eindeutig die eine in die andere nsformiren lassen, das nämliche sein muss. Siehe Clebsch, *mpt. Rend.*, 1868; *Math. Ann.*, 2; Cayley, *Math. Ann.*, 3; oether, *Ann. di mat.*, (2), 5; *Math. Ann.*, 2, 8; Zeuthen, *ath. Ann.*, 4; Castelnuovo-Enriques, *Math. Ann.*, 48.

Wie bei den ebenen Curven, so hat man auch bei den ächen, den Untersuchungen Noether's über die Zerlegung der ngulären Punkte entsprechend, versucht, ob es nicht möglich i, durch birationale Transformationen des Raums oder der Flächen ne Fläche mit höheren Singularitäten auf eine solche mit nur wöhnlichen Singularitäten zurückzuführen. Mit diesem Problem ben sich in verschiedenem Sinn Noether, *Math. Ann.*, 29; *erl. Sitzungsber.*, 1888; Del Pezzo, *Rend. Palermo*, 2, 3; Segre, *nn. di mat.*, (2), 25; Pannelli, ib., 25; Levi, ib., 26; G. Kobb, *ourn. de Liouv.*, 1892 beschäftigt. Ueber das ähnliche die aumcurven betreffende Problem sehe man Poincaré, *Compt. end.*, 108, 1888; Pannelli, *Rend. Ist. Lomb.*, 1893 nach.

Ein specieller Fall der birationalen Transformation der lächen ist die sogenannte *Abbildung der Flächen* auf die Ebene. Vie oben bereits angegeben wurde, nennt Cremona *eine Fläche, ie sich auf die Ebene abbilden lässt, ein Homaloid.*

Soll sich eine Fläche auf die Ebene abbilden lassen, so uss sie vom numerischen Geschlecht $p_n = 0$ sein. Ausführlicheres ber diesen Satz findet man in Kap. 13, § 7.

Eine ausreichende Bedingung für die Möglichkeit der Abildung einer Fläche auf eine Ebene besteht darin, dass sie eine infach unendliche Schar rationaler Curven besitze, welche auf der Fläche von einem Büschel anderer Flächen geschnitten werden. Noether, *Gött. Nachr.*, 1870; *Math. Ann.*, 3. Ueber weitere Sätze siehe Kap. 13, § 7.

Es liege eine Fläche S von der Ordnung n vor, und die omogenen Coordinaten ihrer Punkte mögen sich durch die Formeln

$$x_i \equiv f_i(y_1, y_2, y_3), \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

usdrücken lassen, worin die f rationale homogene Functionen n^{ter} Ordnung seien; wir wollen ferner annehmen, man könne lie Verhältnisse zwischen den y umgekehrt mittelst dieser Formeln als rationale Funktionen der x darstellen. Man sagt alsdann, die Fläche S sei auf die Ebene abbildbar, weil bei der Interpretation der y als homogene Coordinaten der Punkte einer Ebene die vorstehenden Formeln eine ein-eindeutige Zuordnung zwischen den Punkten der Ebene und der Fläche S feststellen.

Wenn die Curven des ebenen linearen Systems

$$\sum_1^4 \lambda_i f_i(y) = 0$$

α_1 einfache Punkte, α_2 Doppelpunkte, α_3 dreifache Punkte, et gemeinschaftlich haben, *so besteht die Relation:*

$$n = m^2 - \alpha_1 - 4\alpha_2 - 9\alpha_3 - \cdots.$$

Nennt man p_1 das Geschlecht eines ebenen Schnitts d Fläche, d die Ordnung der Doppelcurve derselben Fläche, r d Ordnung der Cuspidalcurve, *so gilt die Beziehung:*

$$p_1 = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d - r =$$
$$= \frac{(m-1)(m-2)}{2} - \alpha_2 - 3\alpha_3 - 6\alpha_4 - \cdots.$$

Ueberdies besteht die Ungleichheit:

$$4 \leqq \frac{(m+1)(m+2)}{2} - \alpha_1 - 3\alpha_2 - 6\alpha_3 - \cdots.$$

Aus diesen Relationen folgt:

$$p_1 \leqq n - 2,$$
$$d + r \geqq \frac{(n-2)(n-3)}{2}.$$

Die Flächen 2ter und 3ter Ordnung lassen sich offenb immer auf die Ebene abbilden. Bei den Flächen 2ter Ordnu braucht man nur von einem ihrer Punkte aus die Punkte a die Ebene zu projiciren, und für die Flächen 3ter Ordnung (sie Kap. 11) genügt es, zwei ihrer Geraden zu betrachten, die si nicht schneiden, und dann von einem beliebigen Punkt ein Ebene die Gerade zu ziehen, welche die beiden Geraden d Fläche trifft; sie wird die Fläche noch in einem anderen Pun treffen, der ein-eindeutig dem Punkt der Ebene entspricht.

Um die ebene Abbildung einer Fläche 4ter Ordnung n Doppelkegelschnitt (siehe Kap. 12, § 6) geometrisch zu co struiren, kann man, wie folgt, verfahren:

Wir betrachten von den 16 Geraden der Fläche ei solche g, welche den Doppelkegelschnitt schneidet. Durch ein Punkt P einer Ebene und durch g wird eine Ebene gele welche den Kegelschnitt noch einmal in einem Punkt schneid welcher, mit P verbunden, eine Gerade liefert, die den Dopp

gelschnitt und g trifft und daher die Fläche in noch einem nkt Q schneidet; *die Zuordnung zwischen P und Q ist ein-deutig.*

Falls die Fläche 4ter Ordnung eine Doppelgerade hat (siehe ıp. 12, § 8), kann analog verfahren werden, wenn man be-htet, dass alsdann auf der Fläche Kegelschnitte existiren, elche die Doppelgerade schneiden.

Bei den Flächen 5ter Ordnung mit zwei sich nicht schneiden-n Doppelgeraden (siehe Kap. 13) lässt sich eine ähnliche ometrische Construction ausführen, wie bei den Flächen 3ter rdnung.

Besitzt die Fläche 5ter Ordnung eine Doppelcurve 3ter rdnung, so kann man offenbar die Sehnen der Curve er Ordnung, welche die Fläche in einem weiteren Punkt hneiden, zu projicirenden Strahlen nehmen. Analog ist die onstruction, wenn die Curve 3ter Ordnung in einen Kegelschnitt nd eine Gerade zerfällt, welche den Kegelschnitt in einem unkt schneidet, oder in drei Gerade, von denen eine die beiden nderen trifft. Die Fälle, in denen die Curve 3ter Ordnung eben äre, oder in einen Kegelschnitt und eine Gerade zerfiele, welche en Kegelschnitt nicht trifft, oder auch in drei sich nicht schnei-ende Gerade, sind unmöglich.

Man beachte jedoch, dass bei allen diesen Abbildungen Aus-ahmestellen auftreten, an denen die Abbildung aufhört, ein-eutig umkehrbar zu sein.

Die Abbildung der Flächen auf die Ebene lässt sich zum tudium der auf diesen Flächen gezogenen Curven benutzen. Die ltesten Untersuchungen in dieser Hinsicht beziehen sich, wie man ohl sagen darf, auf die stereographische Projection und all-emein auf alle Projectionen, die man zur Herstellung der geo-raphischen Karten erdacht hat.

Das Verebnen der Flächen 2ter Ordnung wurde von Plücker, *relle,* 34, 1847; Chasles, *Compt. Rend.,* 1861; Cayley, *Phil. Mag.,* 22, 1861 durchgeführt, welche sich dessen zur Unter-uchung der Curven auf einer Fläche 2ter Ordnung bedienten. iehe auch Clebsch-Lindemann, *Geom.,* 2 und weiter unten, Kap. 10, § 1.

Die ebene Abbildung der Flächen 3ter Ordnung untersuchten remona, *Crelle,* 69 und Clebsch, *Crelle,* 65; die der Flächen 4ter Ordnung mit Doppelkegelschnitt oder doppelter Geraden und

die der Flächen 5ter Ordnung mit Doppelcurve 3ter Ordnung Clebsch, *Crelle,* 69; *Math. Ann.,* 1; Korndörfer, *Math. Ann.* 1, 4; Frahm, ib., 7.

Ebene Abbildungen schliesslich der rationalen Regelflächen studirten Cremona, *Ann. di mat.,* 1; Armenante, *Ann. di mat.,* 4, 1870, Clebsch, *Math. Ann.,* 2, 5; Noether, ib., 2.

Für den Fall, in welchem die Fläche nicht speciell algebraisch, sondern beliebig ist, lässt sich das Problem des Verebnens der ganzen Fläche oder eines Theils derselben nach den Methoden der Differentialgeometrie behandeln. Siehe weiter unten, Kap. 16.

Wie in der Ebene, so lassen sich auch im Raum *mehrdeutige Transformationen* betrachten (vergl. Kap. 5, § 5, S. 161). Von Arbeiten darüber citiren wir De Paolis, *Mem. Lincei,* 188[illegible]

Kapitel X.

Raumcurven verschiedener Ordnungen.

§ 1. Die Curven auf den Flächen 2ter Ordnung. Die sphärischen Curven.

Wie wir in dem letzten Paragraphen des vorigen Kapitels sagt haben, lassen sich die auf einer Fläche 2ter Ordnung genden Curven mit Hülfe der Abbildung dieser Flächen auf e Ebene leicht studiren. Projicirt man von einem Punkt P r Fläche 2ter Ordnung (welcher auch ein unendlich ferner nkt sein kann) die Punkte der Fläche auf eine Ebene, z. B. f die Berührungsebene an die Fläche in dem 2ten Schnittpunkt des durch P gehenden Durchmessers mit der Fläche, so erhält an eine ebene Abbildung der Fläche, die man der Analogie it der Abbildung der Kugel wegen, *stereographische Projection* nnen kann.

Die auf den beiden durch P gehenden Erzeugenden der äche 2ter Ordnung gelegenen Punkte haben sämmtlich ihre ojection in denselben beiden unendlich fernen Punkten P_1, P_2, elche *Fundamentalpunkte* heissen; die Gerade P_1P_2, welche in esem Fall die unendlich ferne Gerade ist, wird *Fundamentalrade* genannt.

Die Gesammtheit aller Geraden der Fläche 2ter Ordnung ojicirt sich in zwei Strahlenbüschel, deren Mittelpunkte in P_1 id P_2 liegen.

Wir wollen nun auf der Fläche 2ter Ordnung ein Coordiatensystem festsetzen.

Wir wählen den Punkt O zum Coordinatenanfang und die iden Geraden, in welchen die Berührungsebene in O die Fläche veiter Ordnung schneidet, zu Axen OX, OY.*) Es sei A ein

*) Will man diese Constructionen in dem reellen Gebiet ausihren, so braucht man nur anzunehmen, die Fläche sei ein *Hyperboloid*.

Punkt der Fläche; durch A gehen zwei Erzeugende, eine d ersten und eine des zweiten Systems, welche die festen E zeugenden OX und OY in den Punkten A_1 auf OX und auf OY schneiden; die Abstände $\xi = OA_1$ und $\eta = OA_2$ kan man als Coordinaten des Punktes A der Fläche 2ter Ordnu ansehen. Diese Coordinaten pflegt man *hyperboloidale* zu nenne sie wurden von Plücker, *Crelle*, 34 eingeführt.

Bemerkenswerth ist, *dass der in der Tangentialebene X gelegene Punkt, dessen Coordinaten eben ξ und η sind, die P jection des Punktes A der Fläche 2ter Ordnung von P aus i*

Jede Gleichung ersten Grads

$$a\xi + b\eta + c = 0$$

zwischen den Coordinaten ξ, η stellt auf der Fläche eine ebe durch den Punkt P gehende Curve dar.

Nimmt man als Cartesische Coordinatenaxen im Raum Axen OX, OY und eine dritte beliebige Axe OZ an, *so si die Cartesischen Coordinaten x, y, z eines Punkts A der Flä 2ter Ordnung mit den Hyperboloidencoordinaten ξ, η dessel Punkts A durch die Relationen*

$$\xi = -\frac{dz}{cz + \mu y}, \quad \eta = -\frac{dz}{bz + \mu x}$$

oder

$$\frac{y}{z} = -\left[\frac{d}{\mu}\frac{1}{\xi} + \frac{c}{\mu}\right], \quad \frac{x}{z} = -\left[\frac{d}{\mu}\frac{1}{\eta} + \frac{b}{\mu}\right]$$

verbunden, wenn die Gleichung der Fläche 2ten Grads die Gest

$$z(az + by + cx + d) + \mu xy = 0 \quad \textit{hat.}$$

Wählt man speciell den durch O gehenden Durchmes zur Z-Axe, *so wird die Gleichung der Fläche*

$z(z + d) + \mu xy = 0$, *wenn die Fläche ein Hyperboloid*

oder

$dz + \mu xy = 0$, *wenn sie ein Paraboloid ist,*

und die oben angegebenen Relationen werden:

$$\xi = -\delta\frac{z}{y}, \quad \eta = -\delta\frac{z}{x}, \quad \left(\delta = \frac{d}{\mu}\right).$$

Die vorstehenden Formeln wurden von Plücker l. c. nutzt. In homogenen Coordinaten erhalten sie grössere S metrie. Siehe Clebsch-Lindemann, *Geom.*, 2, p. 422.

Es seien P, O zwei beliebige Punkte der Fläche 2ter nung, welche nicht mehr nothwendiger Weise die Endpun

es Durchmessers zu sein brauchen, und das Fundamentalraeder der Coordinaten habe die Punkte P, O, P_1, P_2 zu Ecken, bei P_1 und P_2 die beiden Fundamentalpunkte in der Berührungsebene an die Fläche in O bezeichnen.

Die Gleichung der Fläche 2ter Ordnung hat die Gestalt

$$x_1 x_2 - x_3 x_4 = 0,$$

nn die Ebenen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ bez. die enen POP_1, POP_2, OP_1P_2, PP_1P_2 sind.

Bezeichnet man nun mit ξ_1, ξ_2, ξ_3 die homogenen Coorditen des Punkts (in der Ebene OP_1P_2), in welchen sich ein nkt der Fläche 2ter Ordnung projicirt, *so erhält man die rmeln*

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \xi_1\xi_3 : \xi_2\xi_3 : \xi_1\xi_2 : \xi_3^2.$$

Die Grössen $\frac{x_3}{x_1}$, $\frac{x_3}{x_2}$ kann man zu Coordinaten des Punkts f der Fläche wählen, Cayley, *Coll. Math. Pap.*, 5, p. 70; sie mmen schliesslich auf die Hyperboloidencoordinaten Plücker's naus.

Jede ebene Curve auf der Fläche 2ter Ordnung projicirt ch in einen Kegelschnitt, welcher zum Kreis wird, wenn P ein reis- oder Nabelpunkt der Fläche 2ter Ordnung und O der diaetral gegenüberliegende Punkt ist. Alle diese Kegelschnitte sind nander ähnlich und ähnlich gelegen; ihre Asymptoten sind den iden Axen OX, OY parallel, in welchen die Berührungsebene i O die Fläche 2ter Ordnung schneidet.

Eine Curve nter Ordnung auf der Fläche 2ter Ordnung, welche icht durch P geht, wird in eine ebene Curve nter Ordnung rojicirt.

Geht die Curve m-mal durch den Punkt P, so ist die Proction von der Ordnung $n - m$.

Jede Curve nter Ordnung auf der Fläche 2ten Grads schneidet de Erzeugende des einen Systems k-mal und jede Erzeugende es anderen k'-mal, so dass $k + k' = n$ ist; die Projection dieser urve geht dann k-mal durch P_1 und k'-mal durch P_2. Die eiden Zahlen k, k' charakterisiren die Gattung (Species) der urven nter Ordnung auf der Fläche 2ten Grads. Diese Gattung flegt man daher mit dem Symbol $[k, k']$ zu bezeichnen.

Wenn eine der Zahlen k, k' Null ist, so zerfällt die Curve n die Gesammtheit von n Geraden der Fläche 2ter Ordnung.

Betrachtet man die beiden Gattungen von Curven $[k, k']$ und $[k', k]$ als nicht wesentlich voneinander verschieden, so gil der Satz:

Auf jeder Fläche 2ter Ordnung gibt es $\frac{n-1}{2}$ verschiede Gattungen (Species) von eigentlichen, d. h. nicht zerfallenden Curv n^{ter} Ordnung bei ungeradem n und $\frac{n}{2}$ verschiedene Gattungen b geradem n.

Der vollständige Schnitt der Fläche 2ter Ordnung mit ein allgemeinen Fläche m^{ter} Ordnung (d. h. ohne singuläre Punkt ist von der Ordnung $2m$ und der Gattung $[m, m]$.

Durch $kk' + k + k'$ auf der Fläche 2ter Ordnung beliebi gegebene Punkte lässt sich nur eine einzige Curve von der Gattu $[k, k']$ legen.

Zwei Curven von den Gattungen $[k, k']$ und $[k_1, k_1']$ schneide sich in $kk_1' + k'k_1$ Punkten.

Jede Curve von der Gattung $[k, k']$, welche δ Doppelpunk und χ Spitzen besitzt, berührt

$$2k'(k-1) - 2\delta - 3\chi$$

Erzeugende des ersten Systems und

$$2k(k'-1) - 2\delta - 3\chi$$

Erzeugende des zweiten.

Ueber die Singularitäten und charakteristischen Zahlen d Curven auf den Flächen 2ter Ordnung siehe Kap. 9, § 4.

Auf der Fläche 2ter Ordnung gibt es keine anderen eigen lichen Curven 2ter Ordnung, als die ebenen Schnitte, welche d Typus $[1, 1]$ haben.

Es existiren keine anderen eigentlichen Curven 3ter Ordnu als die vom Typus $[1, 2]$ oder, was dasselbe ist, $[2, 1]$; es si die Raumcurven 3ter Ordnung.

Es gibt zwei verschiedene Familien von Curven 4ter Or nung, die durch $[2, 2]$ (Curven 4ter Ordnung 1ter Species) und $[1,$ (Curven 4ter Ordnung 2ter Species) dargestellt werden.

Durch Verallgemeinerung der stereographischen Projecti der Kugel wurde zuerst Chasles zur Abbildung der Fläch 2ter Ordnung auf eine Ebene geführt, *Ann. de Gergonne*, 18, 1 *Aperçu histor.*, 1837, p. 219, Anm. Das Studium der Curv auf der Fläche 2ter Ordnung unternahm Plücker in zwei Au sätzen, *Crelle*, 34, p. 341, 360. Mit demselben Gegenstan beschäftigten sich Cayley in einem kurzen Artikel, *Phil. Maga*

', 1861; *Coll. Math. Pap.*, 5, p. 70 und Chasles, *Compt. Rend.*, 61. Siehe auch Clebsch-Lindemann, *Geom.*, 2, p. 414 u. ff.

Specielle Fälle dieser Untersuchungen betreffen die stereographische Projection der Kugel und die sphärischen Curven, sbesondere die sogenannten *sphärischen Kegelschnitte.* Die ereographische Projection der Kugel ist schon seit den Zeiten er alten Griechen bekannt; ihre wichtigste Eigenschaft besteht . der sogenannten *conformen (winkeltreuen) Abbildung*; d. h.: *der Winkel, den zwei sphärische Curven miteinander bilden, ist dem Winkel ihrer ebenen Projectionen gleich,* wenn man, wie oben, as Projectionscentrum in einen Punkt P der Kugel legt und e Projectionsebene parallel zur Berührungsebene in P annimmt, der speciell die Berührungsebene in dem Punkt O, der P diametral gegenüber liegt, zur Projectionsebene nimmt.

Diese Eigenschaft scheinen Hooke und Moivre gefunden a haben, siehe Halley, *Phil. Trans.*, 1696; jedoch glauben uch Einige, sie sei schon 1587 Mercator bekannt gewesen; ergl. A. Breusing, *Das Verebnen der Kugeloberfläche* etc., eipzig, 1892; spätere Untersuchungen sind von Lambert, Euler, agrange, Gauss, etc.; siehe Chasles, *Aperçu hist.*, p. 219 u. 35. Deutsche von Wangerin besorgte Ausgaben der Arbeiten on Lambert, Euler, Lagrange u. Gauss über Kartenprojection ind in Ostwald's Klass. der ex. Wiss., Nr. 54, 55, 93 erschienen.

Jeder ebene Schnitt der Kugel projicirt sich in einen Kreis. Die Projection des Pols der Schnittebene ist das Centrum les Kreises, in welchen der ebene Schnitt projicirt wird. Theorem on Chasles. Siehe Hachette, *Géom. à 3 dim.*, Paris, 1817.

Die Coordinaten auf der Kugel und die sphärischen Kegelschnitte (Schnitte der Kugel mit Kegeln 2ter Ordnung) haben Chasles, *Mém. de Belgique*, 6; Gudermann, *Crelle*, 6; Möbius, *Werke*, 2; etc. studirt. Eine ausführliche Darstellung ihrer Theorie findet man bei Hesse, *Vorl. über analytische Geom. d. Raumes*, 3. Aufl., Leipzig 1876, p. 51 und Salmon-Fiedler, *Analyt. Geom. d. Raumes*, 1, 3te Aufl., p. 340 u. ff.

Ein sphärischer Kegelschnitt ist eine Raumcurve 4ter Ordnung und 1ter Species (vergl. § 3); er ist der Schnitt der Kugel mit einem Kegel 2ten Grads, dessen Spitze in dem Centrum der Kugel liegt.

Bei jedem sphärischen Kegelschnitt ist das anharmonische Verhältniss der vier Strahlen, welche einen variabelen Punkt der Curve mit vier festen Punkten derselben Curve verbinden, constant,

wenn man unter dem anharmonischen Verhältniss der vier (nicht in einer Ebene liegenden) Strahlen das der vier Ebenen versteht welche sie vom Mittelpunkt der Kugel aus projiciren; diese Eigenschaft ist der für die ebenen Kegelschnitte geltenden analog.

Bei einem sphärischen Kegelschnitt steht das Product der Sinus der Normalen, die sich von einem Punkt der Kugel nach zwei Bogen den Kegelschnitt berührender grösster Kreise ziehen lassen, zu dem Quadrat des Sinus der Normalen, welche von demselben Punkt aus auf den Bogen des durch die beiden Berührungspunkte gehenden grössten Kreises gefällt wird, in constantem Verhältniss.

Legt man durch das Centrum der Kugel die beiden Kreisschnittebenen des Kegels 2ten Grads (die ihn in Kreisen schneiden), so heissen die diesen Ebenen auf der Kugel entsprechenden grössten Kreise die dem sphärischen Kegelschnitt zugehörigen *cyclischen Kreise*.

Wenn ein grösster Kreis den sphärischen Kegelschnitt in zwei Punkten P und Q und die cyklischen Kreise in A und B schneidet, so ist $AP = BQ$ und es gilt insbesondere:

Der Bogen jedes grössten Kreises, welcher den Kegelschnitt berührt und zwischen den beiden cyclischen Kreisen enthalten ist, wird von dem Berührungspunkt halbirt.

§ 2. Die Raumcurven 3ter Ordnung.

Zwei Flächen 2ter Ordnung, die eine Gerade gemeinschaftlich haben, schneiden sich in einer Restcurve, welche eine *Raumcurve 3ter Ordnung* ist.

Benutzen wir dieselben Bezeichnungen, wie in Kap. 9, § 4 für die charakteristischen Zahlen und die Singularitäten der Raumcurven, so ergeben sich die folgenden Werthe:

$$\begin{aligned} n &= 3, & m &= 3, \\ r &= 4, & g &= 1, \\ h &= 1, & x &= 0, \\ y &= 0, & \alpha &= 0, \\ \beta &= 0, & G &= 0, \\ H &= 0, & \omega &= 0, \\ v &= 0, & p &= 0, \end{aligned}$$

woraus sich die Sätze formulieren lassen:

Die Raumcurve 3ter Ordnung ist eine Curve 4ter Classe vom Geschlecht Null; ihre Osculationsdeveloppabele ist 4ter Ordnung und 3ter Classe.

Durch einen beliebigen Punkt des Raums gehen eine einzige ehne und drei Osculationsebenen an die Curve 3ter Ordnung.

Jede beliebige Ebene des Raums enthält eine und nur eine erade, in welcher sich zwei Osculationsebenen der Curve 3ter Ordung schneiden.

Die Projection der cubischen Raumcurve auf irgend eine Ebene ist eine Plancurve 3ter Ordnung mit einem Doppelpunkt.

Jede Raumcurve 3ter Ordnung kann man sich auf einer Fläche 2ter Ordnung aufgetragen denken; sie trifft die Erzeugenden des einen Systems in je einem Punkt und die Erzeugenden des anderen Systems in je zwei Punkten. Siehe oben, § 1. Daraus folgt:

Auf einer Fläche 2ter Ordnung kann man sich zwei verschiedene Systeme von Curven 3ter Ordnung aufgetragen denken, nachdem diese Curven die Erzeugenden des 1ten Systems in je einem oder je zwei Punkten (und mithin die des 2ten in je zwei oder je einem Punkt) schneiden.

Zwei Curven 3ter Ordnung von verschiedenen Systemen treffen sich in fünf Punkten und zwei solche Curven desselben Systems in vier Punkten.

Wenn zwei Flächen 2ten Grads sich in einer Curve 3ter Ordnung und mithin auch in einer Geraden schneiden, so gehört diese letztere auf jeder der beiden Flächen 2ten Grads dem System an, dessen Erzeugende von der Curve 3ter Ordnung in je zwei Punkten geschnitten werden.

Durch fünf beliebig auf einer Fläche 2ten Grads gegebene Punkte gehen zwei auf dieser Fläche liegende Curven 3ter Ordnung (für jedes der beiden Systeme eine, siehe oben).

Durch sechs beliebig im Raum gegebene Punkte geht immer eine Curve 3ter Ordnung.

Um diese Curve 3ter Ordnung zu erhalten, braucht man nur den Kegel 2ter Ordnung zu construiren, dessen Spitze in einem der sechs Punkte liegt, und der durch die übrigen fünf geht, und dann ebenso einen zweiten Kegel 2ter Ordnung, dessen Spitze in einem anderen der sechs Punkte liegt, und der durch die übrigen fünf geht. Die beiden Kegel schneiden sich in der Geraden, welche die beiden Spitzen verbindet, und in einer Curve, welche die gesuchte Curve 3ter Ordnung ist.

Eine Raumcurve 3ter Ordnung ist der Ort der Punkte, welche den Tripeln sich entsprechender Ebenen dreier zu einander projectiver Ebenenbüschel gemeinschaftlich sind.

Die Osculationsdeveloppabele einer Raumcurve 3ter Ordnung lässt sich als die Enveloppe der Ebenen ansehen, welche durch die Tripel sich entsprechender Punkte dreier projectiver Punktreihen gehen.

Eine *Ausartung der Raumcurve 3ter Ordnung* mit einem einzigen scheinbaren Doppelpunkt ist die Gesammtheit eines Kegelschnitts und einer Geraden, welche so im Raum gelegen sind, dass die Gerade den Kegelschnitt nur in *einem* Punkt schneidet.

Verschiedene Eigenschaften der Curven 3ter Ordnung.

Die vier Ebenen, welche durch eine variabele Sehne der Curve und durch jeden von vier festen Punkten derselben Curve gehen, stehen in constantem anharmonischem Verhältniss.

Vier feste Osculationsebenen der Curve werden von einer beliebigen Geraden, die der Schnitt zweier Osculationsebenen ist, in vier Punkten getroffen, welche in constantem anharmonischem Verhältniss stehen.

Insbesondere:

Die vier Ebenen, welche eine Tangente an die Curve mit vier festen Punkten der Curve verbinden, behalten bei dem Variiren der Tangente dasselbe anharmonische Verhältniss bei.

Die vier Punkte, in welchen vier Osculationsebenen durch eine variabele Tangente geschnitten werden, liegen in constantem anharmonischem Verhältniss.

Wenn sieben Punkte 1, 2, ..., 7 *einer Curve dritter Ordnung gegeben sind, so schneiden sich die Ebenen*

712 und 745,
723 und 756,
734 und 761

in drei Geraden einer Ebene, welche durch eine feste Sehne der Curve geht, wenn die ersten sechs Punkte fest liegen bleiben und nur der Punkt 7 seine Lage ändert. Cremona.

Gegeben sind zwei durch dieselben fünf Punkte gehend Curven dritter Ordnung; die Sehnen der ersten, welche durch Punkte der zweiten gehen, schneiden alle Sehnen der zweiten, die durch Punkte der ersten gehen.

Die Osculationsebenen dreier Punkte 1, 2, 3 *der Curve 3ter Ordnung schneiden sich in einem Punkt* (4) *der Ebene* 1 2 3.

Die Berührungspunkte der drei von einem Punkt (4) *an die Curve 3ter Ordnung gezogenen Osculationsebenen liegen in derselben Ebene, wie der Punkt* (4). Chasles.

Die Schnittgerade von Osculationsebenen, welche in der Ebene 2 3 *liegt, ist die harmonische Polare des Punktes* 4 *in Bezug auf das Dreiseit* (1 2 3)*).

Die durch den Punkt 4 *gehende Sehne der Curve* 3ter *Ordnung ist die harmonische Polargerade der Ebene* 1 2 3 *in Bezug auf das Dreiflach der drei Osculationsebenen***).

Vier Punkte einer Curve 3ter *Ordnung bilden ein Tetraeder und ein zweites Tetraeder wird durch die Osculationsebenen in den vier Punkten bestimmt; jedes der beiden Tetraeder ist dem anderen zu gleicher Zeit eingeschrieben und umschrieben.* Möbius, *Crelle,* 3, p. 273.

Das Theorem von Chasles zeigt, dass durch eine gewundene Curve 3ter Ordnung eine besondere Zuordnung zwischen den Punkten und Ebenen im Raum derart festgesetzt wird, *dass jedem Punkt eine durch ihn gehende Ebene und jeder Ebene ein in ihr liegender Punkt entspricht.* Diese Zuordnung ist eine *polare oder involutorische Dualität* und zwar speciell diejenige, die wir auf S. 44 *Nullpolarität* oder *Nullsystem* genannt haben. Siehe Möbius, *Statik,* Leipzig, 1837, 1, p. 151 und *Crelle,* 10, p. 317. Der Punkt und die ihm entsprechende Ebene heissen *Pol* und *Polarebene.*

Die Sehne der Curve 3ter *Ordnung, welche durch einen gegebenen Pol P geht und die in der Polarebene von P liegende Gerade, in welcher sich zwei Osculationsebenen der Curve schneiden, sind zwei in der Nullpolarität sich entsprechende Gerade.*

Verschiedene Constructionen der Curven 3ter *Ordnung.* Die Probleme, deren Lösung wir hier angeben, betreffen die Construction der gewundenen Curven 3ter Ordnung, wenn gewisse Bedingungen gegeben sind, denen sie genügen sollen.

1. Gegeben sind sechs Punkte 1, 2, 3, 4, 5, 6 der Curve; die Curve zu construiren.

Man lege durch (1 2) *eine beliebige Ebene* α *und bestimme die Schnitte*

---

*) Unter *harmonischer Polaren s* eines Punktes *S* (des *harmonischen Pols* von *s*) in Bezug auf ein Dreiseit versteht man die Gerade, welche die Seiten eines Dreiseits *ABC* in drei Punkten *A′*, *B′*, *C′* so schneidet, dass die Strahlenpaare *SA*, *SA′*; *SB*, *SB′*; *SC*, *SC′* in Involution stehen. Siehe oben das letzte Theorem auf S. 58.

**) Jeder wird leicht selbst die Definition der *harmonischen Polaren* in der vorigen Anmerkung auf den Fall des Dreiflachs ausdehnen können.

$$[\alpha, (345)] = a, \qquad [\alpha, (456)] = b,$$
$$[(23), (561)] = A, \quad [(61), (234)] = B,$$
$$[\alpha, (B4)] = C, \qquad [\alpha, (A5)] = D,$$
$$[(CD), a] = E, \qquad [(CD), b] = F;$$

der Punkt

$$[(1E), (2F)] = P$$

gehört der Curve 3ter Ordnung an.

Oder auch:

Man bestimme

$$[\alpha, (45)] = G,$$
$$[1AG] = \beta, \qquad [2BG] = \gamma,$$
$$[\beta, (34)] = H, \quad [\gamma, (56)] = K;$$

die drei Ebenen

$$[61H], \quad \alpha, \quad [23K]$$

schneiden sich in einem Punkt der Curve 3ter Ordnung, welcher selbstverständlich der in der Ebene α liegende dritte Punkt der Curve ist.

2. Gegeben sind fünf Punkte 1, 2, 3, 4, 5 und eine Secante (a); die Curve 3ter Ordnung zu construiren.

Man lege durch die Secante (a) eine beliebige Ebene α, welche die Ebenen

$$[123], [124], [134], [234]$$

in vier Geraden schneidet, die, mit (a) zusammen genommen, einen sie berührenden Kegelschnitt bestimmen; die Ebene α schneide ferner die Ebenen

$$[123], [125], [135], [235]$$

in vier anderen Geraden, welche mit (a) zusammen einen weiteren Kegelschnitt festlegen; die beiden Kegelschnitte haben zu gemeinschaftlichen Tangenten (a) und $[\alpha, (123)]$. Der Schnittpunkt der beiden anderen gemeinschaftlichen Tangenten ist ein Punkt der Curve 3ter Ordnung.

3. Gegeben sind vier Punkte und zwei Secanten; die Curve zu construiren. *Dieses Problem hat entweder keine oder unendlich viele Auflösungen.*

4. Gegeben sind drei Punkte und drei Secanten; die Curve 3ter Ordnung zu construiren.

Es genügt, die drei Ebenenbüschel zu betrachten, welche die drei Secanten zu Axen haben, und zwischen den Ebenen der drei

Büschel eine projective Zuordnung derart herzustellen, dass sich die Ebenen, welche durch jeden der drei gegebenen Punkte gehen, einander entsprechen; die Punkte der Curve sind als Schnitte von drei beliebigen anderen sich entsprechenden Ebenen bestimmt.

5. Gegeben zwei Punkte A, B und vier Secanten a, a', b, b'; die Curve zu construiren.

Man ziehe die Gerade, welche durch A geht und die Geraden a, a' schneidet, und die Gerade, welche A enthält und b, b' trifft; diese Geraden seien c, c'; alsdann ziehe man ebenso die Geraden d, d', welche durch B gehen und a, a' bez. b, b' treffen. Der Schnitt der Ebenen $[cd]$ und $[c'd']$ sei l; die beiden Hyperboloide

$$[aa'l], \quad [bb'l]$$

schneiden sich in der gesuchten Curve 3ter Ordnung.

6. *Das Problem,* die Curve 3ter Ordnung zu construiren, welche durch einen Punkt geht, und fünf gegebene Gerade zu Secanten hat, *lässt ebenfalls immer eine Lösung zu.*

7. *Dagegen hat das Problem,* die Curve 3ter Ordnung zu construiren, von welcher sechs Secanten gegeben sind, *im Allgemeinen sechs Auflösungen.*

Wir verweisen in Bezug auf diese Aufgaben auf die oben citirten Werke von Schröter, Cremona und Sturm.

Verschiedene Species von Curven 3ter Ordnung. In derselben Art, wie die Kegelschnitte je nach der Realität oder Nichtrealität ihrer unendlich fernen Punkte unterschieden werden, so lassen sich analoge Unterschiede auch bei den gewundenen Curven 3ter Ordnung feststellen:

1) wenn die unendlich ferne Ebene die Curve *in einem einzigen reellen* Punkt schneidet, so ergibt sich die *cubische Ellipse*;

2) wenn die unendlich ferne Ebene *drei reelle* Punkte der Curve enthält, die *cubische Hyperbel*;

3) wenn speciell von diesen drei reellen Punkten zwei zusammenfallen, die *cubische parabolische Hyperbel*;

4) und wenn schliesslich diese drei Punkte sämmtlich zusammenfallen, d. h. also, die unendlich ferne Ebene eine Osculationsebene ist, *die cubische Parabel.*

Durch jede cubische Hyperbel gehen drei hyperbolische reelle Cylinder 2ten Grads.

Durch die cubische Ellipse geht ein einziger reeller Cylinder zweiten Grads, welcher elliptisch ist.

Durch die cubische parabolische Hyperbel gehen zwei reelle Cylinder 2ten Grads, von denen der eine hyperbolisch, der andere parabolisch ist.

Durch die cubische Parabel geht nur ein reeller Cylinder 2ten Grads und dieser ist parabolisch.

Nennt man die reelle Tangente (im Endlichen) an einen unendlich fernen Punkt der Curve *Asymptote,* so gelten die Sätze:

Die cubische Ellipse hat nur eine Asymptote.

Die cubische Hyperbel hat deren drei.

Die cubische parabolische Hyperbel hat eine einzige Asymptote.

Die cubische Parabel hat überhaupt keine.

Die gewundenen Curven 3ter Ordnung wurden zuerst von Möbius studirt, *Barycentr. Calcul,* 1827, p. 120; *Crelle,* 10, dann von Chasles, *Aperçu hist.,* Note 33; *Journ. de Liouville,* 2, 1854; *Compt. Rend.,* 45. Auf sie folgten Seydewitz, *Grunert's Archiv,* 10; Hesse, *Crelle,* 26; Schröter, ib., 56; v. Staudt, *Beiträge zur Geom. der Lage,* 3, 1860, p. 298—311; Cremona, *Ann. di mat.,* (1), 1, 2, 5; *Crelle,* 58, 60, 63; *Nouv. Annales etc.,* 1, 2te Ser.; R. Sturm, *Crelle,* 79, 80, 86; Müller, *Math. Ann.,* 1.

Andere Untersuchungen über die Raumcurven 3ter Ordnung speciell auch die Anwendung der Theorie der Invarianten der binären Formen auf dieses Studium findet man bei Beltrami, *Ist. Lomb.,* 1868; R. Sturm, l. c.; Voss, *Math. Ann.,* 13; D'Ovidio, *Acc. Torino,* 32, 1879; *Giorn. di Batt.,* 17; *Collect. math. in memoriam D. Chelini,* Mediolani 1881; Pittarelli, *Giorn. di Batt.,* 17; Gerbaldi, *Mem. Torino,* 1880.

Von Werken, die sich mit den Raumcurven 3ter Ordnung beschäftigen, citiren wir Salmon-Fiedler, *An. Geom. d. Raum.* 2 und Schröter, *Theorie der Oberflächen 2ter Ordnung und der Raumcurven 3ter Ordnung,* Leipzig 1880, der ausführlicher auf sie eingeht. Vergleiche auch die Schrift von Drach, *Einleitung in die Theorie der cubischen Kegelschnitte,* Leipzig 1867.

§ 3. Die Raumcurven 4ter Ordnung 1ter Species.

Jede Raumcurve 4ter Ordnung 1ter Species ist der vollständige Schnitt zweier Flächen 2ten Grads; *sie schneidet auf jeder von ihnen jede Erzeugende des einen Systems in zwei*

unkten und jede Erzeugende des anderen Systems ebenfalls in vei Punkten; siehe § 1.

Die Charakteristiken für diese Curve sind, wenn vorausesetzt wird, dass die beiden Flächen 2ten Grads beliebig seien:

$$\begin{aligned} n &= 4, & m &= 12, \\ r &= 8, & g &= 38, \\ h &= 2, & x &= 16, \\ y &= 8, & \alpha &= 16, \\ \beta &= 0, & G &= 0, \\ H &= 0, & \omega &= 0, \\ v &= 0, & p &= 1. \end{aligned}$$

Wenn dagegen die beiden Flächen 2ten Grads in einem Punkt ine gewöhnliche Berührung haben, so erhält die Curve 4ter Ordung einen Doppelpunkt, und ihre Charakteristiken sind:

$$\begin{aligned} n &= 4, & m &= 6, \\ r &= 6, & g &= 6, \\ h &= 2, & x &= 6, \\ y &= 4, & \alpha &= 4, \\ \beta &= 0, & G &= 0, \\ H &= 1, & \omega &= 0, \\ v &= 0, & p &= 0. \end{aligned}$$

Haben die beiden Flächen 2ten Grads in einem Punkt eine tationäre Berührung, so besitzt die Curve 4ter Ordnung eine Spitze; ihre Charakteristiken werden

$$\begin{aligned} n &= 4, & m &= 4, \\ r &= 5, & g &= 2, \\ h &= 2, & x &= 2, \\ y &= 2, & \alpha &= 1, \\ \beta &= 1, & G &= 0, \\ H &= 0, & \omega &= 0, \\ v &= 0, & p &= 0. \end{aligned}$$

Degenerationen der Raumcurve 4ter Ordnung 1ter Species sind:

1. Eine ebene Curve 3ter Ordnung und eine Gerade, welche so im Raum liegt, dass sie die Curve in einem einzigen Punkt schneidet.

2. Eine Raumcurve 3ter Ordnung und eine ihrer Sehnen.

3. Zwei Kegelschnitte, die so im Raum liegen, dass sie zwei Punkte gemeinschaftlich haben.

Aus dem Satz über die Anzahl der Kegel 2ten Grads, welche in einem Büschel von Flächen 2ten Grads existiren, folgt:

Durch jede Curve 4ter Ordnung 1ter Species gehen vier Kege 2ten Grads. Poncelet.

Eine Curve 4ter Ordnung 1ter Species kann keine dreifach Secante haben.

Jede Ebene des Ebenenbüschels, welches zur Axe eine Sehn oder Tangente der Curve 4ter Ordnung 1ter Species hat, schneid die Curve in zwei Punkten, deren Verbindungslinie die Erzeugend einer Fläche 2ten Grads ist, auf welcher die Curve 4ter Ordnun vollständig liegt.

In einem solchen Büschel gibt es vier Berührungsebenen a die Curve 4ter Ordnung.

Acht beliebig im Raum gegebene Punkte bestimmen eine Curv 4ter Ordnung 1ter Species.

Zwei auf derselben Fläche 2ten Grads gelegene Curven 4^{t} Ordnung 1ter Species schneiden sich in acht Punkten.

Solche acht Punkte sind diejenigen, in welchen sich dr Flächen 2ten Grads schneiden; *sind sieben von ihnen gegeben, s lässt sich der noch fehlende durch lineare Construction bestimmen* sie bilden eine *Gruppe von acht associirten Punkten; durch s gehen unendlich viele Curven 4ter Ordnung.* Siehe z. B. Hess *Crelle*, 26; Reye, ib., 100; Zeuthen, ib., 99; *Acta math.*, 12, et

Durch sechs Punkte einer Gruppe von acht associirten Punkt lege man die Raumcurve 3ter Ordnung; die durch die beid übrigen Punkte gehende Gerade ist eine Sehne der Curve 3^{t} Ordnung; und umgekehrt: *acht Punkte einer Curve 4ter Ordnun welche diese Eigenschaft besitzen, sind acht associirte Punkte.*

Durch fünf Punkte einer Curve 4ter Ordnung 1ter Speci ziehe man alle möglichen Flächen 2ten Grads, welche die Cur in noch drei Punkten schneiden. Die Ebene dieser drei Punk geht durch einen festen Punkt der Curve.

Man habe auf einer Curve 4ter Ordnung zwei Gruppen v acht associirten Punkten, im Ganzen also 16 Punkte; wenn nun möglich ist, acht von ihnen so auszuwählen, dass sie eine ne Gruppe associirter Punkte bilden, so liefern auch die übrigen ac eine Gruppe associirter Punkte.

Man ziehe drei Ebenen, welche die Curve 4ter Ordnung den Punkten

$$A_1,\ B_1,\ C_1,\ D_1;$$
$$A_2,\ B_2,\ C_2,\ D_2;$$
$$A_3,\ B_3,\ C_3,\ D_3$$

hneiden; die Ebenen $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$, $C_1C_2C_3$, $D_1D_2D_3$ *effen dann die Curve in weiteren vier Punkten, welche in einer bene liegen.*

Die vier Ebenen, welche in vier in einer Ebene gelegenen unkten osculiren, schneiden die Curve in vier Punkten einer bene. Reye.

Es gibt auf der Curve 4ter *Ordnung Tripel von Punkten* $_1, A_2, A_3$, *die mit der Eigenschaft begabt sind, dass die drei ihnen osculirenden Ebenen sich in einem Punkt S der Curve hneiden, durch welchen auch die Ebene* $A_1A_2A_3$ *geht.* Der unkt *S* heisst *Begleitpunkt (Satellit) des Tripels.*

Man habe eine Curve 4ter *Ordnung auf einer Fläche* 2ten *rads; die drei Punkte* B_1, B_2, B_3, *in denen die durch* A_1, A_2, A_3 *ehenden Erzeugenden desselben Systems die Curve* 4ter *Ordnung um zweiten Mal schneiden, bilden ebenfalls ein Tripel.*

Es sei O ein Punkt der Curve 4ter *Ordnung; die drei Punkte, in denen die drei Ebenen* OA_1A_2, OA_2A_3, OA_3A_1 *die Curve wieder treffen, bilden auch ein Tripel.*

Die drei Punkte, in denen die drei bez. durch A_1, A_2, A_3 *und durch eine Secante oder durch eine Tangente der Curve* 4ter *Ordnung gehenden Ebenen die Curve von Neuem schneiden, machen wieder ein Tripel aus.*

Um für eine gegebene Curve 4ter Ordnung ein *Tripel* von Punkten zu construiren, kann man auf die folgende Art verfahren: Man nimmt einen Punkt *S* der Curve als Begleitpunkt an, und projicirt dann die Curve 4ter Ordnung von *S* aus auf eine Ebene in eine Curve 3ter Ordnung; *die durch S und eine der Inflexionsgeraden der cubischen Plancurve gehende Ebene schneidet die Curve* 4ter *Ordnung in den drei Punkten eines Tripels.*

Wir haben oben gesagt, *dass es in dem Ebenenbüschel, dessen Axe eine Sehne der Curve* 4ter *Ordnung ist, vier Berührungsebenen an die letztere gibt;* wir wollen die vier Berührungspunkte ein *Punktequadrupel* nennen.

Das anharmonische Verhältniss dieser vier Ebenen des Büschels bleibt beim Variiren der Sehne, welche die Axe des Büschels ist, constant; oder auch:

Das anharmonische Verhältniss der vier Punkte, in welche die Tangenten in den vier Punkten eines Quadrupels die den Quadrupel zugehörige Sehne schneiden, ist constant.

Die durch eine Sehne der Curve und durch je einen der vier Punkte eines Quadrupels gehenden Ebenen schneiden die Curve in vier Punkten, die ihrerseits ein Quadrupel bilden.

Die vier Seitenflächen des Tetraeders, welches die vier Punkte eines Quadrupels zu Eckpunkten hat, schneiden die Curve in vier Punkten eines zweiten Quadrupels, die eben die vier Punkte sind, in denen die Curve von den vier Osculationsebenen in den Punkten des ersten Quadrupels getroffen wird.

Es gibt auf der Curve 4ter Ordnung 24 Punktepaare von der Beschaffenheit, dass die Osculationsebene in dem einen Punkt des Paares durch den anderen Punkt des Paares geht, und umgekehrt.

Man hat auch die Configuration der 16 Berührungspunkte der stationären Ebenen der Osculationsdeveloppabelen mit der Curve 4ter Ordnung studirt, d. h. der 16 Punkte der Curve 4ter Ordnung, in welchen die Osculationsebene eine Berührung 3ter Ordnung mit der Curve hat.

Diese 16 Punkte sind die Schnittpunkte der Curve mit den vier Seitenflächen des Polartetraeders, d. h. des Tetraeders, welches die Spitzen der vier durch die Curve 4ter Ordnung gehenden Kegel zu Eckpunkten hat.

Jede Ebene, welche durch drei dieser 16 Punkte geht, enthält auch einen vierten von ihnen, der übrigens mit einem der drei in Betracht gezogenen zusammenfallen kann. Man erhält so 116 Ebenen.

Die 16 Punkte lassen sich durch die Symbole (i, j) darstellen, worin $i, j = 0, 1, 2, 3$ sind, und diejenigen vier Punkte liegen in einer Ebene, für welche die Summe der ersten Indices und die der zweiten Indices, jede für sich, $\equiv 0 \pmod 4$ sind.

Die Coordinaten eines Punkts der Raumcurve 4ter Ordnung 1ter Species lassen sich durch elliptische Functionen eines Parameters ausdrücken; man kann insbesondere

$$x = p(u), \quad y = p'(u), \quad z = p''(u)$$

setzen, worin p die bekannte elliptische Function von Weierstrass bedeutet. Vergl. *Repert.* 1, Kap. 16, § 4. *Vier Punkte in einer Ebene sind alsdann diejenigen, für welche die Summe der vier Argumente $\equiv 0 \pmod{2\omega, 2\omega'}$ ist.*

Von diesem Gesichtspunkt aus wurde die Raumcurve 4ter rdnung 1ter Species von Harnack, *Math. Ann.*, 12; Lange, *issert., Dresden,* 1882 und Schlömilch's *Zeitschr.*, 28 studirt; ehe auch Halphen, *Fonct. ellipt.*, 2, p. 449 u. ff.

Die Raumcurve 4ter Ordnung 1ter Species untersuchte Chas-s, *Compt. Rend.*, 52, 54; Reye, *Ann. di mat.*, 2; Gegenauer, *Wien. Berichte*, 93; Ameseder, ib., 37, abgesehen von en anderen bereits oben citirten Autoren. Wir verweisen auch uf Schröter, *Grundzüge einer rein geometrischen Theorie der 'aumcurve 4ter Ordnung 1ter Species,* Leipzig 1890, worin man och viele andere Angaben findet.

Zu dieser Species von Curven 4ter Ordnung gehören auch ie sphärischen Kegelschnitte, von denen in § 1 die Rede war.

§ 4. Raumcurven 4ter Ordnung 2ter Species.

Die Raumcurve 4ter Ordnung 2ter Species ist als diejenige urve 4ter Ordnung definirt, durch welche nur *eine einzige* Fläche ten Grads geht.

Wenn eine Fläche 2ten Grads und eine Fläche 3ten Grads ine ebene Curve 2ter Ordnung (zwei Gerade in einer Ebene der einen Kegelschnitt) gemeinschaftlich haben, so ist im Allemeinen der übrig bleibende Schnitt eine Curve 4ter Ordnung ter Species; die Curve 4ter Ordnung 2ter Species ist dagegen der estschnitt einer Fläche 2ter und einer 3ter Ordnung, welche wei windschiefe Gerade gemeinschaftlich haben.

Man erhält auch eine Curve 4ter Ordnung 2ter Species, wenn ie Flächen 2ter und 3ter Ordnung eine einzige Gerade gemeinchaftlich haben, welche für die cubische Fläche doppelt ist.

Die allgemeine Fläche 3ter Ordnung kann man durch eine indschiefe Regelfläche ersetzen; d. h.:

Jede Curve 4ter Ordnung 2ter Species lässt sich als der chnitt einer Fläche 2ten Grads und einer windschiefen cubischen läche ansehen, welche eine Sehne der Curve zur Doppeldirectrix at. Cremona.

Jede Curve 4ter Ordnung 2ter Species kann als der Ort der unkte betrachtet werden, die den sich entsprechenden Ebenen reier projectiver Büschel gemeinschaftlich sind, von welchen das rste einfach, das zweite doppelt involutorisch und das dritte zu em zweiten homographisch ist. Cremona.

Die Projection der Curve 4ter Ordnung 2ter Species auf eine bene ist im Allgemeinen eine Curve 4ter Ordnung, 6ter Classe,

mit drei Doppelpunkten, vier Doppeltangenten und sechs In flexionspunkten.

Wenn das Centrum der Projection auf der Curve liegt, s erhält man eine Curve 3ter Ordnung und 4ter Classe.

Durch die Curve 4ter Ordnung 2ter Species gehen vier Kege 3ter Ordnung und 3ter Classe.

Die charakteristischen Zahlen für die Curve 4ter Ordnun 2ter Species sind:

$$n = 4, \quad m = 6,$$
$$r = 6, \quad g = 6,$$
$$h = 3, \quad x = 6,$$
$$y = 4, \quad \alpha = 4,$$
$$\beta = 0, \quad G = 0,$$
$$H = 0, \quad \omega = 0,$$
$$v = 0, \quad p = 0.$$

Alle Erzeugenden des einen der beiden Systeme auf d Fläche zweiten Grads werden von der Curve 4ter Ordnung drei Punkten, und alle diejenigen des anderen Systems in eine einzigen Punkt geschnitten; siehe § 1; daraus folgt:

Die Curve lässt ein einfach unendliches System von dr fachen Secanten zu.

Es gibt vier Punkte, in welchen die Tangente an die Cur die Curve noch einmal schneidet.

Die Curve kann *speciell* eine oder auch zwei *stationäre Ta genten* oder *lineare Inflexionen* $(v = 1, 2)$ haben, was Curven 4ter Ordnung 1ter Species nicht der Fall sein kann.

Die charakteristischen Zahlen für diese speciellen Fälle sin

$$n = 4, \quad m = 5,$$
$$r = 6, \quad g = 4,$$
$$h = 3, \quad x = 5,$$
$$y = 4, \quad \alpha = 2,$$
$$\beta = 0, \quad G = 0,$$
$$H = 0, \quad \omega = 0,$$
$$v = 1, \quad p = 0$$

$$n = 4, \quad m = 4,$$
$$r = 6, \quad g = 3,$$
$$h = 3, \quad x = 4,$$
$$y = 4, \quad \alpha = 0,$$
$$\beta = 0, \quad G = 0,$$
$$H = 0, \quad \omega = 0,$$
$$v = 2, \quad p = 0.$$

Degenerationen der Raumcurve 4ter Ordnung 2ter Species sind:

1. *Eine Raumcurve 3ter Ordnung und eine Gerade, welche sie in einem einzigen Punkt schneidet.*

2. *Zwei Kegelschnitte, welche einen einzigen Punkt gemeinschaftlich haben.*

Das anharmonische Verhältniss der vier Ebenen, welche durch vier Punkte der Curve und durch eine beliebige dreifache Secante der Curve gehen, bleibt beim Variiren der dreifachen Secante constant. Man kann es daher *das anharmonische Verhältniss der vier Punkte der Curve 4ter Ordnung* nennen.

Auf einer Fläche 2ten Grads kann man zwei Systeme von Curven 4ter Ordnung 2ter Species aufzeichnen, je nachdem diese Curven die Erzeugenden des einen Systems (das 1te System) in je einem und die des anderen Systems (das 2te System) in je drei Punkten treffen oder umgekehrt.

Zwei Curven 4ter Ordnung, welche verschiedenen Systemen angehören, schneiden sich in zehn Punkten und zwei Curven desselben Systems in sechs Punkten.

Eine Curve 4ter Ordnung 1ter Species und eine solche 2ter Species, welche auf derselben Fläche 2ten Grads beschrieben sind, treffen sich in acht Punkten.

Eine Raumcurve 3ter Ordnung und eine Curve 4ter Ordnung 2ter Species, die auf derselben Fläche 2ter Grads aufgetragen sind, und von welchen jede dieselbe Erzeugende der Fläche in einem einzigen Punkt trifft, schneiden sich in fünf Punkten.

Wenn dagegen die Curve 3ter Ordnung dieselbe Erzeugende in zwei Punkten und die Curve 4ter Ordnung in nur einem Punkt trifft, so haben die beiden Curven sieben Punkte gemeinschaftlich.

Durch acht beliebige Punkte des Raums gehen vier Curven 4ter Ordnung 2ter Species.

Durch sieben Punkte auf einer Fläche 2ten Grads lassen sich zwei Curven 4ter Ordnung 2ter Species ziehen, die auf dieser Fläche 2ten Grads liegen.

Von einem Punkt P der Curve aus können drei Osculationsebenen an die Curve gezogen werden; die drei Berührungspunkte liegen in einer durch P gehenden Ebene, welche die harmonische Polarebene der durch P gezogenen dreifachen Secante in Bezug auf das Dreiflach der drei Osculationsebenen ist. Ueber die Definition der harmonischen Polarebene siehe die Anm. zu § 2 dieses Kapitels.

Variirt man den Punkt P, so hüllt die Ebene der drei Berührungspunkte einen Kegel 2ter Ordnung ein. Cremona.

Man nennt diejenigen Sehnen der Curve, durch welche sich zwei Osculationsebenen von der Beschaffenheit an die Curve legen lassen, dass die Berührungspunkte die Schnittpunkte der Sehnen mit der Curve sind, *Hauptsehnen.* Bertini.

Es gibt drei Hauptsehnen; sie schneiden sich in demselben Punkt

Durch einen Punkt des Raums gehen drei Sehnen der Curve ($h = 3$); wenn man nun durch diesen Punkt und durch die sechs Tangenten an die Curve in den sechs Schnittpunkten mit den Sehnen Ebenen legt, so

berühren diese sechs Ebenen denselben Kegel 2ter Ordnung

Es gelten ferner die Sätze:

Die sechs von einem Punkt an die Curve gezogenen Osculationsebenen berühren denselben Kegel 2ten Grads.

Die acht Geraden, welche durch einen Punkt des Raum sich nach den Berührungspunkten der vier durch diesen Punk gelegten Doppeltangentialebenen ziehen lassen, sind Erzeugend eines Kegels 2ten Grads.

Die Osculationsebenen der Curve berühren eine Fläche 2te Grads, deren Tangentialebenen die Curve in vier eine äquianharmonische Gruppe bildenden Punkten schneiden. Diese Fläche 2te Grads ist in die Osculationsdeveloppabele der Curve eingeschrieben Cremona.

Die Ebenen, welche die Curve 4ter Ordnung in vier ein harmonische Gruppe bildenden Punkten schneiden, hüllen ein Steiner'sche Fläche (4ter Ordnung und 3ter Classe), siehe Kap. 1 § 9, *ein, welche der Osculationsdeveloppabelen der Curve 4ter Ordnung eingeschrieben ist.* Cremona.

Wir wollen das Büschel von Ebenen betrachten, dessen Axe eine Gerade ist, welche die Curve 4ter Ordnung in zwei Punkten schneidet; *der Ort der Geraden, welche die beiden anderen Punk*

rbindet, in denen eine jede Ebene die Curve 4ter Ordnung ifft, ist eine windschiefe Regelfläche 3ter Ordnung, deren Doppel-irectrix die Axe des Ebenenbüschels ist.

Aus den Tabellen im Anfang dieses Paragraphen ersieht an, dass die Curve 4ter Ordnung 2ter Species *vier* stationäre sculationsebenen hat ($\alpha = 4$); nun gelten die Sätze:

Die vier Tangenten in den vier stationären Punkten (wir ennen die Berührungspunkte der stationären Ebenen *stationäre unkte*) *liegen auf demselben Hyperboloid.*

Die vier stationären Punkte gehören der Knotencurve (6ter rdnung) der Osculationsdeveloppabelen an (Kap. 9, § 1); *in nen sind die stationären Ebenen zugleich auch Osculationsebenen n die Knotencurve.*

Die Knotencurve hat ebenfalls vier stationäre Punkte und eine anderen mehrfachen Punkte; sie ist der Schnitt einer Fläche ter mit einer Fläche 3ter Ordnung, welche in vier Punkten eine tationäre Berührung haben.

Die Curve 4ter Ordnung 2ter Species schneidet die entsprechende Knotencurve in acht Punkten, von welchen vier die stationären Punkte der Curve 4ter Ordnung und die übrigen vier die statio-ären Punkte der Knotencurve sind.

Die Existenz der Curven 4ter Ordnung 2ter Species haben Salmon und Cayley nachgewiesen, *Cambr. Math. Journ.*, 5, 1850, später Steiner, *Flächen 3ten Grades, Crelle,* 53, 1857.

Die erste bedeutende Arbeit über den Gegenstand ist von Cremona, *Acc. Bologna,* 1861 oder *Ann. di Tortolini,* 4; dann folgten Emil Weyr mit vielen Beiträgen, *Math. Ann.,* 4; *Wien. Berichte,* 1871, 75, 76, 78; Bertini, *Ist. Lomb.,* 1872; Armenante, *Giorn. di mat.,* 11, 12; Rohn, *Leipz. Ber.,* 1890/91 und viele Andere.

Bez. der Curve 4ter Ordnung 2ter Species hat Study, *Leipz. Berichte,* 1886 gefunden, dass, wenn ein Punkt des Raums gegeben ist, auf der Curve eine Involution 4ter Ordnung und 1ter Stufe bestimmt ist; ein specieller Fall dieser Involution war schon Bertini (l. c.) bekannt. Sie ersetzt gewissermassen das Fehlen jener anderen Involution, die auf den rationalen Raumcurven von der Ordnung $n > 4$ existirt. Siehe § 6.

Die sogenannte *Theorie der Osculanten* steht in Verbindung mit der Theorie dieser Involutionen. Vergl. Jolles, *Theor. der Osculanten,* Aachen, 1886; Stahl, *Crelle,* 101, 104.

Ausführlichere historische- und Literaturnachweise findet man in der Vorrede zu einer neueren Arbeit Berzolari's über diesen Gegenstand, *Ann. di mat.*, 20. Berzolari bewies, *dass die in Rede stehende Involution die apolare derjenigen ist, die man durch Schnitte der Curve mit den durch den gegebenen Punkt gehenden Ebenen erhält.*

Ueber die weiter oben (S. 260, 261) besprochenen specieller Fälle, in denen die Curve stationäre Tangenten besitzt, siehe Cremona, *Rend. Ist. Lomb.*, 1868; Appell, *Compt. Rend.* 1876; etc.

§ 5. Die Raumcurven 5ter, 6ter etc. Ordnung.

Die Curven 5ter Ordnung.

Wie wir schon gesagt haben (siehe Kap. 9, § 3), gibt es drei Familien von Raumcurven 5ter Ordnung, eine mit 4 scheinbaren Doppelpunkten und vom grössten Geschlecht 2, die andere mit 5 scheinbaren Doppelpunkten und vom grössten Geschlecht 1 und die dritte mit 6 scheinbaren Doppelpunkten und vom Geschlecht 0. Es versteht sich von selbst, dass die Curven keine wirklichen Singularitäten, d. h. wirkliche Doppelpunkte, Spitzen etc. haben dürfen.

Wir wollen diese Curven mit R_5^2, R_5^1, R_5^0 bezeichnen.

Durch jede Raumcurve 5ter Ordnung gehen unendlich viel Flächen 3ter Ordnung.

Die charakteristischen Zahlen für R_5^2 sind:

$$r = 12, \quad x = 48,$$
$$m = 21, \quad y = 32,$$
$$h = 4, \quad \alpha = 32,$$
$$g = 156.$$

Die übrigen charakteristischen Zahlen sind Null.

Von jedem Punkt der Curve R_5^2 geht eine dreifache Secante der Curve aus.

Die Curve ist der theilweise Schnitt einer Fläche 2ter und einer Fläche 3ter Ordnung, welche eine die Curve dreimal schneidende Gerade gemeinschaftlich haben.

Der Ort der dreifachen Secanten der Curve ist die Fläche 2ten Grads, auf welcher die Curve liegt.

Es existiren acht Punkte von der Beschaffenheit, dass die in ihnen an die Curve gelegten Tangenten die Curve auch sonst noch treffen ($\lambda = 8$, vergl. Kap. 9, § 4).

Es gibt 96 Punkte, in denen sich drei nicht unendlich nahe gende Tangenten schneiden (dreifache Punkte der Knotencurve r Developpabelen).

Es gibt 72 Osculationsebenen, welche die gegebene Curve ch anderswo berühren.

Die Curve R_5^2 hat keine vierfachen Secanten.

Die Curve R_5^2 kann man sich aus drei projectiven Büscheln tstanden denken, von denen das eine aus Flächen 2ter Ordnung nd die beiden anderen aus Ebenen bestehen; die Fläche 2ter Ordung, welche durch R_5^2 geht, wird durch die Schnitte der sich tsprechenden Ebenen der beiden Ebenenbüschel erzeugt.

R_5^2 kann auch definirt werden als der theilweise Schnitt veier Flächen 3ter Ordnung, welche ausserdem eine Raumcurve ter Ordnung 1ter Species gemeinschaftlich haben. Diese letztere urve trifft R_5^2 acht mal.

Die charakteristischen Zahlen für R_5^1 sind:

$$r = 10,$$
$$m = 15,$$
$$h = 5,$$
$$g = 70,$$
$$x = 30,$$
$$y = 20,$$
$$\alpha = 20.$$

Diese Curve lässt sich als der partielle Schnitt zweier Flächen ter Ordnung ansehen, welche sich ausserdem in einer Curve 4ter rdnung 2ter Species treffen.

Von jedem Punkt der Curve kann man zwei dreifache Seanten durch sie ziehen.

Es gibt 10 Tangenten der Curve, welche sie ausserdem noch nderswo schneiden.

Es existiren 30 Osculationsebenen, welche die gegebene Curve och anderswo berühren.

Es gibt 40 Schnittpunkte von drei nicht unendlich nahen Tangenten an die gegebene Curve.

Der Ort der dreifachen Secanten von R_5^1 ist eine Regelfläche ter Ordnung.

R_5^1 hat keine vierfache Secante.

Die charakteristischen Zahlen für R_5^0 sind:

$$r = 8,$$
$$m = 9,$$
$$h = 6,$$
$$g = 20,$$
$$x = 16,$$
$$y = 12,$$
$$\alpha = 8.$$

Durch jeden Punkt der Curve gehen drei dreifache Secanten.

Es gibt 12 Tangenten, welche die Curve noch sonstwo schneiden.

Es existiren 12 Osculationsebenen, welche die Curve auch sonst noch berühren.

Es gibt acht Punkte, in welchen sich drei nicht unendlich nahe Tangenten der Curve schneiden.

Die Curven R_5^0 unterscheiden sich in zwei Species, welche dadurch charakterisirt werden, dass die erste eine einzige vierfach schneidende Gerade enthält, während die andere deren unendlich viele besitzt, die eine Fläche 2ten Grads bilden.

Jede R_5^0 der ersten Species lässt sich als Ort des Punkts ansehen, welcher den sich entsprechenden Ebenen dreier projectiver Büschel gemeinschaftlich ist, von denen zwei doppelt und das dritte einfach involutorisch sind.

Die R_5^0 der zweiten Species kann als Ort des Punkts aufgefasst werden, in welchem sich die entsprechenden Ebenen dreier projectiver Büschel schneiden, von denen zwei einfach und der dritte dreifach involutorisch sind.

Jede R_5^0 der ersten Species ist der theilweise Schnitt zweier Flächen 3ter Ordnung, welche ausserdem noch eine Raumcurve 3ter Ordnung und eine Gerade, welche diese Raumcurve nicht schneidet, gemeinschaftlich haben; oder auch der theilweise Schnitt zweier Regelflächen 3ter Ordnung, welche ausserdem eine Doppelgerade und zwei andere Gerade gemeinschaftlich haben, von denen die eine die Doppelgerade schneidet und die andere nicht.

Die R_5^0 der zweiten Species ist der partielle Schnitt einer Fläche 2ten Grads mit einer Regelfläche 4ter Ordnung, welche eine vierfache Secante von R_5^0 zur dreifachen Geraden hat.

Die dreifachen Secanten einer R_5^0 der ersten Species bilden eine Regelfläche 8ter Ordnung, für welche R_5^0 dreifach und die vierfache Secante von R_5^0 vierfache Gerade ist.

Von dem Standpunkt der Classification der Raumcurven rf man die zweite R_5^0 nicht als Repräsentantin einer von der sten R_5^0 verschiedenen Familie ansehen, sondern als speciellen ll von ihr. Siehe darüber Halphen, *Journ. de l'École polyt.*, 2, p. 12.

Die Curven 5ter Ordnung untersuchte zuerst Cayley, *Compt. end.*, 54, 58, 1862, 1864; *Coll. Math. Pap.*, 5, p. 15, 24; äter R. Sturm, *Synthetische Untersuchungen über Flächen 3ter rdn.*, Leipzig 1867, da, wo er die Curven studirt, die auf der läche 3ter Ordnung liegen; dann folgten, bez. der R_5^0, Bertini, *ollect. math. in memoriam D. Chelini*, Mediolani, 1881; Berolari, *Mem. Lincei*, 1893 und, bez. der R_5^1, Emil Weyr, *Viener Berichte*, 90, 2. Abth., 1884, p. 206; 92, 2. Abth., 1885, 498; 97, 2. Abth., 1889, p. 592 und Montesano, *Acc. Napoli*, 1888.

Curven 6ter Ordnung.

Es gibt fünf Familien von Raumcurven 6ter Ordnung, welche urch die Anzahl der scheinbaren Doppelpunkte charakterisirt erden. Siehe Kap. 9, § 3. *Durch jede von ihnen geht immer ine Fläche 3ter Ordnung.* Die wichtigste ist vom Geschlecht 4 nd *der vollständige Schnitt einer Fläche 2ter mit einer Fläche ter Ordnung.* Diese Curve ist speciell für die Theorie der bel'schen Functionen vom Geschlecht 4 von Bedeutung; sie eistet dieser Lehre dieselben Dienste, wie die ebene Curve ter Ordnung den Abel'schen Functionen vom Geschlecht 3.

Die charakteristischen Zahlen für diese Curve sind:

$$r = 18,$$
$$m = 36,$$
$$h = 6,$$
$$g = 531,$$
$$x = 126,$$
$$y = 96,$$
$$\alpha = 60.$$

Durch jeden ihrer Punkte gehen zwei dreifache Secanten (die beiden Geraden der Fläche 2ten Grads, auf welcher sie liegt).

Die Anzahl der Tangenten, die auch sonst noch schneiden, beträgt 24.

Die Anzahl der Osculationsebenen, die sonst noch berühren, ist 324.

Die Osculationsdeveloppabele hat 480 dreifache Punkte.

Die Curve besitzt 120 dreifache Tangentialebenen und kann selbstverständlich keine vierfache Secante haben.

Man hat angefangen, die Configuration der 120 dreifachen Tangentialebenen der Raumcurve 6ter Ordnung und der 360 zugehörigen Berührungspunkte zu studiren. Diese Configuration ist für das Geschlecht $p = 4$ als eine Erweiterung dessen zu betrachten, was die Configuration der 28 Doppeltangenten der ebenen Curve 4ter Ordnung für das Geschlecht $p = 3$ ist.

Die 360 Berührungspunkte der Curve 6ter Ordnung mit ihren dreifachen Tangentialebenen liegen zu je 12 auf 3213 Flächen 2ten Grads.

Diese Flächen 2ten Grads lassen sich in Paare vereinigen und es gibt acht verschiedene Arten solcher Paare; ein Paar erster Art ist durch die Eigenschaft ausgezeichnet, dass vier andere der Flächen 2ten Grads existiren, welche jede der beiden gegebenen Flächen in 6 Punkten (auf der Curve 6ter Ordnung) treffen und dass es ferner 16 andere Flächen 2ten Grads gibt, welche eine der beiden Flächen des Paars in 6 Punkten und die andere nur in drei Punkten (auf der Curve 6ter Ordnung) schneiden während dagegen Flächen 2ten Grads, welche die entgegengesetzte Eigenschaft hätten, nicht existiren. Wie man sieht, besitzt also dieses Paar eine gewisse Asymmetrie.

Wir begnügen uns mit diesen Hinweisen; Näheres findet man bei Pascal, *Rend. Lincei*, 1. Sem., 1893 p. 204 u. 23

Wenn man zwei Wurzeln der Gleichung kennt, von welcher die Bestimmung der 120 dreifachen Tangentialebenen der Raumcurve 6ter Ordnung abhängt, so zerfallen die übrigen 118 in $54 + 64$ und die Gleichung der 64 hat zur Resolvente die Gleichung der 54, welche sich ihrerseits nach Auflösung einer Gleichung 27ten Grads, welche keine Resolventen niedrigeren Grades hat, in 27 quadratische Factoren zerlegen lässt.

Kennt man drei Wurzeln, so hängt das Problem noch von einer Gleichung 27ten Grads ab, welche keine Resolventen niedrigeren Grads hat. Dieses Theorem ist dem Satz über die 2 Doppeltangenten der ebenen Curve 4ter Ordnung oder der 2 Geraden der Fläche 3ter Ordnung analog. Siehe Pascal, *Rend. Lincei*, 1. Sem., 1893, p. 120.

Mit den Raumcurven 6ter Ordnung befassten sich: Clebsch *Crelle*, 63; Baule, *Dissert. Göttingen*, 1872; Emil Weyr, *Wien. Berichte*, 99, 2. Abth., 1890, p. 932; 100, 2. Abth., 1891, p. 45 Noether, *Crelle*, 93; London, *Math. Ann.*, 45; Petot, *Comp. Rend.*, 102, etc.

Was die Curven 7ter Ordnung anlangt, so verweisen wir auf duard Weyr, *Wien. Ber.*, 69, 2. Abth., 1874, p. 399; von er Curve 9ter Ordnung, welche *der vollständige Schnitt zweier lächen 3ter Ordnung ist (d. h. die Basiscurve eines Büschels ubischer Flächen)*, geben wir hier die charakteristischen Zahlen n. Sie sind:

$$r = 36,$$
$$m = 81,$$
$$h = 18,$$
$$g = 3006,$$
$$x = 576,$$
$$y = 504,$$
$$\alpha = 144,$$
$$p = 10.$$

Durch jeden Punkt der Curve gehen 11 dreifache Secanten.

Es gibt 144 Tangenten, die noch sonst schneiden und 2160 Osculationsebenen, die noch anderswo berühren.

Es existiren 3360 dreifache Tangentialebenen.

Die verschiedenen Degenerationen dieser Curve, des Schnittes zweier Flächen 3ter Ordnung, sind sämmtlich bei R. Sturm angegeben, *Flächen 3. Ordn.*, Leipzig 1867.

§ 6. Die rationalen Raumcurven.

Die Curven *vom Geschlecht Null* heissen *rational* oder auch *unicursal*. Man hat ihre allgemeinen Eigenschaften festgestellt. Wir geben im Folgenden einige der elementarsten Sätze, die sich speciell auf ihre charakteristischen Zahlen beziehen. Selbstverständlich wird vorausgesetzt, dass die Curve keine singulären Punkte besitzt.

Die Osculationsdeveloppabele einer rationalen Raumcurve n^{ter} Ordnung ist von der Ordnung $2(n-1)$.

Es gibt $(n-1)^2$ Gerade, die zwei willkürliche Gerade treffen und die Curve in zwei Punkten schneiden.

Eine bewegliche Gerade, welche eine feste Gerade trifft und die Curve zweimal schneidet, beschreibt eine windschiefe Fläche von der Ordnung $(n-1)^2$, für welche die feste Gerade vielfach von der Ordnung $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ und die gegebene Curve vielfach von der Ordnung $n-1$ ist, und welche $2(n-1)(n-2)$ Cuspidalpunkte hat, die auf der rationalen Curve liegen.

Die rationale Curve hat offenbar

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

scheinbare Doppelpunkte.

Durch jeden ihrer Punkte gehen $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ *dreifach Secanten.*

Es gibt $\frac{(n-2)(n-3)^2(n-4)}{3 \cdot 4}$ *vierfache Secanten.*

Die von den dreifachen Secanten gebildete windschiefe Fläch ist von der Ordnung

$$\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3}.$$

Die Classe der Curve ist die $3(n-2)^{\text{te}}$.

Durch jeden Punkt der Curve gehen $3(n-3)$ *in andere Punkten osculirende Ebenen.*

Durch jeden Punkt des Raums gehen

$$2(n-2)(n-3)$$

Doppeltangentialebenen.

Durch jeden Punkt der Curve gehen

$$2(n-3)(n-4)$$

in zwei anderen Punkten berührende Ebenen.

Jede Tangente wird von $2(n-3)$ *anderen Tangenten g troffen.*

Die Curve hat $4(n-3)$ *stationäre Ebenen.*

Es gibt $6(n-3)(n-4)$ *Osculationsebenen, die auch son noch berühren.*

Es existiren $2(n-2)(n-3)$ *Tangenten, welche die Cur noch sonstwo schneiden.*

Die Curve hat $\frac{4(n-3)(n-4)(n-5)}{3}$ *Bitangentialebene*

Eine wichtige Eigenschaft der rationalen Curven betrif die auf diesen Curven existirende sogenannte *Fundamenta involution*:

Die Coordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 eines Punkts der Curve lasse sich als rationale Funktionen eines Parameters λ mittelst d Relationen

$$x_1 \equiv a_\lambda^n,$$
$$x_2 \equiv b_\lambda^n,$$
$$x_3 \equiv c_\lambda^n,$$
$$x_4 \equiv d_\lambda^n$$

sdrücken, worin unter $a_\lambda^n, b_\lambda^n, \cdots$ in symbolischer Bezeichnung näre Formen n^{ten} Grads verstanden werden. Man construirt n die $n-3$ Formen n^{ten} Grads, die zu jeder der vier gebenen und mithin zu jeder beliebigen Form des durch diese er Formen individualisirten Systems *apolar* sind. Siehe Kap. 2.

Das durch die $n-3$ so gebildeten Formen individualisirte ıeare System stellt dann eine Involution (siehe Kap. 2) von ruppen von n Punkten auf der gegebenen Curve dar. Man ıt also:

Auf der gegebenen rationalen Curve existirt eine Involution er *Ordnung und* $(n-4)^{\text{ter}}$ *Stufe, deren Gruppen von n Punkten polar zu allen Gruppen von n Punkten sind, die von einer bebigen Ebene des Raums auf der Curve ausgeschnitten werden.*

Diese Involution hat Stahl *fundamental* genannt.

Für $n = 4$ reducirt sich die Involution offenbar auf eine ruppe von nur 4 Punkten. *Bei der (rationalen) gewundenen urve* 4ter *Ordnung* 2ter *Species wird diese Gruppe von vier unkten durch die vier Berührungspunkte der stationären Oscutionsebenen gebildet* (siehe § 4). In diesem Fall treten jedoch och andere Involutionen auf, die im Allgemeinen Study genden hat, wie schon in § 4 gesagt wurde.

Zum Studium der *Fundamentalinvolution* auf den rationalen urven ist besonders Stahl zu empfehlen, *Crelle,* 104; *Math. nn.,* 40. Andere Arbeiten über die rationalen Curven sind von mil Weyr, *Giorn. di Batt.,* 9; *Ann. di mat.,* 4; *Crelle,* 74; *Ist. omb.,* 1882; *Prag. Berichte,* 1882, etc.; Korndörfer, *Math. nn.,* 3; Brill, ib., 36; etc. Berzolari, *Ann. di mat.,* 21 ehnt einige der vorstehenden Betrachtungen auf die rationalen urven in einem Raum von einer beliebigen Anzahl von Dimenionen aus.

Kapitel XI.

Die Flächen 3ter Ordnung.

§ 1. Allgemeines. Die Flächen mit Doppelpunkten. Geometrische Erzeugung.

Die allgemeine Fläche 3ter Ordnung ist von der 12ten Class Der aus einem beliebigen Punkt des Raums beschriebene Ta gentenkegel der Fläche ist im Allgemeinen von der 6ten Ordnu und besitzt sechs Rückkehrkanten, aber keine eigentliche Dopp kante. Die parabolische Curve ist von der 12ten Ordnung.

Die allgemeine Gleichung der allgemeinen Fläche 3ter Or nung enthält 19 nicht homogene Coefficienten.

Auf einer allgemeinen Fläche 3ter Ordnung gibt es 27 Gera

Wenn eine Fläche 3ter Ordnung eine Doppellinie hat, kann diese nur eine einzelne Gerade sein; in diesem Fall jedoch die cubische Fläche eine Regelfläche.

Bei einer solchen Fläche 3ter Ordnung gibt es auf Doppelgeraden zwei uniplanare Punkte (siehe Kap. 9, § 4); anderen *sind biplanar.*

Eine Fläche 3ter Ordnung kann höchstens vier Doppelpun haben.

Eigentliche abwickelbare Flächen 3ter Ordnung gibt es nic sondern nur uneigentliche, wie die Kegel und Cylinder Ordnung.

Wir lassen hier eine Classification der verschiedenen Ar von Flächen 3ter Ordnung mit singulären Punkten und von Reg flächen 3ter Ordnung folgen. *Von diesen letzteren gibt es zwei Species.*

Diese Classification hat Cayley, *Phil. Trans.*, 1869 v ständig durchgeführt; die Fälle (5), (7), (11), (15), (20) wa schon vorher von Schlaefli, *Phil. Trans.*, 1863 untersu worden. Die Regelflächen 3ter Ordnung wurden noch früher

remona, *Ist. Lombardo,* 1861; *Crelle,* 60 studirt. Man sehe ich eine Arbeit von Em. Weyr nach, *Geom. der räuml. Erzugnisse,* Leipzig, 1870.

(In den folgenden Tabellen bezeichnen wir mit den Symbolen $u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, v^{(1)}, v^{(2)}, \ldots$ homogene Funktionen $1^{\text{ten}}, 2^{\text{ten}} \ldots$ rads in x_1, x_2, x_3).

Laufende Nummer	Beschaffenheit der Singularität	Classe	Gleichung der Fläche
1	Ohne singuläre Punkte.	12	
2	Ein konischer Punkt.	10	$u^{(2)}x_4 + u^{(3)} = 0.$ Der conische Punkt ist $x_1 = x_2 = x_3 = 0.$
3	Ein biplanarer Punkt.	9	$u^{(1)}v^{(1)} + u^{(3)} = 0.$ Der biplanare Punkt ist $x_1 = x_2 = x_3 = 0.$
4	Zwei conische Punkte.	8	Man nehme in der Gleichung unter (2) an, $u^{(2)}, u^{(3)}$ enthalten x_3 nur im ersten Grad.
5	Ein biplanarer Punkt derart, dass der Schnitt der beiden Tangentenebenen der Fläche angehört. Er ist als die Vereinigung zweier conischer Punkte anzusehen.	8	Wird der Gleichung unter (3) die reducirte Form $x_1 x_2 x_4 + u^{(3)} = 0$ gegeben, so erhält man die Gleichung für (5), wenn man z. B. annimmt, $u^{(3)}$ enthalte x_3^3 nicht. Die Tangentenebenen sind $x_1 = 0,\ x_2 = 0.$
6	Ein conischer Punkt und ein biplanarer Punkt.	7	Die Gleichung in diesem Fall erhält man aus (4) durch die Annahme, der Coefficient von x_3 zerfalle in zwei Factoren.
7	Ein biplanarer Punkt, wie in Fall (5), aber unter der Voraussetzung, dass die Berührungsebene an die Fläche längs der	7	Eine reducirte Gleichung für diesen Fall lautet $x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3^2 + x_2^2 x_3 - a x_1^3 = 0.$

Laufende Nummer	Beschaffenheit der Singularität	Classe	Gleichung der Fläche
	Schnittgeraden der beiden Tangentenebenen mit einer der letzteren zusammenfalle. Diese Singularität ist als die Vereinigung eines konischen Punkts mit einem biplanaren Punkt anzusehen. Die Berührungsebene längs der Geraden schneidet die Fläche in der zweimal gezählten Geraden selbst und in einer anderen von ihr verschiedenen Geraden.		Der biplanare Punkt ist $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ mit den Tangentenebenen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$; die Berührungsebene in einem Punkt der Schnittgeraden dieser Ebenen ist immer $x_1 = 0$ und schneidet die Fläche in der zweimal zu rechnenden Geraden $x_1 = x_2 = 0$ und in der nur einmal gezählten $x_1 = x_3 = 0$.
8	Drei konische Punkte.	6	In der Gleichung unter (2) nehme man an, $u^{(2)}, u^{(3)}$ enthalten x_2, x_3 nur im ersten Grad.
9	Zwei biplanare Punkte.	6	Man braucht nur anzunehmen, die Gleichung in Fall (3) enthalte x_3 nur im ersten Grad und der Coefficient von x_3 zerfalle in zwei Factoren.
10	Ein konischer Punkt und ein biplanarer Punkt von der Art, wie in Fall (5).	6	Man setze in Fall (5) voraus, $u^{(3)}$ enthalte auch x_3^2 nicht.
11	Ein biplanarer Punkt, wie in Fall (7), aber mit der neuen Eigenheit, dass die Berührungsebene längs der Geraden die Fläche in derselben dreimal gezählten Geraden schneidet. Man sagt in diesem Fall, die Gerade *osculire* die Fläche. Der Punkt ist als die Vereinigung von drei conischen Punkten anzusehen.	6	Die reducirte Gleichung lautet: $x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3^2 + x_2^3 - a x_1^3 = 0.$

Laufende Nummer	Beschaffenheit der Singularität	Classe	Gleichung der Fläche
12	Ein uniplanarer Punkt.	6	$(x_1 + x_2 + x_3)^2 x_4 + + x_1 x_2 x_3 = 0.$
13	Ein gewöhnlicher biplanarer Punkt und zwei conische Punkte.	5	$x_2 x_3 x_4 + x_1^2 (x_1 + x_2 + + x_3) = 0.$
14	Ein biplanarer Punkt, wie in Fall (7), und ein conischer Punkt.	5	$x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3^2 + x_2^2 x_3 = 0.$
15	Ein uniplanarer Punkt, aber derart, dass die Tangentenebene in ihm die Fläche längs drei Geraden schneidet, von denen zwei zusammenfallen.	5	$x_1^2 x_4 + x_2^2 x_3 + x_1 x_3^2 = 0.$
16	Vier konische Punkte.	4	$x_1 x_2 x_3 + x_2 x_3 x_4 + + x_3 x_4 x_1 + x_4 x_1 x_2 = 0.$
17	Zwei biplanare Punkte und ein conischer Punkt.	4	$x_1 x_2 x_3 + x_1 x_4^2 + x_4^3 = 0.$
18	Ein Punkt, wie in Fall (5), und zwei conische Punkte.	4	$x_1 x_2 x_4 + (x_1 + x_2) x_3^2 = 0.$
19	Ein Punkt, wie in Fall (11), und ein conischer Punkt.	4	$x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3^2 + x_2^3 = 0.$
20	Ein uniplanarer Punkt, aber derart, dass die Tangentenebene in ihm die Fläche längs drei zusammenfallenden Geraden schneidet.	4	$x_1^2 x_4 + x_1 x_3^2 + x_2^3 = 0.$
21	Drei biplanare Punkte.	3	Man braucht nur anzunehmen, die Gleichung im Fall (9) enthalte auch x_3 nur im ersten Grad und der Coefficient von x_3 zerfalle in zwei Factoren. In dem speciellen Fall, in welchem den drei biplanaren Punkten zu je zweien eine gemeinschaft-

Laufende Nummer	Beschaffenheit der Singularität	Classe	Gleichung der Fläche
			liche Berührungsebene entspricht, lautet die reducirte Gleichung der Fläche: $x_1^3 + x_2 x_3 x_4 = 0.$
22	Eine Doppelgerade, deren Punkte bis auf zwei uniplanare sämmtlich biplanar sind. Die Fläche ist eine Regelfläche. Sie wird von einer Geraden erzeugt, die an zwei anderen (Directricen) derart hingleitet, dass die auf ihnen entstehenden Punktreihen projectiv sind, und die eine der letzteren einfach, die andere doppelt involutorisch ist. Die zweite Directrix ist die Doppelgerade.	3	$x_3 x_1^2 - x_4 x_2^2 = 0.$ Die Doppelgerade ist $x_1 = 0,\ x_2 = 0.$ Die Directricen sind die Geraden $x_1 = 0,\ x_2 = 0$ und $x_3 = 0,\ x_4 = 0.$
23	Eine Doppelgerade, in deren (biplanaren oder uniplanaren) Punkten eine Berührungsebene immer dieselbe bleibt. Diese Fläche lässt sich als Grenzfall der vorigen ansehen, wenn die beiden Directricen sich unbegrenzt einander zu nähern suchen. Ueber ihre Erzeugung siehe Salmon-Fiedler, l.c., p. 370. Man pflegt sie die *Cayley'sche Regelfläche 3ter Ordnung* zu nennen.	3	$x_3^3 + x_1(x_1 x_3 + x_2 x_4) = 0.$ Die Ebene $x_1 = 0$ berührt die Fläche in jedem Punkt der Doppelgeraden $x_1 = x_2 = 0$ und schneidet die Fläche längs der nämlichen *dreimal* gezählten Geraden. Die zweite Berührungsebene umhüllt ein Hyperboloid $x_1 x_3 + x_2 x_4 = 0.$

Wir lassen hier ferner eine Tabelle der charakteristisch Zahlen für die allgemeine Fläche 3ter Ordnung und für einige d in der vorstehenden Zusammenstellung enthaltenen Flächen folg

Die in der ersten Zeile stehenden Zahlen beziehen si auf die laufenden Nummern der in der vorigen Tabelle a geführten Flächen; über die Bedeutung der in der ersten Colum stehenden Buchstaben verweisen wir auf Kap. 9, § 1.

	Allgemeine Fläche	(2)	(3)	(4)	(6)	(8)	(9)	(12)	(13)	(16)	(17)	(21)	(22)
konische Punkte	0	1	0	2	1	3	0	0	2	4	1	0	—
biplanare Punkte	0	0	1	0	1	0	2	0	1	0	2	3	—
uniplanare Punkte	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	—
$a = a'$	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	4
δ	0	1	0	2	1	3	0	3	2	4	1	0	0
$\varkappa$	6	6	7	6	7	6	8	6	7	6	8	9	3
n'	12	10	9	8	7	6	6	6	5	4	4	3	3
$\varkappa'$	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	3
b'	27	15	9	7	3	3	0	3	1	3	0	0	1
k'	216	105	36	21	3	3	0	3	0	3	0	0	0
t'	45	15	6	3	0	1	0	1	0	1	0	0	0
ϱ'	27	15	9	7	3	3	0	3	1	3	0	0	1
c'	24	18	16	12	10	6	8	6	4	0	2	0	0
h'	180	96	84	38	24	6	24	7	2	0	0	0	0
r'	30	24	18	17	12	9	8	7	5	0	2	0	0
σ'	12	12	12	10	9	6	8	6	4	0	2	0	0
β'	54	30	18	13	6	3	0	3	1	0	0	0	0

Ueber die Anzahl und Configuration der auf den Flächen 3ter Ordnung mit Doppelpunkten gelegenen Geraden siehe weiter unten § 3.

Die verschiedenen geometrischen Erzeugungsarten der Flächen 3ter Ordnung sind die folgenden:

Man habe zwei Trieder A und B; jede Ebene des ersten schneidet jede Ebene des zweiten; somit erhält man im Ganzen neun Gerade; durch einen Punkt P des Raums wird eine Ebene

gelegt, welche die neun Geraden in neun Punkten trifft; durch diese neun Punkte und durch P geht immer eine Curve 3ter Ordnung. *Der Ort dieser Curve, wenn man die Lage der durch P gelegten Ebene auf alle mögliche Art ändert, ist eine allgemeine durch P und die neun Geraden gehende Fläche 3ter Ordnung.* Steiner, *Berl. Ak.*, 1856; *Crelle*, 53.

Gegeben sind zwei projective Büschel, das eine von Flächen 2ter Ordnung, das andere von Ebenen; der Ort der Schnittcurve der sich entsprechenden Elemente ist eine Fläche 3ter Ordnung. (id.)

Ins Besondere:

Der Ort der Kegelschnitte, in welchen jede Fläche 2ter Ordnung eines Büschels von der Polarebene eines Punkts P in Bezug auf sich selbst geschnitten wird, ist eine Fläche 3ter Ordnung. (id.)

Der Ort der Punkte, welche dreien sich entsprechenden Ebenen dreier projectiver Netze von Ebenen gemeinschaftlich sind ist eine Fläche 3ter Ordnung. Grassmann, *Crelle*, 49; Schröter *Crelle*, 62.

Der Ort des Pols einer Ebene in Bezug auf alle Flächen 2ten Grads eines Netzes ist eine Fläche 3ter Ordnung. Steiner

Der Ort des Schnittpunkts dreier Polarebenen aller Punkte einer anderen Ebene in Bezug auf drei Flächen 2ten Grads, die nicht demselben Büschel angehören, ist eine Fläche 3ter Ordnung. (id.)

Man habe sechs Ebenenbüschel $a, b, c;\ a_1, b_1, c_1$ und die drei Axen der drei ersten, ebenso wie diejenigen der drei letzten mögen sich nicht schneiden; man stelle eine projective Beziehung zwischen a und a_1, b und b_1, c und c_1 her und betrachte eine Ebene π und in ihr einen Punkt P, durch den drei Ebenen der ersten drei Büschel gehen; diesen 3 Ebenen entsprechen drei Ebenen der zweiten drei Büschel. *Der Ort des Schnittpunkts dieser letzten drei Ebenen, wenn sich P in π bewegt, ist eine Fläche 3ter Ordnung.* F. August, *Dissert.*, Berlin, 1862; Rudolf Sturm, *Fläch. 3. Ordn.*, Leipzig 1867, p. 44.

Eine Fläche 3ter Ordnung mit einem konischen Punkt wird auf die folgende Art erzeugt (Salmon):

Die vier Ebenen eines Tetraeders rotiren um vier Punkte während die drei Kanten einer Seitenfläche sich in drei feste Ebenen bewegen; *der Ort des gegenüberliegenden Eckpunkts beschreibt eine cubische Fläche, für welche der Schnittpunkt der drei festen Ebenen Doppelpunkt ist.* Dieses Theorem ist ein specieller Fall des Grassmann'schen.

Es seien A_1, A_2, A_3, A_4 vier Punkte einer Ebene und A_1', A_2', A_3', A_4' ihre Projectionen von einem Punkt P aus auf vier gegebene Ebenen; *der Ort des Punkts P, für welchen die vier Punkte A′ in derselben Ebene liegen, ist eine cubische Fläche mit vier Doppelpunkten, welche die Eckpunkte des aus den vier gegebenen Ebenen gebildeten Tetraeders sind.* R. Sturm, l. c., p. 381.

Diese Fläche mit vier konischen Punkten (*4ter Classe*) wurde zuerst von Cayley, 1844, *Journ. de Liouville,* 9 studirt; man nennt sie desshalb wohl auch die *Cayley'sche Fläche.* Sie ist von besonderem Interesse, *weil sie die reciproke Polare der Steiner'schen Fläche ist.* Siehe Kap. 12, § 8. Sie wurde auch von Eckhardt in der weiter unten citirten Arbeit und von Anderen untersucht.

Fällt man von einem Punkt der Cayley'schen Fläche Lothe auf die vier Seitenflächen des von den Doppelpunkten bestimmten Tetraeders, so liegen die Fusspunkte dieser Lothe in einer Ebene.

Diese Eigenschaft gab Veranlassung zu einer Construction, die ein specieller Fall der oben angegebenen ist.

Beltrami kam bei dem Studium einiger stereometrischer Eigenschaften zu den folgenden einfachen Sätzen über die in Rede stehende Fläche (*Giorn. di Batt.,* 1):

Die Mittelpunkte der 28 Strecken, die durch die Centren der 8 in ein Tetraeder eingeschriebenen Kugeln bestimmt werden, liegen auf einer Fläche 3ter Ordnung, welche die sechs Kanten dieses Tetraeders vollständig enthält. Diese Fläche ist die Cayley'sche und *ihre vier konischen Punkte sind die Eckpunkte des Tetraeders.*

Die vier der Fläche 3ter Ordnung umschriebenen Kegel, deren Spitzen in den Eckpunkten des Tetraeders liegen, sind Kegel 2ter Ordnung und schneiden sich zu je zweien in sechs ebenen Kegelschnitten. Die Ebene des Schnitts der beiden Kegel, deren Spitzen in den Endpunkten einer Kante liegen, geht durch die gegenüberliegende Kante und ist der Berührungsebene an die Fläche längs dieser Kante harmonisch conjugirt in Bezug auf die beiden Seitenflächen des Tetraeders, die sich in dieser Kante schneiden. Ferner gehen die 6 Ebenen der 6 Kegelschnitte durch einen und denselben Punkt.

Von den ältesten Studien über die Fläche 3ter Ordnung sind speciell die von Cayley und Salmon, *Cambr. math. Journ.*, 4. 1849; Sylvester, ib., 6, 1851; Steiner, l. c.; Grassmann, l. c. und F. August, *Dissert.*, Berlin 1862 hervorzuheben.

Besonders wichtig waren die späteren Arbeiten von Cremona, *Crelle*, 68 und von R. Sturm, die von der Berliner Akademie 1866 prämiirt wurden. Von R. Sturm sind auch die *synthetischen Untersuchungen über Flächen 3ter Ordnung*, Leipzig 1867; ferner ist ein grosser Theil der deutschen Uebersetzung der *Teoria delle superficie* von Cremona, die Curtze, Berlin 1870 besorgt hat diesen Flächen gewidmet.

Mit speciellen cubischen Flächen oder solchen mit singulären Punkten beschäftigten sich unter Anderen: Cayley, *Phil. Trans.* 1869; Schläfli, ib., 1863; Clebsch, *Math. Ann.*, 4; *Gött. Nachr.*, 1872; Eckardt, *Math. Ann.*, 5, 10; Kohn, *Wien. Ber.* 96, 1887; etc.

Die Regelflächen 3ter Ordnung studirten Cayley, *Phil. Mag.* 1862, 1864; *Phil. Trans.*, 1864; Cremona, *Ist. Lomb.*, 1860 *Crelle*, 60; Em. Weyr, *Geom. d. räuml. Erzeugn.*, Leipzig 1870 Pittarelli, *Giorn. di Batt.*, 32.

Auch in der *Geom. d. Raumes*, 2 von Salmon-Fiedler und in der *Geom. der Lage* von Reye wird die Theorie der cubischen Flächen ausführlich behandelt.

Eine reiche Sammlung von Gypsmodellen der verschiedenen Formen der Flächen 3ter Ordnung hat der Verlag von L. Brill in Darmstadt (jetzt im Besitze von Schilling in Halle) herausgegeben; siehe seinen *Catalog math. Modelle*, Darmstadt 1892.

§ 2. Das Sylvester'sche Pentaeder. Die Hesse'sche oder Kernfläche der Fläche 3ter Ordnung.

Der Gleichung einer allgemeinen Fläche 3ter Ordnung ohne singuläre Punkte kann man die Form

$$a_1 X_1^3 + a_2 X_2^3 + a_3 X_3^3 + a_4 X_4^3 + a_5 X_5^3 = 0$$

geben; worin $X_1 = 0$, $X_2 = 0, \cdots, X_5 = 0$ *die Gleichungen von fünf Ebenen sind, die ein sogenanntes Sylvester'sches Pentaeder bilden.* Wie man weiss, besteht zwischen den fünf X immer eine homogene lineare identische Relation; man kann nun selbstverständlich immer voraussetzen, die Constanten, welche in die Gleichungen der Ebenen X eintreten, seien derart gewählt, dass die homogene lineare Relation, welche zwischen den linken

eiten der Gleichungen der fünf Ebenen besteht, sich auf die ein-
.che Form

$$\sum_1^5 X_i = 0$$

educirt.

Man kann den Satz also auch so aussprechen:

Der Gleichung der cubischen Fläche lässt sich die Gestalt

$$\sum_1^5 a_i X_i^3 = 0 \quad \textit{(Pentaedergleichung)}$$

eben, wobei zwischen den X die identische Relation

$$\sum_1^5 X_i = 0 \quad \textit{besteht.}$$

Dieser sehr wichtige Satz wurde zuerst von Sylvester hne Beweis aufgestellt, *Cambr. math. Journ.*, 6, 1851, p. 198, päter von Clebsch, *Crelle*, 59 streng bewiesen; darauf folgten ann die Arbeiten von Gordan, *Math. Ann.*, 5 und Reye, *Crelle*, 78.

Die Gleichung der Hesse'schen Fläche (Kernfläche) der-enigen cubischen Fläche, deren Gleichung die vorstehende Gestalt at, lautet:

$$\frac{1}{a_1 X_1} + \frac{1}{a_2 X_2} + \frac{1}{a_3 X_3} + \frac{1}{a_4 X_4} + \frac{1}{a_5 X_5} = 0.$$

Die Hesse'sche und Steiner'sche Fläche einer Fläche 3ter Ordnung sind identisch (siehe Kap. 9, § 5) *und von der 4ten Ordnung.*

Die Punkte der Hesse'schen Fläche entsprechen sich daher u je zweien derart, dass die polare Fläche 2ten Grads eines Punkts der Hesse'schen Fläche in Bezug auf die cubische Fläche in Kegel ist, dessen Spitze in einem anderen Punkt der Hesse'-schen Fläche liegt.

Diese Zuordnung ist reciprok.

Die Gerade, welche zwei sich entsprechende Punkte der Hesse'-schen Fläche verbindet, hat die Eigenschaft, dass die Polarebenen ihrer Punkte durch eine feste Gerade gehen, welche Doppeltangente der Hesse'schen Fläche ist, d. h. sie in zwei Punkten berührt.

Die Hesse'sche Fläche besitzt 10 Doppelpunkte und 10 Gerade; die ersten sind zu je dreien auf 10 Geraden vertheilt und diese gehen zu je dreien durch die zehn Punkte.

Diese 10 Punkte und 10 Geraden sind die Ecken und Kanten des Sylvester'schen Pentaeders in Bezug auf die gegebene Fläche 3ter Ordnung.

Die Polarfläche 2ten Grads (in Bezug auf die Fläche 3ter Ordnung) eines der 10 Doppelpunkte der Hesse'schen Fläche zerfällt in zwei Ebenen, deren Schnitt auf der Hesse'schen Fläche liegt und eine der erwähnten 10 Geraden ist; die beiden Ebenen sind in Bezug auf die beiden durch diese Geraden gehenden Seitenflächen des Pentaeders harmonisch conjugirt.

Durch dieses Theorem wird eine Zuordnung zwischen den 10 Punkten und 10 Geraden hergestellt.

Der Schnitt (12ter Ordnung) der cubischen Fläche mit ihrer Hesse'schen Fläche ist für beide Flächen eine parabolische Curve. R. Sturm.

Die der Fläche 3ter Ordnung längs der parabolischen Curve umschriebene Developpabele ist auch der Hesse'schen Fläche umschrieben.

Jede Gerade der Fläche 3ter Ordnung berührt die Hesse'sche Fläche doppelt.

Die Bestimmung der 10 Doppelpunkte der Hesse'schen Fläche hängt von der Auflösung einer Gleichung 10ten Grads ab, die ihrerseits wieder von der Lösung einer Gleichung 5ten Grads abhängig ist. Siehe Clebsch, *Crelle*, 49; Salmon-Fiedler, l. c. §§ 298, 299.

Ueber die Configuration der Ebenenpaare, welche die polaren Flächen 2ten Grads der 10 Doppelpunkte der Hesse'schen Fläche darstellen, und der Geraden, in welchen diese Paare sich schneiden etc. gibt es ein Clebsch'sches Theorem (l. c.), das von R. Sturm und Salmon-Fiedler reproducirt und vervollständigt wurde.

Wenn man in der Pentaedergleichung der Fläche 3ter Ordnung annimmt, alle a seien gleich 1, so ergibt sich die Gleichung

$$\sum X_i^3 = 0,$$

während zwischen den X die Relation

$$\sum X_i = 0 \quad \text{besteht.}$$

Die durch die vorstehende Gleichung dargestellte Fläche wurde von Clebsch *Diagonalfläche* genannt. *Math. Ann.*, 4.

Betrachtet man in jeder der fünf Seitenflächen des Pentaeders das durch die übrigen vier Seitenflächen bestimmte Viereck und von diesem die drei Diagonalen, so liegen die 15 sich

gebenden Diagonalen auf der Clebsch'schen Fläche. Daher ommt der Name *Diagonalfläche.*

Die Fläche hat mithin 15 Gerade, die zu je dreien 10 mal urch einen Punkt gehen und 5 mal in einer Ebene liegen.

Alle Punkte der Diagonalfläche sind hyperbolisch (siehe ap. 9, § 1) *mit Ausnahme der 10 Eckpunkte des Pentaeders, elche der Fläche angehören und parabolische Punkte für sie nd.* Klein, *Math. Ann.,* 6.

Der reelle Theil der parabolischen Curve reducirt sich auf iese 10 isolirten Punkte allein.

Die übrigen 12 Geraden der Clebsch'schen Fläche (ausser en 15 Diagonalen) bilden eine Doppelsechs. Siehe § 3.

Eine Fläche, die zwischen der allgemeinen Fläche 3ter Ordung und der Diagonalfläche ihre Stellung hat, ist die Cayley'sche, *hil. Mag.,* 1, 1864:

$$a_1 X_1^3 + a_2 X_2^3 + b(X_3^3 + X_4^3 + X_5^3) = 0.$$

Sie hat drei dreifache Tangentialebenen, die durch eine Gerade gehen und drei Gerade, die durch einen Punkt gehen.

Studien über das Pentaeder hat auch Rodenberg, *Math. Ann.,* 14; *Dissert.,* Göttingen, 1874 gemacht. Sonstige Untersuchungen findet man bei Cremona und Anderen; siehe weiter unten § 3.

Als Erweiterung eines Satzes über die cubischen Plancurven lässt sich das folgende von Clebsch gefundene Theorem ansehen, *Crelle,* 63:

Die Polarebene eines Punktes P einer Fläche 3ter Ordnung in Bezug auf ihre Hesse'sche Fläche schneidet die in P die cubische Fläche berührende Ebene in einer Geraden, welche die Inflexionsgerade des Schnitts dieser Ebene mit der Fläche 3ter Ordnung ist.

Die Enveloppe der Ebenen, welche die cubische Fläche in harmonischen Curven 3ter Ordnung) schneiden, ist eine Fläche 6ter Classe, und die Enveloppe der Ebenen, welche sie in äqui-*

*) Unter *harmonischen Curven 3ter Ordnung* versteht man diejenigen, für welche das anharmonische Verhältniss (d. h., das constante anharmonische Verhältniss der vier Tangenten, die sich von einem beliebigen Punkt der Curve 3ter Ordnung an diese Curve ziehen lassen), vergl. Kap. 7, § 1, gleich -1 ist. Ebenso sind *äquianharmonische Curven 3ter Ordnung* diejenigen, bei welchen dieses Verhältniss den Werth $-\varepsilon$ (der Cubikwurzel aus -1) hat. Siehe auch Kap. 7, § 3.

anharmonischen Curven 3ter Ordnung treffen, eine Fläche 4te Classe. Diese beiden Flächen sind in die Developpabelen de stationären Ebenen eingeschrieben, d. h. in die der Fläche 3te Ordnung längs der parabolischen Curve umschriebene Developpabel

Unter den Ebenen, welche die cubische Fläche in äqu anharmonischen Curven 3ter Ordnung schneiden, gibt es 10, d durch einen Doppelpunkt der Hesse'schen Fläche und durch d ihm entsprechende Gerade gehen.

Ueber andere Eigenschaften der Hesse'schen Fläche d Fläche 3ter Ordnung siehe speciell Cremona und R. Sturm, l. Die Hesse'sche Fläche der Hesse'schen Fläche einer Fläche 3. (behandelt G. Bauer, *Abh. der Münch. Akad.*, 1883.

§ 3. Die Geraden der Fläche 3ter Ordnung. Die dre fachen Tangentialebenen. Die Polsechsflache Cremona'

Wie wir schon gesagt haben, *besitzt eine allgemeine Fläc 3ter Ordnung 27 Gerade.*

Jede Ebene, welche durch eine dieser Geraden geht, ist ei Doppeltangentialebene der Fläche; ihre Berührungspunkte sind d beiden Punkte, in denen die Gerade den Kegelschnitt schneid welcher der Restschnitt der Ebene mit der Fläche ist.

In jedem dieser Ebenenbüschel gibt es 5 Ebenen, für welc ein solcher Kegelschnitt in zwei Gerade zerfällt; diese Eben sind dann dreifache Tangentialebenen der Fläche; die Anzahl d letzteren beträgt daher $\frac{5 \cdot 27}{3} = 45$.

Durch jede Gerade gehen 5 der 45 dreifachen Tangenti ebenen und jede dreimal berührende Ebene geht selbstverständli durch drei Gerade.

Jede Gerade der Fläche berührt die parabolische Curve d Fläche in zwei Punkten.

Die Punkte, in denen die durch eine feste Gerade d Fläche gehenden Doppeltangentialebenen die Fläche berühren, bild auf der Geraden eine Involution, deren Doppelpunkte die beid Punkte sind, in welchen die Gerade die parabolische Curve berüh

Aus einem der vorstehenden Theoreme folgt auch:

Jede Gerade schneidet 10 andere Gerade der Fläche u die übrigen 16 nicht. Es gibt 135 Schnittpunkte der Gerad der Fläche.

Zwei Gerade a, b, welche sich nicht treffen, werden von d selben fünf Geraden geschnitten; von den übrigen 20 gibt es fü

lche nur a, und fünf, welche nur b, und zehn, welche weder a ch b treffen.

Es existiren 216 windschiefe Geradenpaare (welche sich nicht effen).

Drei Gerade, welche sich nicht schneiden, werden von drei ideren Geraden getroffen, die einander ebenfalls nicht schneiden id es gibt sechs weitere Gerade, die keine der drei gegebenen eraden treffen.

Die drei windschiefen Geraden und die anderen drei windhiefen, welche die ersteren schneiden, bilden eine sogenannte *oppeldrei* (Sturm).

Es gibt 360 Doppeldreie.

Vier Gerade, die sich nicht schneiden, werden von zwei eraden getroffen und von drei anderen nicht getroffen.

Es gibt zwei Arten von Systemen von fünf Geraden, die ch nicht schneiden (windschiefe Quintupel), die Quintupel erster rt werden dadurch charakterisirt, dass eine sechste Gerade xistirt, welche keine der Geraden des Quintupels schneidet; für ie der zweiten Art gibt es dagegen eine solche sechste Gerade icht. Es existiren 432 Quintupel 1ter Art und 216 2ter Art.

Es gibt 72 windschiefe Sextupel d. h. Systeme von sechs eraden, welche sich zu je zweien nicht schneiden; windschiefe ysteme von mehr als sechs Geraden existiren nicht.

Die 72 windschiefen Sextupel lassen sich in Paare vereinigen, welche die Eigenschaft besitzen, dass, wenn

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6;$$
$$b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4,\ b_5,\ b_6$$

die Geraden der beiden Sextupel bezeichnen, jede Gerade a_i die Gerade b_i nicht trifft, dagegen jede andere Gerade b trifft und umgekehrt. Ein solches Paar hat Schläfli eine *Doppelsechs* genannt. *Es gibt mithin 36 Doppelsechse.*

Zwei Doppelsechse haben 4 oder 6 Gerade gemeinschaftlich.

Zwei dreifache Tangentialebenen, welche keine Geraden der Fläche gemeinsam haben, bestimmen eine dritte Ebene, welche mit ihnen in demselben Verhältniss steht derart, dass die 9 in den drei Ebenen enthaltenen Geraden sich noch auf eine andere einzige Art in drei anderen Ebenen vereinigen lassen; von diesen beiden Tripeln von Ebenen sagt man, sie bilden *ein Paar conjugirter* (Steiner'scher) *Trieder.*

Es gibt 120 Paare conjugirter Trieder.

Die 15 Geraden, welche von den 27 übrig bleiben, wen man die 12 Geraden einer Doppelsechs wegnimmt, liegen zu j dreien in 15 Ebenen, welche zu je sechs 10 Paare conjugirte Trieder bilden.

Es leuchtet ein, dass zwei conjugirte Trieder, da sie sic in neun Geraden der Fläche schneiden und jedes von ihnen ein degenerirte Fläche 3ter Ordnung darstellt, einen Büschel cubische Flächen bestimmen, denen die gegebene angehört.

Wenn

$$A = 0,\ B = 0,\ C = 0;$$
$$A' = 0,\ B' = 0,\ C' = 0$$

die Gleichungen der Ebenen zweier conjugirter Trieder sind, s hat die Gleichung der Fläche den Typus

$$ABC + kA'B'C' = 0.$$

Jedem Paar conjugirter Trieder entsprechen zwei andere de art, dass der Complex der drei Paare alle 27 Geraden d Fläche enthält. Es gibt 40 solche Complexe von drei Paar conjugirter Trieder.

Die geometrische Construction der 27 Geraden der Fläch wird auf die folgende Art (Salmon, Sturm) ausgeführt:

Man nimmt vier Gerade b_3, b_4, b_5, b_6 an, welche sich nic schneiden und nicht demselben Hyperboloid angehören, zieht d beiden Geraden a_1, a_2, die sich nicht treffen, dagegen die vi ersteren schneiden; b_2 sei eine Gerade, welche nur a_1 und nic a_2 trifft und mit keiner Gruppe von drei unter den vier b g wählten Geraden auf demselben Hyperboloid liegt; b_1 ferner s eine ähnliche andere Gerade, die aber nur a_2 und nicht schneidet. Auf a_1 wählt man nun vier Punkte willkürlich u drei Punkte auf jeder der fünf Geraden b_2, b_3, b_4, b_5, b_6. *I Fläche 3ter Ordnung, welche durch diese 19 Punkte geht, enth alle construirten Geraden a, b, sie enthält ferner auch die Gera a_3, die mit a_1 das Paar von Geraden bildet, welche das Quadru b_2, b_4, b_5, b_6 schneiden, und die überdies mit a_2 das Paar v Geraden bildet, welche das Quadrupel b_1, b_4, b_5, b_6 schneid Construirt man auf ähnliche Art die Geraden a_4, a_5, a_6, wel bez. die Geraden der Quadrupel*

$$b_2, b_3, b_5, b_6;\ b_2, b_3, b_4, b_6;\ b_2, b_3, b_4, b_5$$

treffen, so ergeben sich im Ganzen 12 auf der Fläche 3ter O nung liegende Gerade, welche eine Doppelsechs bilden.

Die übrigen 15 Geraden erhält man als die 15 Schnittlinien r Ebenen

$$(a_i b_j) \quad \text{und} \quad (a_j b_i),$$

obei i und j von einander verschieden sind).

Die Substitutionengruppe der 27 Geraden der Fläche 3ter rdnung ist von der Ordnung 6!72.

Die Bestimmung dieser 27 Geraden hängt von der Auf- sung einer Gleichung ab, welche keine Resolventen niedrigeren rads hat; kennt man jedoch eine der Wurzeln dieser Gleichung, . h. eine der 27 Geraden, so trennen sich die übrigen Wurzeln 10 + 16 und die Gleichung der zweiten 16 hat zur Resol- ente die Gleichung der ersten 10, welche ihrerseits durch die uflösung einer allgemeinen Gleichung 5ten Grads in fünf quadra- sche Factoren zerfällt.

Kennt man noch eine Wurzel von den 16, d. h. sind im anzen zwei Gerade bekannt, die sich nicht schneiden, so hängt ie Kenntniss der übrigen wieder von einer allgemeinen Gleichung ten Grads ab (Jordan).

Die Gleichung der 27 Geraden wurde studirt von: Clebsch, *ött. Abh.*, 14, 1868, 1869; Jordan, *Traité des Substit.*, Paris 870, p. 310, 368; Sylvester, *Proc. London math. Soc.*, 2, . 155; Klein, *Journ. de Liouville*, 4, 1887, p. 169; Burkhardt, *ött. Nachr.*, 1892.

Wir wollen nun dazu übergehen, eine gewisse von Crenona, *Math. Ann.*, 13 gefundene Beziehung zwischen den windschiefen Doppelsechsen und dem Sylvester'schen Pentaeder larzulegen. Wir denken uns, der Gleichung der Fläche 3ter Ordnung sei die Form

$$Y_1^3 + Y_2^3 + Y_3^3 + Y_4^3 + Y_5^3 + Y_6^3 = 0$$

gegeben, worin die $Y_i = 0$ sechs Ebenen darstellen und es sei

$$\sum Y_i = 0.$$

Man kann zeigen, dass sich die Gleichung der Fläche alsdann in die Form

$$(Y_2+Y_3)(Y_3+Y_1)(Y_1+Y_2)+(Y_5+Y_6)(Y_6+Y_4)(Y_4+Y_5)=0$$

bringen lässt und selbstverständlich auch in alle anderen dieser Form analogen, die aus ihr durch beliebige Vertauschung der

Indices abgeleitet werden können. Man erhält daher so viele Gleichungen, als es Arten gibt, sechs Elemente in zwei Gruppen von je 3 Elementen zu vertheilen, d. h. also 10.

Die 15 Ebenen $Y_i + Y_j = 0$ *sind dreifache Tangentialebenen der Fläche und sind zu je sechsen die Ebenen zweier bez derselben Fläche conjugirter Trieder.*

Die sechs Ebenen $Y_i = 0$ bilden ein sogenanntes *Polsechsflach* oder *polares Hexaeder* (Cremona).

Die 10 Paare der gegenüberliegenden Ecken des Polsechsflachs; d. h. z. B. die Punkte

$$Y_1 = 0,\ Y_2 = 0,\ Y_3 = 0 \quad \textit{und} \quad Y_4 = 0,\ Y_5 = 0,\ Y_6 =$$

sind Paare sich auf der Hesse'schen Kernfläche (vergl. § 2) *entsprechender Punkte.* Daher führt das Hexaeder den Name *polar*; denn die correspondirenden Punkte der Kernfläche sind derart, dass der Polarkegel des einen Punkts in Bezug auf die Fläche 3ter Ordnung seine Spitze in dem anderen Punkt hat.

Die gegenüberliegenden Ecken des Polsechsflachs sind auch die Ecken zweier conjugirter, aus den dreifachen Tangentialebenen der Fläche 3ter *Ordnung gebildeter Trieder.*

Offenbar schneiden sich die drei dreifachen Tangentialebenen

$$Y_h + Y_k = 0,$$
$$Y_i + Y_j = 0,$$
$$Y_l + Y_m = 0,$$

worin h, k, i, j, l, m eine Permutation der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 darstellen, *in derselben Geraden der Fläche.* Daraus folgt:

Die 15 dreifachen Tangentialebenen $Y_i + Y_j = 0$ *gehen durch 15 Gerade der Fläche.* Mithin:

Die übrigen 12 Geraden der Fläche bilden eine Doppelsechs (siehe oben); daraus ergibt sich, *dass jedem Polsechsflach ein Doppelsechs entspricht und umgekehrt.*

Es gibt 36 Polsechsflache.

Bemerkenswerth ist das folgende Theorem:

Zwei Polsechsflache bestimmen zwei ihnen eingeschriebene developpabele Flächen 3ter *Classe; diese letzteren haben für Tangentialebenen gemeinschaftlich, welche ein Sylvester'sches Pentaeder bilden.*

Weitere Untersuchungen über die Beziehungen zwischen dem Pentaeder und den Hexaedern findet man bei Beltrami *Rend. Ist. Lomb.*, 1879 und Franz Meyer, *Apolarität*, et Tübingen 1883.

Jede Fläche 3ter Ordnung mit einem Doppelpunkt enthält 6 urch diesen Doppelpunkt gehende Gerade und 15 andere Gerade; de der ersten 6 ist als die Vereinigung von zwei Geraden an- usehen; mithin gibt es auch 15 dreifach berührende, durch den oppelpunkt gehende Ebenen und 15 andere Ebenen, welche durch ie übrigen 15 Geraden gehen.

Die Configuration dieser letzten 15 Ebenen und 15 Geraden t der Configuration der 15 Geraden (und der von ihnen ge- ldeten Ebenen) ähnlich, welche übrig bleiben, wenn man von den 7 Geraden die 12 einer Doppelsechs hinwegnimmt.

Mit dieser Configuration in Verbindung mit den Configu- tionen der Pascal'schen Sechsecke (siehe Kap. 3, § 2) hat sich remona, *Mem. Lincei,* 1876, 1877 beschäftigt.

Die Fläche 3ter Ordnung mit zwei Doppelpunkten besitzt ne Gerade, welche die beiden Doppelpunkte verbindet, 8 Gerade, ie durch einen von ihnen gehen, und 7 andere Gerade.

Jede Fläche 3ter Ordnung mit drei Doppelpunkten enthält rei Gerade, welche die drei Doppelpunkte zu je zweien ver- nden, 6 durch einen von ihnen gehende Gerade und drei andere erade.

Jede cubische Fläche mit 4 Doppelpunkten enthält 6 Gerade, ie durch zwei von ihnen gehen und drei andere Gerade, die urch keinen der Doppelpunkte gehen.

Mit den Geraden der Fläche 3ter Ordnung haben sich zuerst ayley und Salmon, *Cambr. math. Journ.*, 4 und Steiner, relle, 53 beschäftigt. Auf sie folgten: Schläfli, *Quart. Journ.*, ; R. Sturm, *Flächen 3ter Ordn.*, Leipzig 1867; *Math. Ann.*, 23 nd Affolter, *Grunert's Archiv,* 56, welche speciell die *wind- hiefen Systeme* von Geraden studirten, dann Schröter, *Crelle,* 2 und Cremona, *Ist. Lomb.,* 1870, 1871; *Crelle,* 68.

Neuere Arbeiten über die Configuration der Geraden und der benen, wie über die Polyeder, die sich aus ihnen bilden lassen, nd von Bertini, *Ann. di mat.,* 12; Pascal, *Ann. di mat.,* 0, 21; *Ist. Lomb.,* 1892, 1893.

Die sogenannte *Schlaefli'sche Bezeichnung* für die 27 Geraden t die folgende:

Die Symbole

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6;$$

$$b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6$$

werden für die Geraden einer Doppelsechs benutzt, wobei je Gerade a_i, wie man weiss, keine andere a, dagegen alle b m Ausnahme von b_i trifft.

Bezeichnet man ferner mit c_{ij} die Schnittgerade der Ebene

$$a_i b_j,\ a_j b_i,$$

so sind diese c_{ij} die übrigen 15 Geraden. Zwei Gerade c, d einen Index gemeinschaftlich haben, *schneiden sich nicht*; zwei die keinen Index gemeinschaftlich haben, *schneiden sich*; je Gerade a (oder b) schneidet eine c, wenn der Index von a bez. einer der beiden Indices von c ist.

Eine andere Darstellung der 27 Geraden, die man Wesentlichen auch aus der vorstehenden ableiten kann, beste darin, sie einzeln den Geraden entsprechen zu lassen, welche je zweien acht Fundamentalpunkte 1, 2, ..., 8 verbinden, we man von diesen Verbindungslinien eine, z. B. (12), wegläs Man betrachtet dann zwei Gerade als sich schneidend oder nic je nachdem sie in Verbindung mit (12) ein Theil zweier Fun mentalfiguren (*Quadrupel, quaterne-zero*) sein können oder nic die entweder aus vier Geraden wie (12), (34), (56), (78) o aus vier anderen wie (12), (23), (34), (41) bestehen.

Man beachte, dass die Configuration der Geraden ei Fläche mit Doppelpunkten studirt werden kann, indem n zwei der Punkte dieser Figur sich einander nähern lässt, so d gewissermassen auch diese Figur Doppelpunkte erhält.

Um ferner die Configuration der reellen einer reellen Flä angehörigen Geraden zu untersuchen, genügt es, in dersel Figur zwei der Punkte oder vier etc. als conjugirt imaginär auszusetzen und daraus die nöthigen Consequenzen zu ziel Vergl. § 4.

Das Studium der Configuration der 27 Geraden mitt dieser Figur ist verwandt mit dem der 28 Doppeltangenten Plancurve 4ter Ordnung. Siehe darüber auch Geiser, *M Ann.*, 1.

§ 4. Classification der reellen allgemeinen Flächen 3ter Ordnung.

Die reellen Flächen 3ter Ordnung ohne Doppelpunkte la sich in Bezug auf die Realität oder Nichtrealität der auf il gelegenen Geraden classificiren.

Man erhält fünf Arten solcher Flächen, nämlich:

a) Alle Geraden sind reell; auch die dreifach berührenden nen sind dann sämmtlich reell; das Pentaeder ist reell.

b) 15 Gerade und 15 Ebenen, die zu je dreien durch eine le Gerade gehen, sind reell. Diese 15 Geraden sind die- gen, die übrig bleiben, wenn man von den 27 Geraden die einer Doppelsechs hinwegnimmt.

c) 7 Gerade und 5 Ebenen sind reell und die 5 Ebenen en sämmtlich durch dieselbe reelle Gerade. Vier andere ade sind imaginär, jede von ihnen geht aber durch einen len Punkt. Solche Gerade heissen *punktirt* (nach August, *sert.*, Berlin 1862; auch R. Sturm, *Fläch. 3. O.*, p. 242 ge- ucht diesen Ausdruck).

d) 3 Gerade und 7 Ebenen sind reell; die drei Geraden en in derselben Ebene; durch jede von ihnen gehen ausser ser Ebene noch andere 2 reelle Ebenen. Zwölf Gerade sind iginär und punktirt.

e) 3 Gerade und 13 Ebenen sind reell; die drei Geraden en in derselben Ebene; durch jede von ihnen gehen ausser ser Ebene noch 4 andere reelle Ebenen. Die übrigen 24 aden sind punktirt.

Diese Classification rührt von Schläfli her, *Quart. Journ.*, p. 55 und 110; *Phil. Trans.*, 153, p. 193, der auch die chen mit singulären Punkten studirte. Mit demselben Gegen- nd befassten sich auch Cremona; R. Sturm, l. c.; Klein, *th. Ann.*, 6 und Schläfli, *Ann. di mat.*, 5. Analytisch wurde Classification auch von August, l. c. durchgeführt.

In Zusammenhang mit den Betrachtungen in diesem Para- phen steht das Studium der Eigenschaften der Lage und der rm der cubischen Flächen der verschiedenen Arten. Zeuthen, *th. Ann.*, 8 benutzte den Satz, dass der Umfang einer iche 3ter Ordnung, die von einem ihrer Punkte auf eine ene projicirt wird, eine Curve 4ter Ordnung ist, um eine Art reographischer Projection der Fläche auf eine Doppelebene, h. auf zwei superponirte längs des Umfangs der Curve 4ter dnung vereinigte Ebenen, auszuführen und auf diese Art die ge der verschiedenen reellen Schalen der cubischen Flächen untersuchen. Siehe auch seinen Aufsatz in den *Math. Ann.*, p. 428 u. ff.

§ 5. Ebene Abbildungen der Flächen 3ter Ordnung.

Es lassen sich verschiedene ebene Abbildungen der cubisch Fläche denken.

Man stelle sich eine projective (ein-eindeutige) Zuordn zwischen drei linearen Systemen 3ter Stufe von Ebenen und Punktesystem des gewöhnlichen Raums derart vor, dass je Ebene eines Systems eine Ebene in jedem der beiden and und auch ein Punkt P des Raums entspricht und umgek jedem Punkt P des Raums drei Ebenen, in jedem der 3 Syst eine, entsprechen; *wenn P eine Ebene E beschreibt, so beschre die entsprechenden Ebenen drei Netze und ihr Schnittpunkt allgemeine Fläche 3ter Ordnung* (Grassmann, siehe § 1), *d Punkte also auf diese Art auf der Ebene E abgebildet wer*

Alle cubischen Flächen, welche in der vorstehenden W allen Ebenen des Raums entsprechen, gehen durch eine und selbe Raumcurve 6ter Ordnung; den Punkten dieser Curve sprechen in der Bildebene nicht Punkte, sondern Gerade.

Die sechs Punkte, in denen die Curve 6ter Ordnung Bildebene schneidet, entsprechen 6 Geraden $(a_1, \ldots, a_6)$ *der F 3ter Ordnung;* sie wurden von Cremona, *Fundamentalp* der ebenen Abbildung der Fläche S_3 genannt, und mit Ziffern 1, 2, ..., 6 bezeichnet.

Die 6 Kegelschnitte, welche durch fünf der Fundam punkte gehen, entsprechen anderen sechs Geraden $(b_1, \ldots, b_6$ *cubischen Fläche, und die 15 Geraden, welche die 6 Fu mentalpunkte zu je zweien verbinden, entsprechen den üb 15 Geraden von* S_3, (c_{rs}).

Die Geraden $(b_1, \ldots, b_6)$, *welche den 6 Kegelschnitte geordnet sind, und die Geraden* $(a_1, \ldots, a_6)$, *welche den 6 Pu entsprechen, bilden eine Schläfli'sche Doppelsechs.*

Einer ebenen auf S_3 *liegenden Curve 3ter Ordnung i der Ebene eine durch die sechs Fundamentalpunkte gehende 3ter Ordnung zugeordnet.*

Dem Kegelschnitt, welcher in einer durch eine Ger gehenden Ebene enthalten ist, entspricht eine durch die 6 F mentalpunkte gehende Curve 3ter Ordnung, die einen von Punkten zum Doppelpunkt hat.

Dem Kegelschnitt, welcher in einer durch eine Gerade b den Ebene liegt, ist eine durch einen Fundamentalpunkt g Gerade zugeordnet.

Dem Kegelschnitt, der in einer durch eine Gerade c_{rs} gehen-
Ebene gelegen ist, entspricht ein durch vier Fundamental-
ikte mit Ausnahme von r und s gehender Kegelschnitt.

Der gewundenen Curve von der Ordnung $3n$, welche der
nitt von S_3 mit einer Fläche n^{ter} Ordnung ist, entspricht eine
nal durch jeden Fundamentalpunkt gehende ebene Curve.

Einer Geraden der Ebene ist auf S_3 ein Kegelschnitt oder
e Raumcurve 3ter Ordnung zugeordnet, je nachdem die Gerade
rch einen Fundamentalpunkt geht oder nicht.

Einem Kegelschnitt der Ebene entspricht auf S_3 eine Raum-
ve vom Geschlecht 0 und der Ordnung 4, 5 oder 6, je nach-
n der Kegelschnitt durch 2, 1 oder 0 Fundamentalpunkte geht.

Diese Abbildung rührt von Clebsch, *Crelle,* 65 und Cre-
ona, l. c. her. Eine andere ebene Abbildung der cubischen
äche hat Clebsch, *Math. Ann.,* 1 mitgetheilt; es ist dieselbe,
n der am Ende des § 7, Kap. 9 die Rede war. Siehe auch
ayley, *London math. Soc.,* 3.

Kapitel XII.

Die Flächen 4ter Ordnung.

§ 1. Allgemeines. Flächen mit Doppelpunkten und Doppellinien.

Die allgemeine Fläche 4ter Ordnung ist von der 36ten Clas die Ordnung des ihr umschriebenen Kegels, dessen Spitze in ein beliebigen Punkt des Raums liegt, ist die 12te; es gibt 24 Ri kehrerzeugende dieses Kegels; zwölf von ihnen sind doppelt.

Die Ordnung der parabolischen Curve ist die 32te.

Die allgemeine Gleichung der Fläche 4ter Ordnung hä von 34 nicht homogenen Coefficienten ab.

Die Fläche 4ter Ordnung kann nicht mehr als 16 Dop punkte haben.

Die Fläche kann, ohne eine Regelfläche zu sein, eine Dop gerade, einen Doppelkegelschnitt, einen Cuspidalkegelschnitt (ve Kap. 9, § 4) *und drei Doppelgerade besitzen, die sich in ei Punkt schneiden und nicht in derselben Ebene liegen.*

Eine Fläche 4ter Ordnung, welche zur Doppellinie eine r ebene Linie hat (die aber nicht die Gesammtheit von drei nich einer Ebene liegenden und sich in einem Punkt treffenden Gera sein darf), ist immer eine Regelfläche.

Die höchste Singularität, die eine Fläche 4ter Ordnung ha kann, ist eine dreifache Gerade; die Fläche ist dann nothwendi weise eine Regelfläche.

Wenn die Fläche 16 Doppelpunkte hat, so ist der ihr schriebene Kegel, dessen Spitze in einem der Doppelpunkte l von der 6ten Ordnung und zerfällt in 6 Ebenen.

Die allgemeinen Flächen 4ter Ordnung sind noch nich eingehend untersucht worden, wie die entsprechenden cubis Flächen. Man hat sich mehr mit den speciellen Flächen Ordnung, die durch die Eigenschaft charakterisirt sind, das Doppelpunkte oder Doppellinien enthalten, und mit den R flächen 4ter Ordnung beschäftigt.

Am bemerkenswerthesten von den bis jetzt studirten Flächen ter Ordnung sind die folgenden:

Die Kummer'sche Fläche, welche 16 Doppelpunkte enthält, ie eine merkwürdige Configuration bilden; ferner eine andere attung von Flächen, die auch zuerst von Kummer untersucht urden, und die durch die Eigenschaft ausgezeichnet sind, unendch viele Kegelschnitte zu besitzen; unter ihnen sind hervorheben: die Fläche 4ter Ordnung mit Doppelkegelschnitt und die ömerfläche Steiner's; schliesslich die Regelflächen, von denen Creona und Clebsch eine vollständige Classification gegeben haben.

In den folgenden Paragraphen werden wir diese verschieenen Flächen, jede für sich, behandeln.

Wir geben zunächst hier eine Tabelle der charakteristischen ahlen der allgemeinen Fläche 4ter Ordnung, der Flächen mit oppelkegelschnitten, mit Cuspidalkegelschnitten und mit 12 oppel- oder Knotenpunkten. Vergl. Salmon-Fiedler, *Anal. eom. d. Raumes,* 2, §§ 512—516.

	Allgemeine Fläche 4ter Ordnung	Fläche mit 12 Knotenpunkten	Fläche mit Doppelkegelschnitt	Fläche mit Cuspidalkegelschnitt
$a = a'$	12	12	8	6
δ	12	24	4	0
$\varkappa$	24	24	12	8
$\varkappa'$	36	12	12	6
λ'	24	24	12	8
b'	480	24	26	0
k'	102400	196	320	0
t'	3200	0	40	0
ϱ'	320	32	36	0
c'	96	24	24	8
h'	4016	200	180	24
r'	128	56	36	8
σ'	32	32	16	8
β'	320	32	52	0

§ 2. Die Flächen 4ter Ordnung mit Doppelpunkten.

Die Existenz eines Doppelpunktes ist für eine Fläche 4te Ordnung vier einfachen Bedingungen gleichwerthig; es könnt daher, weil eine solche Fläche von 34 Coefficienten abhängt scheinen, als ob sie höchstens acht *willkürlich festgesetzte* Doppel punkte enthalten könnte; man erkennt aber, dass dieses nich möglich ist, und *dass, wenn eine Fläche 4ter Ordnung nich degenerirt ist und acht Doppelpunkte besitzt, diese in einer speciell Configuration zu einander stehen müssen und dass nur sieben vo ihnen willkürlich sind.* Cayley, *Proc. Lond. math. Soc.*, 3 = *Col math. papers*, 7, p. 133; ferner 7, p. 256 und 7, p. 264.

Von den Flächen 4ter Ordnung mit Doppelpunkten ist, wi wir schon gesagt haben, die Kummer'sche Fläche mit 1 solchen Punkten von besonderer Bedeutung; Cayley, l. c., ha auch die Flächen mit einer geringeren Anzahl von Doppe punkten studirt, während Kummer schon vorher auf die m 11, 12, 13, 14, 15 Doppelpunkten bei Gelegenheit seiner Unte suchungen über die Strahlensysteme oder Congruenzen 2ter Ordnun (vergl. Kap. 14) aufmerksam gemacht hatte, *Berl. Abh.*, 186 Die Untersuchung der von Kummer behandelten Flächengattunge ist dann von Cayley l. c. wieder aufgenommen worden.

Um die Gleichung einer Fläche 4ter Ordnung mit 4 g gebenen Doppelpunkten zu erhalten, legt man 6 Flächen 2^t Ordnung $X_1 = 0, \ldots, X_6 = 0$ durch diese Doppelpunkte; *ei homogene Function 2ten Grads der X, gleich Null gesetzt, ste dann eine Fläche 4ter Ordnung der verlangten Art dar. S enthält 18 unabhängige Constante.*

Beträgt die Anzahl der gegebenen Punkte 5, so legt ma fünf Flächen 2ter Ordnung $X_i = 0$ durch diese Punkte; *eine For die in den X vom 2ten Grad ist, gleich Null gesetzt, wird da die Fläche 4ter Ordnung mit den fünf Doppelpunkten darstelle sie hat 14 Constanten.*

Wenn sechs Punkte gegeben sind, *so lautet die Gleichu der allgemeinen Fläche 4ter Ordnung, welche diese sechs Punkte Doppelpunkten hat:*

$$(X_1, X_2, X_3, X_4)^2 + \lambda J(X_1, X_2, X_3, X_4) = 0;$$

sie enthält genau 10 Constante; die $X_i = 0$ sind die Gl chungen von vier durch die gegebenen sechs Punkte gehend Flächen 2ter Ordnung; $(X_1, X_2, X_3, X_4)^2$ stellt eine Form 2^t

rads in den X dar und J die Jacobische Fläche des Systems r vier Flächen 2ter Ordnung.

Von den Flächen mit sechs Doppelpunkten ist diejenige sonders bemerkenswerth, deren Gleichung

$$J(X_1, X_2, X_3, X_4) = 0$$

utet, die also die Jacobi'sche Fläche des Systems der vier Flächen er Ordnung ist.

Sie wird die Weddle'sche Fläche genannt, weil sie dieser utor zuerst untersucht hat, *Cambr. Journ.*, 5, 1850, *und ist r Ort der Spitzen der Kegel 2ter Ordnung, welche durch sechs unkte des Raums gehen.*

Die Weddle'sche Fläche enthält 25 Gerade, welche die sechs unkte zu je zweien verbinden, und die 10 Geraden, in welchen ie durch drei der Punkte gehende Ebene die Ebene schneidet, elche durch die drei übrigen Punkte gelegt wird.

Der Berührungskegel, dessen Spitze in einem Doppelpunkt egt, schneidet die Fläche in den fünf Geraden, welche diesen Punkt it den übrigen fünf verbinden und in der Raumcurve 3ter Ordung, welche durch die sechs Punkte des Raums individualisirt wird.

Die Weddle'sche Fläche wurde auch von Cayley, *Compt. end.*, 52, 1861; Hierholzer, *Math. Ann.*, 2, 4; Hunyady, *relle*, 92; Caspary, *Compt. Rend.*, 1891; etc. studirt. *Sie ist ine Fläche, deren Punkte Coordinaten haben, die sich durch yperelliptische Funktionen zweier Parameter ausdrücken lassen.*

Cayley, *Proc. Lond. math. Soc.*, 4 untersuchte auch andere lächen, deren geometrische Definition analog ist, die aber nicht ehr von der 4ten Ordnung sind.

Um die allgemeinste Gleichung der Fläche 4ter Ordnung nit 7 Doppelpunkten aufzustellen, legt man drei Flächen 2ter rdnung $X_1 = 0$, $X_2 = 0$, $X_3 = 0$ durch diese Doppelpunkte, estimmt dann eine Fläche 3ter Ordnung $Y = 0$, welche durch lie sämmtlichen 7 Punkte geht und vier von ihnen zu Doppelunkten hat und legt schliesslich die Ebene $Z = 0$ durch die rei übrigen. *Die Gleichung*

$$(X_1, X_2, X_3)^2 + \lambda \cdot YZ = 0$$

nthält sechs Constanten und stellt die verlangte Fläche dar.

Um die Gleichung der Fläche 4ter Ordnung mit acht (*nicht willkürlichen*) Doppelpunkten zu erhalten, kann man auf die folgende Art verfahren: man betrachtet drei Flächen 2ter Ordnung

$$X_1 = 0, \; X_2 = 0, \; X_3 = 0,$$

welche sich in acht Punkten schneiden, bildet dann eine quadratische homogene Function der drei X und setzt diese Function gleich Null. *Man erhält so eine Fläche 4ter Ordnung mit acht auf drei Flächen 2ter Ordnung liegenden Doppelpunkten.* Sie ist übrigens nicht der allgemeine Typus einer Fläche 4ter Ordnung mit 8 Doppelpunkten; *es existirt nach Cayley noch ein anderer Typus.*

Studien über die zuletzt genannten Flächen sind von Cayley *Quart. Journ.*, 10, p. 34; 11, p. 111; *Coll. Math. Pap.*, 7, p. 304; 8, p. 25.

Es lassen sich dann auch Flächen 4ter Ordnung mit 9 und 10 Doppelpunkten auffinden, von denen 7 willkürlich gewählt sind.

Bemerkenswerth aber ist der Satz:

Eine Fläche 4ter Ordnung kann nicht mehr als 10 Doppelpunkte haben, von denen 7 willkürlich gewählt sind.

Eine Fläche 4ter Ordnung mit 10 Doppelpunkten ist das sogenannte *Symmetroid*, dessen Gleichung auf die folgende Art entsteht.

Man habe 10 lineare Funktionen der Variabelen

$$f_{11},\ f_{12},\ \cdots,\ f_{44}$$

mit den Bedingungen $f_{ji} \equiv f_{ij}$, und bilde die *symmetrische* Determinante

$$\begin{vmatrix} f_{11}, & f_{12}, & f_{13}, & f_{14} \\ f_{12}, & f_{22}, & f_{23}, & f_{24} \\ f_{13}, & f_{23}, & f_{33}, & f_{34} \\ f_{14}, & f_{24}, & f_{34}, & f_{44} \end{vmatrix}.$$

Sie liefert, gleich Null gesetzt, die Gleichung des *Symmetroid*.

Die Minoren 3ter Ordnung der Determinante ergeben, gleich Null gesetzt, cubische Flächen, die 10 Punkte gemeinschaftlich haben; diese Punkte sind die Doppelpunkte des Symmetroids.

Der dem Symmetroid umschriebene Kegel, dessen Spitze in einem Doppelpunkt liegt, zerfällt in zwei Kegel 3ter Ordnung, welche sich in 9 Geraden schneiden, die diesen Doppelpunkt mit den übrigen neun verbinden.

Wenn in einer Fläche 4ter Ordnung mit 10 Doppelpunkten einer von diesen die im vorigen Theorem angegebene Eigenschaft besitzt, so haben auch die übrigen diese Eigenschaft.

Ausser dem Symmetroid gibt es noch eine andere Fläche 4ter Ordnung mit 10 Doppelpunkten, welche jedoch nicht die Eigen-

schaft hat, dass der der Fläche umschriebene Kegel 6ter Ordnung, dessen Spitze in einem der Doppelpunkte liegt, in zwei Kegel 3ter Ordnung zerfällt.

Die Hesse'sche Kernfläche der cubischen Fläche ist ein Symmetroid; in der That sind dann die f die zweiten Derivirten der linken Seite der Gleichung der Fläche 3ten Grads.

Ist $f_{11} = 0$, so hat das Symmetroid noch einen 11ten Doppelpunkt, ist auch $f_{22} = 0$, so hat es noch einen 12ten, für $f_{33} = 0$ einen 13ten und schliesslich für $f_{44} = 0$ noch einen 14ten Doppelpunkt.

Man hat die Flächen 4ter Ordnung mit 11, 12, 13, 14, 15 Doppelpunkten classificirt, indem man die ihnen umschriebenen Kegel, deren Spitze in einem Doppelpunkt liegt, in Betracht zog; je nachdem diese Kegel 6ter Ordnung auf die eine oder andere Weise in Kegel niedrigerer Ordnung zerfallen, hat man die Flächen 4ter Ordnung in verschiedene Arten getrennt. Solche Studien sind von Kummer, Cayley, l. c. und spätere von Rohn in einer von der Jablonowski'schen Ges. zu Leipzig im Jahre 1886 preisgekrönten Abhandlung; siehe auch *Math. Ann.*, 29, 1887. Cayley und die englischen Autoren haben, wie es ihre Gewohnheit ist, zahlreiche und complicirte Benennungen für einige der oben genannten Flächen, speciell für die mit 8, 9, 10 Doppelpunkten eingeführt; es scheint, dass diese Benennungen eher dazu dienen, die Sache zu verwickeln, als sie einfacher zu machen.

Ein Theil der Flächen mit 11, 12, ..., 15 Doppelpunkten kann auch als Brennfläche einer Congruenz 2ter Ordnung aufgefasst werden. Siehe weiter unten Kap. 14.

§ 3. Die Kummer'sche Fläche.

Wie schon gesagt wurde, wird *die Kummer'sche Fläche* als Fläche 4ter Ordnung mit 16 isolirten Doppelpunkten definirt.

Sie ist 4ter Classe; ihre allgemeine Gleichung enthält 18 unabhängige Constante.

Der die Fläche berührende Kegel 6ter Ordnung, dessen Spitze in einem Doppelpunkt liegt, zerfällt in 6 Ebenen.

Jede dieser 6 Ebenen berührt die Fläche längs eines Kegelschnitts, auf welchem noch andere 5 Doppelpunkte liegen.

Es gibt 16 solche singuläre Ebenen; man hat also 16 singuläre Punkte und 16 singuläre Ebenen, die sich durch die wichtige Eigenschaft auszeichnen, dass jede Ebene durch 6 auf

einem Kegelschnitt liegende Doppelpunkte geht und dass durch jeden Punkt 6 Ebenen gehen.

Die Kummer'sche Fläche wird besonders in der *Liniengeometrie* benutzt, sie kann als *Brennfläche einer Congruenz* 2ter *Ordnung und* 2ter *Classe* definirt werden, Kummer, *Berl. Abh.*, 1866, oder auch als *Singularitätenfläche des allgemeinen quadratischen Complexes,* oder als *Singularitätenfläche unendlich vieler confocaler quadratischer Complexe,* Klein, *Math. Ann.*, 2. Siehe weiter unten Kap. 14 über die *Geometrie der Geraden.*

Eine wichtige Eigenschaft dieser Fläche besteht darin, dass sie in sechs Polaritäten reciprok zu sich selbst ist.

Der Gleichung der Kummer'schen Fläche haben Kummer selbst, Cayley und Andere verschiedene Formen gegeben.

Wenn $X_1 = 0$, $X_2 = 0$, $X_3 = 0$, $X_4 = 0$ *die Gleichungen von 4 singulären Ebenen sind, deren 4 Schnittpunkte zugleich auch Knotenpunkte der Fläche sind, so lässt sich die Gleichung schreiben:*

$$\Phi^2 = 16 k X_1 X_2 X_3 X_4,$$

worin k *eine Constante bezeichnet und* Φ *eine in den* X *quadratische Form darstellt, nämlich*

$$\begin{aligned}\Phi = {} & X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 + 2a(X_2 X_3 + X_1 X_4) + \\ & + 2b(X_3 X_1 + X_2 X_4) + 2c(X_1 X_2 + X_3 X_4),\end{aligned}$$

$$k = a^2 + b^2 + c^2 - 2abc - 1,$$ Kummer

Eine irrationale Form der Gleichung dieser Fläche ist die folgende, Cayley, *Crelle,* 73, p. 292; *Coll. Math. Pap.*, 7, p. 126:

$$\begin{aligned}& \sqrt{\alpha x_1 \left(\gamma' \gamma'' x_2 - \beta' \beta'' x_3 - \frac{x_4}{\alpha}\right)} + \\ & + \sqrt{\beta x_2 \left(\alpha' \alpha'' x_3 - \gamma' \gamma'' x_1 - \frac{x_4}{\beta}\right)} + \\ & + \sqrt{\gamma x_3 \left(\beta' \beta'' x_1 - \alpha' \alpha'' x_2 - \frac{x_4}{\gamma}\right)} = 0,\end{aligned}$$

mit den Bedingungen:

$$\begin{aligned}\alpha + \beta + \gamma &= 0, \\ \alpha' + \beta' + \gamma' &= 0, \\ \alpha'' + \beta'' + \gamma'' &= 0.\end{aligned}$$

Andere Formen erhält man, wenn das System $\alpha, \beta,$ cyklisch mit dem System α', β', γ' oder dem System $\alpha'', \beta'', \gamma$ vertauscht wird.

Auf rationale Form reducirt, lautet die vorstehende Gleichung

$$x_4^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_2x_3 - 2x_3x_1 - 2x_1x_2) +$$
$$+ 2x_4\{\alpha\alpha'\alpha''(x_2^2x_3 - x_3^2x_2) + \beta\beta'\beta''(x_3^2x_1 - x_1^2x_3) +$$
$$+ \gamma\gamma'\gamma''(x_1^2x_2 - x_2^2x_1) + \theta x_1x_2x_3\} +$$
$$+ (\alpha\alpha'\alpha''x_2x_3 + \beta\beta'\beta''x_3x_1 + \gamma\gamma'\gamma''x_1x_2)^2 = 0,$$

worin der Kürze wegen

$$\theta = (\beta - \gamma)\alpha'\alpha'' + (\gamma - \alpha)\beta'\beta'' + (\alpha - \beta)\gamma'\gamma''$$

gesetzt wurde.

Man beachte, dass auch in diesem Ausdruck für θ die erwähnten cyklischen Vertauschungen gemacht werden können, ohne dass dadurch der Werth von θ verändert wird.

Die 16 singulären Ebenen sind durch die Gleichungen gegeben:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0,$$

$$\frac{x_1}{\alpha} + \frac{x_2}{\beta} + \frac{x_3}{\gamma} = 0,$$

$$\frac{x_1}{\alpha'} + \frac{x_2}{\beta'} + \frac{x_3}{\gamma'} = 0,$$

$$\frac{x_1}{\alpha''} + \frac{x_2}{\beta''} + \frac{x_3}{\gamma''} = 0,$$

$$\gamma'\gamma''x_2 - \beta'\beta''x_3 - \frac{x_4}{\alpha} = 0,$$

$$\gamma''\gamma x_2 - \beta''\beta x_3 - \frac{x_4}{\alpha'} = 0,$$

$$\gamma\gamma'x_2 - \beta\beta'x_3 - \frac{x_4}{\alpha''} = 0,$$

$$\alpha'\alpha''x_3 - \gamma'\gamma''x_1 - \frac{x_4}{\beta} = 0,$$

$$\alpha''\alpha x_3 - \gamma''\gamma x_1 - \frac{x_4}{\beta'} = 0,$$

$$\alpha\alpha'x_3 - \gamma\gamma'x_1 - \frac{x_4}{\beta''} = 0,$$

$$\beta'\beta''x_1 - \alpha'\alpha''x_2 - \frac{x_4}{\gamma} = 0,$$

$$\beta''\beta x_1 - \alpha''\alpha x_2 - \frac{x_4}{\gamma'} = 0,$$

$$\beta\beta'x_1 - \alpha\alpha'x_2 - \frac{x_4}{\gamma''} = 0.$$

Eine andere Form der Gleichung der Kummer'schen Fläche ist die folgende (Rohn, l. c. und *Math. Ann.*, 18)*):

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 + A x_1 x_2 x_3 x_4 - 2A_{3456}(x_1^2 x_2^2 + x_3^2 x_4^2) - \\ - 2A_{5612}(x_1^2 x_3^2 + x_2^2 x_4^2) - 2A_{1234}(x_1^2 x_4^2 + x_2^2 x_3^2) = 0,$$

worin

$$A = \frac{8}{(k_1 - k_2)(k_3 - k_4)(k_5 - k_6)}\{k_1 k_2(k_3 + k_4 - k_5 - k_6) + \\ + k_3 k_4(k_5 + k_6 - k_1 - k_2) + k_5 k_6(k_1 + k_2 - k_3 - k_4),$$

$$A_{ijhl} = \frac{(k_i - k_h)(k_j - k_l) + (k_i - k_l)(k_j - k_h)}{(k_i - k_j)(k_h - k_l)} \text{ ist.}$$

Die Coefficienten dieser Gleichung hängen, wie man sieht, von den sechs Grössen k ab, welche sich als die Wurzeln einer binären Form 6ter Ordnung auffassen lassen. Daraus erhellt die Möglichkeit, eine Beziehung zwischen den Kummer'schen Flächen und den binären Formen 6ter Ordnung herzustellen; es ergibt sich in der That, dass diese Fläche in besonderer Verbindung mit den hyperelliptischen Functionen vom Geschlecht 2 in Bezug auf eine binäre Form 6ter Ordnung steht.

Klein, *Math. Ann.*, 5 war der erste, der erkannte, dass man die Coordinaten eines Punktes der Kummer'schen Fläche durch vier specielle hyperelliptische Functionen von zwei Argumenten ausdrücken könne; auf ihn folgten die diesbezüglichen Arbeiten von Cayley, *Crelle*, 83; Borchardt, ib., id.; Weber, ib., 84; Rohn, *Math. Ann.*, 15, 18; Reichardt, *Nova acta der Leop. Carol. Ac.*, 50, Halle 1887; etc.

Wir lassen hier einige Angaben darüber folgen: Es gibt, wie man weiss, 16 ϑ-Functionen vom Geschlecht 2 (vergl. *Repert.*, 1, Kap. 17, § 3); jeder von ihnen entspricht eine *Charakteristik*; solcher Charakteristiken sind 10 gerade und 6 ungerade vorhanden (ebenda p. 455). Durch die Art der Gruppirung dieser Charakteristiken unterscheiden sich die sogenannten Göpel'schen (*Crelle*, 35) und Rosenhain'schen (*Mém. des sav. étr.*, 11, Paris 1846) Quadrupel. Ein Göpel'sches Quadrupel (es existiren ihrer 60), ist ein System von vier Charakteristiken, die entweder *alle gerade*, oder von denen *zwei gerade und zwei ungerade* sind und deren Summe Null ist. Ein Rosenhain'sches Quadrupel (es gibt ihrer 80) ist dagegen ein System von vier Charakte-

*) Man beachte, dass auf p. 142 der citirten Rohn'schen Arbeit dem Coefficienten A von $x_1 x_2 x_3 x_4$ die Zahl 4 statt 8 zugeordnet ist.

stiken, deren Summe wieder Null ist, von denen aber entweder *ne ungerade und drei gerade* oder *drei ungerade und eine rade* sind. Es gilt dann der Satz:

Zwischen den Quadraten der vier den Charakteristiken eines öpel'schen oder Rosenhain'schen Quadrupels entsprechenden ϑ-unctionen besteht immer eine rationale homogene Relation 4ten rads; und, nimmt man diese ϑ² zu homogenen Coordinaten eines unkts des Raums, so stellt eine solche Relation eine Kummer'sche läche dar. Im Fall des Göpel'schen Quadrupels sind die Ebenen es Fundamentaltetraeders der Coordinaten vier singuläre Ebenen er Fläche, jedoch ist keine Ecke dieses Tetraeders ein Knoten er Fläche; bei dem Rosenhain'schen Quadrupel dagegen sind die ier Ebenen des Tetraeders der Coordinaten wieder vier singuläre Ebenen, die vier Ecken aber vier singuläre Punkte.

Bei dieser Darstellung entsprechen die übrigen ϑ² jeder der nderen singulären Ebenen.

Zu einer weiteren Gleichung der Kummer'schen Fläche kann man auch von einem anderen Standpunkt aus gelangen. Werden nämlich zu homogenen Coordinaten eines Punkts des Raums gewisse vier von Klein mit Σ bezeichnete hyperelliptische Functionen gewählt, so erhält man eine Gleichung der Fläche, deren Coefficienten *rationale Invarianten* einer binären Form 6ter Ordnung sind, welche auf die oben angegebene Art der Kummer'schen Fläche entspricht; eine solche Gleichung pflegt man *die rationale Gleichung der Fläche* zu nennen. Näheres darüber findet man bei Pascal, *Ann. di mat.*, 18, 19.

Die Configuration der 16 singulären Punkte und Ebenen der Kummer'schen Fläche ist vielfach untersucht worden. Wir citiren Caporali, *Lincei*, 1878; Schröter, *Crelle*, 100; De Paolis, *Lincei*, 1890.

Die 16 zu je zweien conjugirten Fundamentalpunkte erzeugen ebenso, wie die sich zu je zweien schneidenden Fundamentalebenen 120 Gerade, die Caporali *die Geraden R* nannte.

Die 16 Fundamentalpunkte liegen zu je dreien in 240 nicht fundamentalen Ebenen (den Ebenen Π) und die 16 Fundamentalebenen liefern zu je dreien 240 nicht fundamentale Punkte (die Punkte P).

Die Ebenen Π gehen zu je 6 durch die Geraden R und die Punkte P liegen zu je 6 in den letzteren. Umgekehrt gehen

die Geraden R zu je dreien durch die Punkte P und liegen z je dreien in den Ebenen Π.

Die Punkte P sind zu je 45 in den Fundamentalebe gelegen und die Ebenen Π gehen zu je 45 durch die Fund mentalpunkte.

Es gibt 80 Tetraeder, deren Ecken und Seitenflächen Fund mentalpunkte und -Ebenen sind; sie entsprechen den 80 Rose hain'schen Quadrupeln von Charakteristiken; siehe oben.

Es gibt 60 Tetraeder, deren Seitenflächen Fundamente ebenen und deren Ecken Punkte P sind; sie entsprechen den Göpel'schen Quadrupeln.

Aus dem letzten Satz folgt dann selbstverständlich d *duale* Eigenschaft.

Die 240 Punkte P und Ebenen Π bilden 15 neue Kumme sche Configurationen.

Schneidet man die Kummer'sche Fläche mit einer Ebene, *kann man* eine allgemeine ebene Curve 4ter Ordnung erhalte es gelten darüber die Sätze:

Durch jede allgemeine ebene Curve 4ter Ordnung gehen o Kummer'sche Flächen.

Die 16 singulären Ebenen werden von der schneidend Ebene in 16 Doppeltangenten der Curve 4ter Ordnung getroff Diese 16 Doppeltangenten sind mit denen identisch, die üb bleiben, wenn von den 28 die zwölf nicht gemeinsamen Dopp tangenten zweier Aronhold'scher Systeme weggenommen werd welche eine einzige Gerade gemeinsam haben; mit anderen Wort diese 16 Doppeltangenten bilden unter sich eine ähnliche Co figuration, wie die 16 Doppeltangenten einer ebenen Curve 4 Ordnung mit einem Doppelpunkt, wenn man die 6 von d Doppelpunkt ausgehenden Tangenten nicht in Rechnung zie Siehe Kap. 8, S. 198.

Die vier Doppeltangenten, die aus dem Schnitt eines Göp schen Tetraeders (siehe oben) *hervorgehen, sind vier Doppelta genten, durch deren 8 Berührungspunkte ein Kegelschnitt geht.*

Auf diese Beziehungen zwischen den Doppeltangenten Curve 4ter Ordnung und den singulären Punkten und Eben der Kummer'schen Fläche gründen sich einige neuere Arbeit von Ciani, *Ann. di mat.*, (3), 2; *Rend. Ist. Lomb.*, 1898.

Es lässt sich eine Bezeichnungsart für die 16 singulär Ebenen und Punkte der Kummer'schen Fläche ermitteln:

braucht man für eine der Ebenen das Symbol 0 und für die sechs auf ihr gelegenen Punkte die Symbole 1, 2, 3, 4, 5, 6, *so lassen sich die übrigen 15 Ebenen durch die Doppelsymbole* 12, 13, 14, ..., 56 *und die übrigen 10 Fundamentalpunkte durch die dreizähligen Symbole*

$$\binom{123}{456}, \quad \binom{124}{356}, \ldots$$

darstellen.

Durch den Punkt $\binom{123}{456}$ *gehen die sechs Ebenen* 12, 23, 31, 45, 56, 64 *durch den Punkt* (1) *dagegen die sechs Ebenen* (0), (12), (13), (14), (15), (16).

Eine andere Bezeichnungsart für die 16 singulären Ebenen geht aus der obenerwähnten Beziehung zwischen ihnen und den Charakteristiken vom Geschlecht 2 hervor.

Legt man nämlich jeder Ebene das Symbol $(abcd)$ bei, worin a, b, c, d keine anderen Werthe als 0 und 1 annehmen können (und der grösseren Einfachheit wegen die Charakteristik mit $(abcd)$ statt mit $\binom{ab}{cd}$ bezeichnet wird), so werden die 16 Ebenen durch die Symbole

(0000), (1000), (0100), (1100),
(0010), (1010), (0110), (1110),
(0001), (1001), (0101), (1101),
(0011), (1011), (0111), (1111) dargestellt.

Die sechs sich in einem Punkt schneidenden Ebenen bestehen aus den drei Ebenen, welche sich in dieser Tabelle mit einem gegebenen Element in derselben Horizontalreihe befinden, und den drei anderen, die mit dem nämlichen Element in derselben Verticalreihe liegen.

Sechs sich in einem Punkt schneidende Ebenen werden daher mit

$(a, b, c, d + 1)$,
$(a, b, c + 1, d)$,
$(a, b, c + 1, d + 1)$,
$(a + 1, b, c, d)$,
$(a, b + 1, c, d)$,
$(a + 1, b + 1, c, d)$ *bezeichnet.*

Die Anzahl der Substitutionen der Stubstitutionengruppe welche die Configuration unverändert lassen, beträgt 6! 16.

Die Gleichung 16ten Grads, von welcher die Bestimmung de 16 singulären Ebenen oder Punkte der Kummer'schen Fläche ab hängt, wird nach Auflösung einer Gleichung 6ten Grads ein Abel'sche Gleichung und lässt sich, nachdem dies geschehen, durc Auflösung von vier Gleichungen 2ten Grads lösen. Jordan.

Mit diesen Problemen hat sich Jordan beschäftigt, *Crell* 70; siehe auch seinen *Traité des subst.*, Paris 1870.

Die Haupttangentencurven (Asymptotenlinien)) auf d Kummer'schen Fläche sind im Allgemeinen Curven 16ter Or nung und 16ter Classe.*

Sie haben 16 Spitzen in den 16 singulären Punkten d Fläche, 16 stationäre Ebenen, welche die singulären Ebenen d Fläche sind, und 96 stationäre Tangenten. Siehe Kap. 9, §

Ihr Rang r ist der 48te, die Anzahl ihrer scheinbar Doppelpunkte beträgt 72, die Ordnung der Doppelcurve der dev loppabelen Fläche ist die 952te; sie sind vom Geschlecht 17.

Es gibt 6 ausgezeichnete Haupttangentencurven, deren Ordnung und Classenzahl sich auf die Hälfte, also auf 8, reduciren; jede v ihnen ist doppelt zu rechnen. Sie haben keine Spitzen und stati nären Ebenen und besitzen 40 stationäre Tangenten; ihr Ra ist der 24te, die Anzahl ihrer scheinbaren Doppelpunkte 16, d Ordnung der Doppelcurve der Developpabelen die 200te; sie si vom Geschlecht 5.

Durch die Haupttangentencurven einer Kummer'schen Fläc geht ein Büschel von Flächen 4ter Ordnung. Reye.

Die parabolische Curve der Kummer'schen Fläche ist ei Curve 32ter Ordnung und zerfällt in 16 Kegelschnitte, welc identisch mit den in den 16 singulären Ebenen liegenden Keg schnitten sind.

Mit den Haupttangentencurven der Kummer'schen Fläc haben sich speciell Klein und Lie, *Math. Ann.*, 23; Rey *Crelle*, 98 und Segre an demselben Ort beschäftigt.

---

*) Die Haupttangentencurven sind Linien, bei denen die culationsebene in jedem ihrer Punkte mit der Berührungsebene die Fläche zusammenfällt (siehe weiter unten Kap. 16). Die T genten an die Haupttangentencurve sind Gerade, welche die Fläc osculiren.

Ueber die Classification der Kummer'schen Flächen auf rund der Realität oder Nicht-Realität der singulären Punkte nd Ebenen ist eine Arbeit von Rohn, *Math. Ann.*, 18 voranden. Weiler, *Math. Ann.*, 6 dagegen classificirt sie nach en besonderen Eigenschaften, die sie annehmen, wenn einige er 16 singulären Punkte sich vereinigen. Beide gehen von der etrachtung der 6 Werthe $k_1, \ldots, k_6$, den Wurzeln einer Form ter Ordnung, aus, die, wie wir oben gesagt haben, in Beziehung ur Gleichung der Kummer'schen Fläche stehen; wenn man animmt, diese 6 Werthe specialisiren sich in Bezug auf ihre ealität oder Nicht-Realität und in Bezug auf ihre Grösse, so rgeben sich alle Fälle, die möglich sind.

Wir geben hier einige der Rohn'schen Resultate an:

I. Die sechs Grössen k sind reell.
   a) Die Kummer'sche Fläche hat 16 reelle singuläre Punkte und 16 reelle singuläre Ebenen.
   b) Die Fläche ist reell, aber alle ihre singulären Punkte und Ebenen sind imaginär. Betrachtet man in einer Berührungsebene an die Fläche die Schnittcurve 4ter Ordnung, so sind die sechs von dem Doppelpunkt an diese Curve gezogenen Tangenten sämmtlich reell.
   c) Die Fläche ist imaginär und ihre sämmtlichen singulären Punkte und Ebenen sind imaginär.

II. Zwei der Grössen k sind conjugirt imaginär und die übrigen reell.
   a) Die Fläche hat 8 reelle singuläre Punkte und ebensoviele reelle singuläre Ebenen.
   b) Die Fläche ist reell, aber ihre sämmtlichen singulären Punkte und Ebenen sind imaginär. Sie ist jedoch mit der unter I, b aufgeführten nicht identisch, weil von den sechs in I, b definirten Tangenten vier reell und zwei imaginär sind.

III. Zwei Paare der Grössen k sind conjugirt imaginär, die übrigen beiden k reell.

Die Fläche hat 4 reelle singuläre Punkte und 4 reelle singuläre Ebenen; jede der letzteren geht durch 2 reelle Punkte und speciell gehen zwei Ebenen durch die nämlichen beiden Punkte und die übrigen 2 durch die beiden anderen Punkte.

IV. Die sechs Grössen k sind zu je zweien conjugirt ima ginär.

a) Die Fläche ist reell und hat 4 reelle singulär Punkte und 4 ebensolche Ebenen. Sie ist jedo anders gestaltet, wie die Fläche in dem Fall II weil keine reelle Ebene durch einen reellen Punk geht.

b) Die Fläche ist imaginär, besitzt aber 4 reelle si guläre Punkte und 4 reelle singuläre Ebenen.

Wir verweisen hierbei auf die interessanten von L. Bri in Darmstadt (siehe dessen *Catalog,* etc.) besorgten Gyp modelle.

§ 4. Das Cayley'sche Tetraedroid und die Wellenfläche.

Ein specieller Fall der Kummer'schen Fläche ist die v Cayley *Tetraedroid* genannte Fläche, von welcher dann ihre seits wieder die Fresnel'sche *Wellenfläche* als besonderer Fa sich abzweigt.

Das *Tetraedroid* ist eine Kummer'sche Fläche, deren singuläre Ebenen sich derart in 4 Gruppen zu je vieren v theilen, dass die Ebenen der nämlichen Gruppe durch ein und denselben Punkt gehen; man erhält so die 4 Eckpunk eines Fundamentaltetraeders, von welchem die Fläche ihr Namen hat.

Die Fläche ist eine homographische Transformation d *Wellenfläche,* von der weiter unten die Rede sein wird; di letztere ist daher nur ein metrisch specialisirtes Tetraedroid.

Die auf das Fundamentaltetraeder bezogene Gleichung Tetraedroids lautet:

$$\begin{vmatrix} 0, & x_1^2, & x_2^2, & x_3^2, & x_4^2 \\ x_1^2, & 0, & a_{12}^2, & a_{13}^2, & a_{14}^2 \\ x_2^2, & a_{12}^2, & 0, & a_{23}^2, & a_{24}^2 \\ x_3^2, & a_{13}^2, & a_{23}^2, & 0, & a_{34}^2 \\ x_4^2, & a_{14}^2, & a_{24}^2, & a_{34}^2, & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Die Gleichungen der 16 singulären Ebenen sind dann folgenden:

$$
\begin{array}{rrrrl}
 & a_{34}x_2 & - a_{24}x_3 & + a_{23}x_4 & = 0,\\
a_{23}x_1 & - a_{13}x_2 & - a_{12}x_3 & & = 0,\\
- a_{24}x_1 & - a_{14}x_2 & & + a_{12}x_4 & = 0,\\
a_{34}x_1 & & + a_{14}x_3 & + a_{13}x_4 & = 0,\\
- a_{34}x_1 & & + a_{14}x_3 & + a_{13}x_4 & = 0,\\
a_{24}x_1 & + a_{14}x_2 & & + a_{12}x_4 & = 0,\\
- a_{23}x_1 & + a_{13}x_2 & - a_{12}x_3 & & = 0,\\
 & - a_{34}x_2 & - a_{24}x_3 & + a_{23}x_4 & = 0,\\
a_{24}x_1 & - a_{14}x_2 & & + a_{12}x_4 & = 0,\\
- a_{34}x_1 & & - a_{14}x_3 & + a_{13}x_4 & = 0,\\
 & a_{34}x_2 & + a_{24}x_3 & + a_{23}x_4 & = 0,\\
- a_{23}x_1 & - a_{13}x_2 & + a_{12}x_3 & & = 0,\\
- a_{23}x_1 & - a_{13}x_2 & - a_{12}x_3 & & = 0,\\
 & a_{34}x_2 & - a_{24}x_3 & - a_{23}x_4 & = 0,\\
- a_{34}x_1 & & + a_{14}x_3 & - a_{13}x_4 & = 0,\\
a_{24}x_1 & - a_{14}x_2 & & - a_{12}x_4 & = 0.
\end{array}
$$

Die weiter oben angegebene Gleichung des Tetraedroids ergibt ich aus Cayley's allgemeiner Gleichung der Kummer'schen Fläche siehe § 3), *wenn man*

$$\frac{\gamma}{\beta} = \frac{a_{24}}{a_{34}}, \quad \frac{\alpha'}{\gamma'} = \frac{a_{34}}{a_{14}}, \quad \frac{\beta''}{\alpha''} = \frac{a_{14}}{a_{24}},$$

$$\alpha\alpha'\alpha'' = -\frac{a_{23}}{a_{14}}, \quad \beta\beta'\beta'' = -\frac{a_{13}}{a_{24}}, \quad \gamma\gamma'\gamma'' = -\frac{a_{12}}{a_{34}}$$

etzt, woraus

$$\alpha'\beta''\gamma = \alpha''\beta\gamma' \quad \textit{folgt.}$$

Von jeder der vier Seitenflächen des Fundamentaltetraeders ird das Tetraedroid in einem Paar von Kegelschnitten ge-chnitten; bez. eines jeden dieser Kegelschnitte ist das in der ent-prechenden Seitenfläche des Tetraeders enthaltene Dreieck sich elbst conjugirt. Siehe Kap. 3, § 2, S. 78.

Man erhält so 4 Paare von Kegelschnitten in den vier eitenflächen des Tetraeders; *die 16 Schnittpunkte dieser 4 Paare on Kegelschnitten sind die 16 singulären Punkte der Fläche, die ich also zu je vieren auf den Seitenflächen des Fundamental-traeders befinden.* Diese letztere Eigenschaft ergibt sich offen-ar, wenn man sich daran erinnert, dass die Kummer'sche Fläche eciprok zu sich selbst ist. Siehe § 3.

Die vier singulären Punkte auf jeder Seitenfläche des Tetra eders liegen zu je zweien auf 6 Geraden, die ihrerseits zu j zweien durch die drei Ecken des Dreiecks gehen, welches die Seiten fläche des Tetraeders bildet.

Die 16 singulären Ebenen berühren die Fläche längs Kege schnitten.

In dem Fall des Tetraedroids lässt sich die Gleichung 6te Grads, von welcher, wie in § 3 ausgeführt wurde, nach Jorda die Bestimmung der 16 singulären Punkte der allgemeinen Kummer schen Fläche abhängt, algebraisch auflösen.

Vergl. bez. des Tetraedroids auch H. E. Timerding, *Ueb die quadratische Transformation, durch welche die Ebenen d Raums in ein System von Flächen 2ter Ordnung mit gemeinsame Poltetraeder übergeführt werden, Ann. di mat.*, (3), 1, 1898.

Die *Wellenfläche* ist ein specielles Tetraedroid und läs sich auf die folgende Art definiren:

Sie ist der Ort der Endpunkte der von dem Centrum ein Ellipsoids ausgehenden Strahlen, deren Längen den beide Haupthalbmessern des Schnitts des Ellipsoids mit einer a diesem Strahl senkrechten Ebene gleich sind; auf jedem Stra liegen daher vier Punkte der Fläche, zwei auf der einen und zw auf der anderen Seite. Fresnel.

Die Fläche besteht aus zwei Schalen, von denen die ei innerhalb der anderen liegt, und die sich in Doppelpunkten d Fläche berühren.

Legt man das Ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,\ a > b > c$$

zu Grund, so lautet die Gleichung der Wellenfläche

$$\xi^2\eta^2 - \xi^2 + a^2b^2c^2 = 0,$$

worin

$$\xi^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$
$$\eta^2 = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2,$$
$$\zeta^2 = a^2(b^2 + c^2)x^2 + b^2(c^2 + a^2)y^2 + c^2(a^2 + b^2)z^2 \quad i$$

Fresnel.

Diese Gleichung ergibt sich aus der des Tetraedroids, we man zwischen den Coefficienten a_{12}^2, a_{13}^2, ... specielle Relation festsetzt. Siehe Salmon-Fiedler, *Geom. d. Raum.*, 2, p. 473, 47

Der Fresnel'schen Gleichung kann man die beiden folgenden Formen geben:

$$\frac{x^2}{\xi^2 - a^2} + \frac{y^2}{\xi^2 - b^2} + \frac{z^2}{\xi^2 - c^2} = 1,$$

$$\frac{x^2}{\eta^2 - b^2c^2} + \frac{y^2}{\eta^2 - b^2a^2} + \frac{z^2}{\eta^2 - a^2c^2} = 0.$$

Das Fundamentaltetraeder der als Tetraedroid betrachteten Wellenfläche hat zu Seitenflächen die drei Hauptebenen des Ellipsoids und die unendlich ferne Ebene.

Der Schnitt der Wellenfläche mit einer der drei Hauptebenen des Ellipsoids besteht aus einer Ellipse und einem Kreis.

Von den 16 singulären Punkten der Fläche liegen 4 imaginäre im Unendlichen, 4 reelle auf einer der Hauptebenen und die übrigen 4 + 4 imaginäre sind auf den beiden anderen Hauptebenen vertheilt.

Die vier singulären Tangentialebenen berühren die Fläche längs Kreisen.

Das Tetraedroid hat zuerst Cayley studirt, *Journ. de Liouville,* 11, 1846; *Coll. Math. Pap.,* 1, S. 302; *Crelle,* 65, 87.

Mit der Untersuchung der Wellenfläche machte den Anfang: Fresnel, *Mém. de l'Ac. de Paris,* 7, 1827 in einer Abhandlung über die doppelte Lichtbrechung, in welcher er das Problem der Physik über den Durchgang des Lichts durch lichtbrechende Körper studirte. Auf ihn folgten dann kurz nachher: Ampère, *Ann. de Chim. et Phys.,* 39, 1828; Cauchy, *Exerc. de math.,* 5, Paris 1830; *Compt. Rend.,* 11, 12, 18; Plücker, *Crelle,* 19, 1839 und Andere. Ein ausführliches Verzeichniss von Arbeiten über die Wellenfläche findet man in dem oben S. 125 citirten Werk von Loria, *Il passato e il presente delle principali teorie geom.,* Torino 1896, p. 114, 115. (In der deutschen Uebers. von 1888 p. 42 ist nur Mannheim erwähnt).

Eine andere Erzeugungsart der Fläche hat Böklen, *Schlömilch's Zeitschr.,* 24, 25, 27, 1879—82 angegeben und eine weitere mit Hülfe zweier developpabeler Flächen Cayley, *Quart. Journ. of math.,* 3, 1860; *Coll. Math. Pap.,* 4, p. 420, 432; *Ann. di mat.,* 20, 1892.

Man kann sich einen noch specielleren Fall der Kummer'schen Fläche denken, wenn sie nämlich nicht nur in einer, sondern in mehreren Arten sich als ein Tetraedroid ansehen lässt.

Mit solchen speciellen Flächen beschäftigten sich Rohn, *Leipz. Ber.*, 1884; Segre, ib., id. und neuerdings Bertini, *Ist. Lomb.*, 1898.

Gypsmodelle von *Wellenflächen* sind in der von L. Bril besorgten Sammlung enthalten.

§ 5. Flächen 4ter Ordnung, die unendlich viele Kegelschnitte enthalten.

Kummer, *Berl. Monatsber.*, 1863 = *Crelle*, 64 untersucht die Flächen 4ter Ordnung, die unendlich viele Kegelschnitte enthalten. Wir geben in diesem Paragraphen die Hauptresultate an, zu denen er gekommen ist.

Es gibt keine Flächen 4ter Ordnung, deren Schnitte mit allen Ebenen des Raums oder eines Bündels, jeder für sich, aus zwei Kegelschnitten zusammengesetzt sind.

Es gibt Flächen 4ter Ordnung, deren Schnitte mit gewissen unendlich vielen Ebenen, die keine Berührungsebenen sind, aus zwei Kegelschnitten bestehen; sie sind:

1. *Die Flächen 4ter Ordnung mit einem Doppelkegelschnitt und zwei Doppelpunkten, deren Verbindungsgerade den Doppelkegelschnitt nicht trifft; jede Ebene des Büschels, dessen Axe diese Verbindungslinie ist, schneidet die Fläche in zwei Kegelschnitten, deren Schnittpunkte natürlich Doppelpunkte der Fläche sind und mithin auf dem Doppelkegelschnitt liegen. Die Gleichung einer derartigen Fläche lautet:*

$$\varphi^2 = 4p^2qr,$$

worin φ eine Form 2ten Grads und p, q, r vom 1ten Grad sind.

2. *Die Fläche 4ter Ordnung mit einer Doppelgeraden; jede durch diese gehende Ebene schneidet die Fläche ausserdem in einem Kegelschnitt. Die Gleichung dieser Fläche ist*

$$p^2S + 2pqS_1 + q^2S_2 = 0;$$

dabei sind p, q Formen 1ten Grads und S, S_1, S_2 vom 2ten Grad.

3. *Die Fläche 4ter Ordnung mit zwei Selbstberührungspunkten d. h. Punkten, in denen sich zwei Schalen der Fläche berühren, jede Ebene, welche durch die Gerade gelegt wird, die diese zwei Punkte verbindet, schneidet die Fläche in zwei Kegelschnitten, die sich in diesen Punkten berühren. Ihre Gleichung lautet:*

$$\varphi^2 = (p, q)^4;$$

rin ist φ eine quadratische Form, p, q sind zwei lineare ormen und $(p, q)^4$ stellt eine Form 4ten Grads in p, q dar.

In allen diesen Fällen bilden die Ebenen, welche die Fläche f die verlangte Art schneiden, ein Büschel.

Es gibt Flächen 4ter Ordnung, deren Schnitte mit (allen der einigen) Berührungsebenen aus zwei Kegelschnitten bestehen. ie sind:

1. *Die Fläche, welche drei sich in einem Punkt schneidende oppelgerade hat (die Römerfläche Steiner's); die von irgend iner Berührungsebene erzeugten Schnitte sind aus zwei Kegel- chnitten zusammengesetzt.*

2. *Die Fläche mit einem Doppelkegelschnitt und einem Doppel- unkt; jede durch den Doppelpunkt gehende Berührungsebene rifft die Fläche in zwei Kegelschnitten. Die Gleichung einer olchen Fläche lautet:*

$$\varphi^2 = 4p^2\psi;$$

larin sind φ, ψ quadratische Formen und p eine lineare Form; nsbesondere stellt $\psi = 0$ einen Kegel 2ter Ordnung dar, dessen Spitze auf der Fläche 2ten Grads $\varphi = 0$ liegt.

Es gibt Flächen 4ter Ordnung, die von jeder sie doppelt berührenden Ebene in zwei Kegelschnitten geschnitten werden. Es sind dies:

1) *Die Flächen mit einem Doppelkegelschnitt und*
2) *die Regelflächen.*

In den folgenden Paragraphen werden wir die Hauptarten ler hier aufgezählten Flächen gesondert behandeln, nämlich:

a) die Flächen mit Doppelkegelschnitt;
b) die Flächen mit Doppelgerade;
c) die Steiner'sche Fläche;
d) die Regelflächen.

Die Flächen *mit zwei Selbstberührungspunkten* sind bisher noch nicht eingehend studirt worden.

§ 6. Die Flächen 4ter Ordnung mit Doppel- oder Cuspidalkegelschnitt.

Die charakteristischen Zahlen für diese Fläche findet man weiter oben in § 1 dieses Kapitels.

Jede Ebene des Raums schneidet die Fläche in einer Curve 4ter Ordnung mit zwei Doppelpunkten, jede Berührungs- ebene in einer Curve 4ter Ordnung mit drei Doppelpunkten, jede

zweifach berührende Ebene in zwei Kegelschnitten und jede Eben die dreifach berührt, in einem Kegelschnitt und zwei Geraden.

Durch jeden beliebigen Punkt können 10 Ebenen gelegt werde welche die Fläche in Paaren von Kegelschnitten schneiden.

Auf dem Doppelkegelschnitt gibt es vier uniplanare od Cuspidalpunkte; die Berührungsebenen in diesen Punkten geh durch denselben Punkt.

Die allgemeine Gleichung der Fläche lautet:

$$\varphi^2 - 4p^2\psi = 0;$$

darin stellen $\varphi = 0$, $\psi = 0$ zwei Flächen 2ter Ordnung un $p = 0$ eine Ebene dar, deren Schnitt mit $\varphi = 0$ der Doppe kegelschnitt der Fläche ist.

Die parabolische Curve der Fläche (von der 32ten Ordnun setzt sich aus dem 8-mal gezählten Doppelkegelschnitt, dem 2-m gerechneten Schnitt von $\varphi = 0$ mit $\psi = 0$ und einer andere Curve 8ter Ordnung zusammen.

Die Fläche enthält 16 Gerade (die selbstverständlich de Doppelkegelschnitt treffen); jede von ihnen wird von fünf andere geschnitten. Die Configuration dieser 16 Geraden ist dieselb wie die der 16 Geraden, welche übrig bleiben, wenn man vo den 27 Geraden einer Fläche 3ter Ordnung (Kap. 11, § 3) *ein Gerade und die sämmtlichen 10, welche diese Gerade schneide weglässt.*

Jede durch eine der 16 Geraden gelegte Ebene schneid die Fläche ausserdem in einer Curve 3ter Ordnung mit eine Doppelpunkt.

Es gibt 40 die Fläche dreimal berührende Ebenen, vo denen jede 2 Gerade enthält.

Die Doppeltangentialebenen der Fläche hüllen fünf Keg 2ter Ordnung ein, welche die fünf Kummer'schen Kegel genann werden. Diese fünf Kegel bilden daher die doppelt berührend Developpabele der Fläche (von der 10ten Ordnung).

Die 40 dreifach berührenden Ebenen der Fläche haben unte sich dieselbe Configuration, wie die 40 Ebenen, welche von de 45 einer Fläche 3ter Ordnung (Kap. 11, § 3) *übrig bleiben, wen man die 5 durch eine feste Gerade gehenden Ebenen wegnimm*

Ein jeder der Kummer'schen Kegel wird von den 16 Gerade der Fläche berührt; diese vertheilen sich zu je zweien in 8 B rührungsebenen an einen Kummer'schen Kegel. Mithin lassen sic die 16 Geraden in Bezug auf jeden der 5 Kegel auf verschieden Art in 8 Paare ordnen; diese Anordnung ist die nämliche, wie di

erselben Geraden, wenn man sie als einer cubischen Fläche ngehörig betrachtet, in Bezug auf eine jede der 5 weggelassenen :benen. Nennt man insbesondere z. B. a, b die beiden Geraden iner weggelassenen Ebene, so vertheilen sich die 16 Geraden 'erart in 8 Paare, dass die beiden Geraden eines jeden Paares inander und ausserdem entweder die Gerade a oder die Gerade b :chneiden.

Es wird auf diese Art eine Zuordnung zwischen den) Kegeln in Bezug auf S_4 und den 5 weggelassenen Ebenen in Bezug auf S_3 hergestellt.

Die Tangente in einem Punkt P des Doppelkegelschnitts von S_4 und die Geraden, welche P mit den Spitzen der 5 Kegel verbinden, sind Erzeugende eines Kegels 2ter Ordnung.

Die Kummer'schen Kegel gehen durch die auf der Doppellinie liegenden Cuspidalpunkte; die Ebenen, welche die Kegel in diesen Punkten berühren, schneiden die Fläche in zwei sich berührenden Kegelschnitten.

Aus den 16 Geraden der Fläche lassen sich zwei verschiedene Arten windschiefer Gruppirungen von 4 Geraden bilden, d. h. Gruppirungen von 4 Geraden, welche sich zu je zweien nicht schneiden; eine Gruppe 1ter Art ist so beschaffen, dass jede andere der übrig bleibenden 12 Geraden immer wenigstens eine der vier Geraden der Gruppe schneidet, eine Gruppe 2ter Art dagegen so, dass unter den 12 übrig bleibenden Geraden immer eine und nur eine vorhanden ist, welche keine der 4 Geraden trifft. Diese Gruppen heissen *Quadrupel 1ter bez. 2ter Art. Es gibt 40 von der 1ten und 80 von der 2ten Art.*

Jedem Quadrupel entspricht ein anderes derselben Art, welches so beschaffen ist, dass jede seiner vier Geraden eine und nur eine der Geraden des ersten Quadrupels trifft.

Diese beiden Quadrupel heissen *conjugirt* und bilden eine *Doppelvier* (Clebsch).

Jeder Doppelvier 2ter Art entsprechen 4 andere derart, dass die in der ersteren und einer der letzteren enthaltenen Geraden die sämmtlichen 16 Geraden der Fläche sind.

Aus den 16 Geraden lassen sich 16 windschiefe Quintupel bilden, d. h. Gesammtheiten von 5 Geraden, welche sich zu je zweien nicht schneiden; windschiefe Gesammtheiten mit einer grösseren Anzahl von Geraden gibt es nicht.

Die Substitutionengruppe der 16 Geraden hat die Ordnung $5!\,16$.

Die Wurzeln der Gleichung 16ten Grads, von welcher di Bestimmung der 16 Geraden der Fläche 4ter Ordnung mit Doppe kegelschnitt abhängt, sind rationale Functionen der Wurzeln eine gewissen Gleichung 10ten Grads, welche ihrerseits nach Auf lösung einer Gleichung 5ten Grads in 5 quadratische Factore zerfällt.

Man hat dann auch eingehend die *Polyeder* studirt, di sich aus den 40 dreifach berührenden Ebenen bilden lasse Siehe die Citate weiter unten.

Aus dem Obigen geht hervor, dass die Ebenen der Kegel schnitte der Fläche die Kummer'schen Kegel berühren; natürlic liegen in jeder Ebene zwei Kegelschnitte. *Man hat also 1 Systeme von der Fläche angehörigen Kegelschnitten* und jede System entspricht ein anderes, das man ihm *conjugirt* nenne kann, weil ein Kegelschnitt des ersten immer in derselben Eben mit einem bestimmten Kegelschnitt des zweiten liegt.

Durch jeden (nicht auf der Doppelcurve) liegenden Punk der Fläche geht ein Kegelschnitt eines jeden der 10 Systeme.

Sieht man von den Schnitten ab, die durch Punkte de Doppelcurve geführt werden können, so gelten die Sätze: *Di zu demselben System gehörenden Kegelschnitte schneiden sich nicht zwei beliebige zu zwei conjugirten Systemen gehörende Kegelschnitt schneiden sich in zwei Punkten; die beiden zu zwei verschiedene (nicht conjugirten) Systemen gehörenden Kegelschnitte treffen sich in einem Punkt.*

Schneidet man den Kegel, dessen Spitze in einem Punkt d der Doppelcurve liegt, und welcher die Fläche berührt, mit eine beliebigen Ebene, so erhält man ausser den Spuren der beide Berührungsebenen eine ebene allgemeine Curve 4ter Ordnung Zeuthen, 1879; siehe *Ann. di mat.*, 14, p. 34.

Diese Curve 4ter Ordnung hat zu Doppeltangenten: di Spuren der beiden Berührungsebenen an die Fläche, die Spure der 10 Ebenen, welche durch P gehen und die Fläche in einem Paar von Kegelschnitten treffen (siehe oben), *und die Spuren de 16 Ebenen, die durch P und die 16 Geraden der Fläche gelegt werden können.*

Die Kegelschnitte der Fläche werden in Kegelschnitte projicirt, welche die Curve 4ter Ordnung vierfach berühren.

Wenn P einer der 4 auf der Doppelcurve liegenden Cuspidalpunkte ist (siehe oben), *so hat die Projection des Umfangs der Fläche einen Doppelpunkt auf der Spur der in P berührenden Ebene.*

Projicirt man dagegen die Fläche von der Spitze eines der Kummer'schen Kegel aus, so ist die Projection ihres Umfangs die Spur des doppelt gezählten Kegels und eine Curve 4ter Ordnung mit zwei Doppelpunkten, welche sowohl von dieser Spur als von der Projection des Doppelkegelschnitts in 4 Punkten berührt wird. Zeuthen, l. c.

Zeuthen bediente sich der vorstehenden Theoreme, um die Flächen 4ter Ordnung mit Doppelkegelschnitt nach der Realität ihrer Geraden und der Kummer'schen Kegel zu classificiren.

Er kam zu den folgenden Hauptresultaten:

Von reellen Flächen 4ter Ordnung mit reellem Doppelkegelschnitt gibt es die nachstehend aufgeführten 6 Typen.

A. Die 16 Geraden sind reell und die 5 Kegel sind reell. Die 10 Kegelschnittsysteme sind reell und jedes hat 4 Paare reeller Geraden.

B. 8 Gerade sind reell und ebenso 3 Kegel; die übrigen 8 Geraden sind imaginär ohne reelle Punkte; 6 Kegelschnittsysteme aber kein Paar conjugirter Geraden sind reell.

C. 4 Gerade und ein Kegel sind reell. Zwei Kegelschnittsysteme sind reell, jedes mit 2 Paaren reeller Geraden und 2 Paaren conjugirter Geraden. Von den 12 imaginären Geraden haben 4 einen reellen Punkt, die anderen keinen.

D. Keine Gerade ist reell; die 5 Kegel sind es dagegen sämmtlich. 6 Kegelschnittsysteme sind reell und enthalten kein Paar reeller oder conjugirter Geraden. Alle 16 Geraden sind imaginär ohne reelle Punkte.

E. Keine Gerade ist reell und die 5 Kegel sind es sämmtlich. Alle 16 Geraden sind imaginär aber mit einem reellen Punkt. Zwei Kegelschnittsysteme sind reell; zu jedem von ihnen gehören 4 Paare conjugirter imaginärer Geraden.

F. Keine Gerade ist reell und nur 3 Kegel sind reell. Von den 16 Geraden haben 8 einen einzigen reellen Punkt und 8 keinen. Zwei Kegelschnittsysteme sind reell und jedes hat 2 Paare conjugirter Geraden.

Die Fläche S_4, von der hier die Rede ist, wurde zuerst von Clebsch mit Hülfe ihrer ebenen Abbildung studirt. Vergl. Kap. 9, § 7.

Bei dieser Abbildung entspricht einer Geraden von S_4 in der Ebene ein durch 5 Fundamentalpunkte gehender Kegelschnitt; den 5 Geraden, welche die Gerade schneiden, entsprechen die 5 Funda-

mentalpunkte, und den übrigen 10 Geraden diejenigen, welch diese 5 Punkte zu je zweien verbinden.

Jedem Paar conjugirter Kegelschnittsysteme von S_4 sind di durch 4 der 5 Fundamentalpunkte gehenden Kegelschnitte und di durch den 5ten Punkt gehenden Geraden zugeordnet.

Die Bilder der ebenen Schnitte von S_4 sind ∞^3 Curven 3te Ordnung eines linearen Systems von Curven 3ter Ordnung, welch die 5 Fundamentalpunkte enthalten.

Das Bild des Doppelkegelschnitts von S_4 ist eine Curve 3te Ordnung desselben Systems.

Für das Studium der Fläche wichtig ist auch die Eigen schaft, dass sie mittelst einer birationalen Transformation de Raums (Kap. 9, § 7) mit einer allgemeinen Fläche 3ter Ordnun in Beziehung gebracht werden kann. Untersuchungen dieser Ar haben Geiser, *Crelle,* 70 und Cremona, *Rend. Ist. Lomb.,* 187 angestellt.

Durch die Transformation

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = y_1^2 : y_1 y_2 : y_1 y_3 : y_2 y_4 - y_3^2$$

oder

$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = x_1 x_2 : x_2^2 : x_2 x_3 : x_1 x_4 + x_3^2$$

wird einer allgemeinen Fläche 3ter Ordnung S_3, welche durch de Kegelschnitt $x_2 = 0$, $x_1 x_4 + x_3^2 = 0$ des Raums (x) geht, abe in $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ von der Ebene $x_1 = 0$ nicht berührt wird in dem Raum (y) eine Fläche S_4 von der 4ten Ordnung mit Doppel kegelschnitt zugeordnet. Cremona.

Die Gleichungen des Doppelkegelschnitts lauten

$$y_1 = 0, \; y_2 y_4 - y_3^2 = 0.$$

Den 27 Geraden von S_3 entsprechen 1) *die 16 Geraden von S_4,* 2) *10 Kegelschnitte von S_4, die durch*

$$y_1 = y_2 = y_3 = 0$$

gehen, und in diesem Punkt von der Ebene $y_2 = 0$ berührt werden, 3) *der Punkt $y_1 = y_2 = y_3 = 0$.*

Mit Hülfe dieser Sätze lässt sich auch die ebene Abbildung von S_4 aus der ebenen Abbildung von S_3 ableiten.

Ein specieller Fall der hier betrachteten Fläche ist der jenige, in welchem der Doppelkegelschnitt in zwei sich schneidende Gerade zerfällt.

Die Gleichung der Fläche lässt sich alsdann auf die Gestalt

$$x_1^2 x_2^2 + 2mx_1x_2x_3x_4 + x_4^2\varphi = 0$$

rückführen, worin φ eine quadratische Form ist. Die beiden ppelgeraden liegen in der Ebene $x_4 = 0$ und sind die Schnitte ser Ebene mit den beiden Ebenen

$$x_1 = 0, \; x_2 = 0.$$

In diesem Fall hat die Fläche wieder 16 Gerade, von denen die eine der Doppelgeraden treffen, und 8 die andere; jede r ersten 8 Geraden wird von 4 Geraden des anderen Systems schnitten.

Auf jeder der beiden Doppelgeraden gibt es zwei uniplanare ler Cuspidalpunkte.

Die Kummer'schen Kegel speciell reduciren sich auf 4; der te besteht aus der Gesammtheit der beiden Doppelgeraden, als Enveloppe von Ebenen betrachtet.

Bemerkenswerth ist ferner der Fall, in welchem der Kegelschnitt nicht *doppelt*, sondern *cuspidal*, d. h. jeder seiner Punkte *uniplanar* ist.

Die charakteristischen Zahlen für diesen Fall sind in der Tabelle § 1 angegeben.

Alsdann gehen die Berührungsebenen an die Fläche in den Punkten des Cuspidalkegelschnitts sämmtlich durch einen und denselben Punkt.

Es existirt dann eine Tangentialebene, welche die Fläche längs eines Kegelschnitts berührt, der den Cuspidalkegelschnitt in zwei Punkten trifft.

Eine beliebige durch einen dieser Punkte gehende Ebene schneidet die Fläche in einer Curve, welche diesen Punkt zum Selbstberührungspunkt (dem Punkt, in dem sich zwei Aeste berühren, tacnodo, close-point) hat.

Die Fläche besitzt zwei Quadrupel von Geraden; die vier Geraden eines Quadrupels gehen sämmtlich durch einen der beiden Selbstberührungspunkte und liegen in der Ebene der Geraden, welche die beiden Kegelschnitte, den Cuspidalkegelschnitt und den anderen in diesem Punkt berühren. Nennt man die beiden Ebenen der zwei Quadrupel π, π', so gilt der Satz:

Die Fläche hat nur drei Kummer'sche Kegel, deren Spitzen in der Geraden liegen, in welcher sich die beiden Ebenen π, π' schneiden; diese drei Kegel gehen durch den Cuspidalkegelschnitt.

Man hat dann auch die Fälle untersucht, in welchen e Fläche ausser dem Doppel- oder dem Cuspidalkegelschnitt no isolirte Doppelpunkte hat.

Eine Fläche 4ter Ordnung mit Doppelkegelschnitt kann ni mehr als vier solcher isolirter Doppelpunkte haben.

Diese Flächen wurden ebenso wie viele andere specie Flächen besonders von Korndörfer, *Math. Ann.*, 1, 2 u später von Segre, ib., 24 studirt.

Wenn ein isolirter Doppelpunkt auf den Doppelkegelschn zu liegen kommt, so erhält man eine Fläche, welche si wie Cremona, *Rend. Ist. Lomb.*, 1871 gezeigt hat, aus ein Fläche 2ter Ordnung mit Hülfe der birationalen Transformati von der oben die Rede war, ableiten lässt.

Andere analoge Fälle hat Segre, l. c. betrachtet.

Wird angenommen, der Kegelschnitt sei doppelt und ni degenerirt, so lassen sich in Bezug auf die übrigen Doppelpunk welche die Fläche noch haben kann, 18 verschiedene Arten v Flächen unterscheiden.

Mit dem Studium der Flächen 4ter Ordnung mit Dopp kegelschnitt hat Kummer 1863, *Crelle*, 64 den Anfang g macht. Später beschäftigten sich, von einem anderen Standpun ausgehend, Moutard, Darboux und Casey eingehend n einem speciellen und sehr beachtenswerthen Fall solcher Fläch mit den *Cycliden*, von denen im folgenden Paragraphen die Re sein wird; bei diesen ist der Doppelkegelschnitt der unendli ferne imaginäre Kreis. Die speciellen Fälle des *Torus* (ein durch die Umdrehung eines Kreises um eine in seiner Ebe gelegene Axe erzeugten Ringfläche) und der Dupin'schen *Cycli* waren schon seit langer Zeit bekannt.

Im Jahr 1868 hat Clebsch, *Crelle*, 69 bei Gelegenh seiner Untersuchungen über die ebene Abbildung der Fläch die Studien über die Flächen 4ter Ordnung mit allgemein Doppelkegelschnitt wieder aufgenommen. Auf ihn folgten Cr mona, Korndörfer, l. c., Cayley, *Quart. Journ.*, 10, 1 1870, 1871.

Wir wollen hier die Arbeiten über die Cycliden nic citiren, die in dem nächsten Paragraphen besprochen werd sollen, und geben nur noch als besonders wichtig die Zeuthen'sc Festschrift vom Jahr 1879, *Om Flader af fjerde Orden m Dobbeltkeglesnit*, Kopenhagen an, die in dänischer Sprache v fasst, von Loria, *Ann. di mat.*, 14 ins Italienische überset

:; in ihr hat sich der Verfasser ins Besondere die Classi-ation dieser Flächen in der oben angegebenen Art angelegen in lassen.

Im Jahr 1884 unternahm es Segre, die ganze Theorie der-tiger Flächen in einer umfangreichen in Bd. 24 der *Math. nn.* enthaltenen Arbeit von einem neuen Gesichtspunkt aus behandeln, indem er diese Flächen als Projectionen des Schnitts veier in dem Raum von vier Dimensionen gelegener quadra-scher Mannigfaltigkeiten von drei Dimensionen in den drei-mensionalen Raum betrachtete.

Die Segre'sche Arbeit ist reich an Resultaten, von denen n Theil schon bekannt war, andere neu sind, und enthält n Schluss eine detaillirte Classification aller verschiedenen Arten on Flächen mit Doppel- oder Cuspidalkegelschnitt, die degenerirt nd oder nicht, und entweder ausserdem isolirte Doppelpunkte der keine solche Punkte haben.

Die Flächen mit Cuspidalkegelschnitt hatte vor ihm schon remona, *Acc. Bologna,* 1872 und Tőtőssy, *Math. Ann.,* 19 ntersucht.

Eingehende Studien über die Configuration der 16 Geraden nd der 40 dreifach berührenden Ebenen der Fläche findet an in den Arbeiten von Berzolari, *Ann. di mat.,* 13 und 'ereno, ib., 21; wir verweisen auf die Einleitung der citirten egre'schen Arbeit und das wiederholt erwähnte Buch Loria's, *l passato e il presente delle principali teorie geometriche*, Torino 896, in dem ausführliche historische und literarische Angaben nthalten sind.

§ 7. Die Cycliden. Die Dupin'sche Cyclide.

Die *Cycliden* sind Flächen 4ter Ordnung, die zum Doppel-egelschnitt den unendlich fernen imaginären Kreis haben. Der Name Cyclide stammt von Casey und Darboux, während ayley diese Flächen *bicyclische oder bicirculäre Flächen* nannte.

Die Cyclide ist die Enveloppe einer Kugel, die eine feste Kugel orthogonal schneidet, während ihr Centrum eine feste Fläche ten Grads beschreibt. Casey, *Phil. Trans.,* 161, 1871.

Die Gleichung der Cyclide lässt sich auf verschiedene Art chreiben:

1) Es seien $X_1 = 0$, $X_2 = 0$, $X_3 = 0$, $X_4 = 0$ die Gleichungen von vier Kugeln; *sie lautet dann:*

$$\varphi_2(X_1, X_2, X_3, X_4) = 0,$$

worin φ_2 eine allgemeine Form 2ten Grads darstellt.

Die bei der Erzeugung der Cyclide feste Kugel ist d Jacobi'sche Fläche dieser 4 Kugeln; jede der letzteren stellt ei Lage der beweglichen auf der festen Kugel senkrecht stehend Kugel dar.

2) *Die Gleichung der Cyclide kann ferner auf die Form*

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 + S_2 = 0 \quad \text{(in Cartesischen Coordinaten)}$$

reducirt werden; darin ist $S_2 = 0$ die Gleichung einer Fläch 2ter Ordnung.

3) *Sie lässt sich auch durch die Gleichungen von fü Kugeln*

$$X_1 = 0, \ldots, X_5 = 0,$$

die einander orthogonal schneiden, mittelst einer der Formeln

$$a_1 X_1^2 + a_2 X_2^2 + a_3 X_3^2 + a_4 X_4^2 = 0,$$
$$a_1' X_2^2 + a_2' X_3^2 + a_3' X_4^2 + a_4' X_5^2 = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_1^{\text{IV}} X_5^2 + a_2^{\text{IV}} X_1^2 + a_3^{\text{IV}} X_2^2 + a_4^{\text{IV}} X_3^2 = 0$$

ausdrücken, in welchen die a constante Coefficienten bedeute dicse Formeln sind sämmtlich einander äquivalent, weil zwisch den Quadraten der fünf X eine identische lineare Relation b steht, welche den Bedingungen der Orthogonalität der fünf Kuge zu je zweien entspricht.

Diese Relation lautet

$$\frac{X_1^2}{r_1^2} + \frac{X_2^2}{r_2^2} + \frac{X_3^2}{r_3^2} + \frac{X_4^2}{r_4^2} + \frac{X_5^2}{r_5^2} = 0,$$

worin $r_1, \ldots, r_5$ die Radien der fünf Kugeln bezeichnen.

In den obigen 5 Gleichungen ist $X_5 = 0$ in der erste $X_1 = 0$ in der zweiten, ..., $X_4 = 0$ in der letzten Gleichu die bei der Erzeugung der Cyclide feste Kugel und die übrig 4 Kugeln stellen verschiedene Lagen der beweglichen Kugel d Dieselbe Fläche wird daher auf 5 verschiedene Arten erzeugt.

Eine wichtige Eigenschaft der Cycliden besteht darin, *da sie anallagmatische Flächen sind, d. h., dass sie mittelst ei Transformation durch reciproke Radienvectoren (Inversion) in si selbst verwandelt werden.*

Die anallagmatischen Flächen 4ter Ordnung sind die Cycliden.
outard.

Die der Inversion zu Grund liegende Kugel ist die feste Kugel,
i welcher die bewegliche, welche die Cyclide auf die oben an-
gebene Art erzeugt, orthogonal ist. Das Centrum dieser Kugel
t die Spitze eines der 5 Kummer'schen Kegel der Fläche nach
r allgemeinen Theorie in § 6.

Die Cyclide ist eine anallagmatische Fläche in Bezug auf 5
rschiedene Inversionen, selbstverständlich den 5 Kummer'schen
egeln entsprechend.

Dieser Satz entspricht dem oben angeführten Theorem, nach
elchem dieselbe Cyclide sich auf fünf verschiedene Arten er-
ugen lässt.

Charakteristisch für die Cycliden ist die Eigenschaft, *dass*
ie doppelt berührenden Ebenen (die Ebenen, welche die
ummer'schen Kegel berühren) die Fläche, statt in einem
aar von Kegelschnitten, wie in dem in § 6 behandelten Fall,
i einem Paar von Kreisen schneiden. Mithin lässt sich auch
ehaupten:

Durch jeden Punkt des Raums gehen 10 Ebenen, welche die
läche in einem Paar von Kreisen schneiden. Daher stammt
er ihr von Cayley gegebene Name *bicirculäre Fläche.*

Wir wollen annehmen, es liege eine Cyclide vor, die auf
ie oben angegebene Art von einer beweglichen Kugel erzeugt
orden ist, welche eine feste Kugel $X_i = 0$ orthogonal schneidet,
ährend ihr Centrum eine Fläche 2ter Ordnung $S_i = 0$ be-
chreibt.

Wir ziehen von dem Centrum der Kugel $X_i = 0$ aus den
egel, dessen Berührungsebenen senkrecht auf den Erzeugenden
les Asymptotenkegels der Fläche 2ter Ordnung $S_i = 0$ stehen;
ieser Kegel ist einer der 5 Kummer'schen Kegel.

Jedem Kummer'schen Kegel entspricht auf diese Art eine
läche 2ter Ordnung $S_i = 0$.

Die 5 Flächen 2ter Ordnung $S_i = 0$ sind confocal.

Der Schnitt der Fläche 2ter Ordnung $S_i = 0$ mit der ent-
prechenden Kugel $X_i = 0$ heisst eine *Focalcurve* der Cyclide;
s gibt mithin 5 Focalcurven.

Wir bemerken dabei, dass die Definition der *Focalcurven*
Kap. 4, § 3), welche Dupin, Chasles und Andere für Flächen
2ter Ordnung gegeben haben, von Darboux, *Compt. Rend.*, 1864
uf eine beliebige Fläche ausgedehnt worden ist.

Man betrachte die der Fläche umschriebene Developpabl deren Tangentialebenen auch den unendlich fernen imaginär Kreis berühren; *die Doppelcurve dieser Developpablen wird d Focalcurve der Fläche genannt. Durch jede Tangente an d Focalcurve lassen sich zwei Ebenen legen, welche zugleich d Fläche und den unendlich fernen Kreis berühren.*

Gehört nun der unendlich ferne Kreis der Fläche an, lassen sich ausser den gewöhnlichen Focalcurven auch *die s genannten singulären Focalcurven* betrachten (Laguerre), *welc die Doppellinien der Developpablen sind, die der Fläche län der Punkte des unendlich fernen imaginären Kreises umschrieben i*

Wichtig ist das folgende Theorem über die singulär Focalcurven der Cyclide (Laguerre, De la Gournerie):

Die singulären Focalcurven der Cyclide sind die gewöh lichen Focalcurven einer jeden der 5 Flächen 2ten Grads, welc auf die oben angegebene Art zur Erzeugung der Cyclide diene diese 5 Flächen 2ten Grads als confocale Flächen haben da dieselben Focallinien.

In einem Kugelbüschel gibt es 12 Kugeln, welche eine g gebene Cyclide berühren; in einem Ebenenbüschel existiren 12 C Cyclide berührende Ebenen und in einem Strahlenbündel 12 a der Cyclide senkrechte Strahlen.

Die durch die Gleichung

$$\frac{X_1^2}{\lambda - a_1} + \frac{X_2^2}{\lambda - a_2} + \frac{X_3^2}{\lambda - a_3} + \frac{X_4^2}{\lambda - a_4} + \frac{X_5^2}{\lambda - a_5} = 0,$$

in welcher λ einen variabelen Parameter bezeichnet, dargestellt Cycliden sind sämmtlich confocal; sie schneiden einander orthogon und durch einen Punkt des Raums gehen drei Cycliden ei solchen Systems; sie bilden mithin ein sogenanntes dreifaches ortl gonales System. Siehe Kap. 16, § 14.

Man kann die drei entsprechenden Werte von λ zu *Coo dinaten eines Punkts des Raums* wählen.

Zwei Cycliden des Systems schneiden sich längs ihr Krümmungslinien; diese sind daher algebraische Curven. Ver Kap. 16, § 9.

Die Krümmungslinien der Cycliden bilden ein orthogona isothermes System. Siehe Kap. 16, § 8.

Setzt man specielle metrische Eigenschaften der Fläche 2 Ordnung, welche zur Construction der Cyclide dient, voraus, ergeben sich Cycliden von besonderen Formen.

Ist diese Fläche 2ten Grads eine Kugel, so wird die Cyclide e Rotationsfläche, welche ein Cartesisches Oval (Kap. 17, § 11) *i der Drehung um seine Focalaxe beschreibt. Alsdann ist der ıendlich ferne imaginäre Kreis für die Fläche cuspidal.*

Wenn die Fläche 2ten Grads eine Umdrehungsfläche ist, so ·rührt die gewöhnliche Focalcurve der Cyclide den unendlich fernen reis doppelt. Darboux nannte diese Cycliden *Cartesische.*

Ist schliesslich die quadratische Fläche keine Mittelpunkts·äche, also ein Paraboloid, so liegt eine der singulären Focal·rven im Unendlichen und die Cyclide zerfällt in eine Fläche ter Ordnung, die durch den unendlich fernen imaginären Kreis ·ht und in die Ebene im Unendlichfernen selbst.

Man erhält alsdann die sogenannte *parabolische Cyclide oder 'yclide 3ter Ordnung.*

Sie enthält offenbar eine in der unendlich fernen Ebene ge·gene Gerade, durch die fünf die Fläche dreifach berührende Ebenen ·ehen; die Berührungspunkte dieser Ebenen sind die 5 Spitzen er 5 Kummer'schen Kegel, von welchen sich ein jeder auf ein 'aar in der Fläche liegender Geraden reducirt; jede durch eine 'er so gebildeten 10 Geraden gehende Ebene schneidet die Fläche ·atürlich in Kreisen.

Aus einer allgemeinen Cyclide ergibt sich eine Cyclide 3ter Ordnung, wenn man die erstere durch reciproke Radienvectoren ransformirt (Kap. 17, § 1) *und das Inversionscentrum auf die Fläche selbst legt.*

Nimmt man nun an, die Fläche 2ten Grads S und die Leitkugel X haben eine specielle Lage zueinander, sie berühren sich z. B., so erhält man *Cycliden mit Doppelpunkten.*

Wie die in dem vorigen Paragraphen besprochenen Flächen, so können auch die Cycliden einen bis vier isolirte Doppelpunkte besitzen.

Die Cycliden mit Doppelpunkten lassen sich immer als In·erse (durch eine Inversion transformirte Flächen, Kap. 17, § 1*) on Flächen 2ter Ordnung ansehen.*

Die Inverse der allgemeinen Fläche 2ten Grads ist eine Cyclide mit einem Doppelpunkt, die des allgemeinen Kegels 2ten Grads eine solche mit zwei, die der Rotationsfläche 2ten Grads eine solche mit drei und schliesslich die Inverse des Rotations·egels eine Cyclide mit vier isolirten Doppelpunkten (die Dupin'sche Cyclide).

Die Cyclide mit nur einem Doppelpunkt ergibt sich, wen die Fläche 2ten Grads S_i bei der oben beschriebenen Erzeugun der Cyclide die Kugel X_i, die Leitkugel, in nur einem Pun berührt oder diese letztere sich auf einen Punkt reducirt.

Eine solche Cyclide lässt sich auch als die sogenannt *Fusspunktfläche* (Kap. 17, § 2) einer Fläche 2ter Ordnung i Bezug auf einen Punkt O der letzteren definiren, d. h. als *d Ort der Fusspunkte der von O aus auf die Berührungsebenen a die Fläche 2ter Ordnung gefällten Lothe.*

Wenn die Fläche 2ten Grads S die Kugel X *doppelt b rührt,* so ergibt sich die *Cyclide mit zwei Doppelpunkten;* sie is wie gesagt, die Inverse eines allgemeinen Kegels 2ten Grads.

Den Fall, in welchem diese beiden Doppelpunkte auf de unendlich fernen imaginären Kreis fallen, studirten De la Gou nerie, *Journ. de l'Éc. pol.*, 23, 1863; *Journ. de Liouville*, (2 10, 1865 und Cayley, *Quart. Journ.*, 10, 11, 1870.

Die Fläche, welche von einem Kegelschnitt erzeugt wird, d um eine nicht in seiner Ebene liegende Gerade rotirt, ist im Al gemeinen eine Cyclide mit nur zwei auf dem unendlich ferne imaginären Kreis liegenden Doppelpunkten, welche die beid Kreispunkte in der auf der Rotationsaxe senkrecht stehend Ebene sind.

Wir gehen schliesslich zu der Dupin'schen Cyclide (m vier Doppelpunkten) über.

Bei der Dupin'schen Cyclide sind wenigstens zwei der Dopp punkte imaginär, die 16 Geraden sind es im Allgemeinen sämm lich und von den 6 Verbindungsgeraden der Doppelpunkte sin wenigstens 4 imaginär.

Von den fünf Kummer'schen Kegeln ist nur einer nic degenerirt; seine Berührungsebenen schneiden mithin die Fläc in Kreisen; die übrigen vier degeneriren in vier singuläre Ta gentialebenen, welche die Fläche längs einer ganzen Curve b rühren, und von denen wenigstens zwei stets imaginär sind.

Die Krümmungslinien (Kap. 16, § 9) *der Dupin'sch Cyclide sind Kreise.*

Die Dupin'sche Cyclide lässt sich als die Enveloppe (Kap. 1 § 6) *einer Kugel definiren, deren Centrum sich in einer Ebene b wegt, und die zwei gegebene Kugeln berührt; oder: als die Env loppe einer Kugel, deren Centrum sich auf einem Kegelschnitt b wegt, und die eine andere gegebene Kugel berührt, oder auc*

's die Enveloppe einer Kugel, deren Centrum auf einem Kegel-hnitt fortrückt, und die eine andere Kugel senkrecht schneidet.

Die von Dupin gegebene Definition, nach welcher sie die *hveloppe von Kugeln ist, welche drei gegebene Kugeln berühren,* ıdividualisirt nicht eine einzige Cyclide, sondern deren *vier*.

Es leuchtet ferner ein, dass *der Torus,* d. h. die Fläche, elche von einem Kreis erzeugt wird, der um eine in seiner bene liegende Gerade rotirt, *eine specielle Dupin'sche Cyclide ist.*

Wenn die 4 Doppelpunkte imaginär sind, so erhält man ie *Ringcyclide,* von welcher der *Torus* ein besonderer Fall ist.

Sind nur zwei der Doppelpunkte reell (andere Fälle sind icht möglich, siehe oben), so ergeben sich zwei Arten von yciiden: 1) die *Horncyclide,* welche aus zwei Schalen besteht, von enen die eine ausserhalb der anderen liegt; die Schalen endigen in spitzen, und sind durch die beiden Doppelpunkte verbunden; und ') die *Spindelcyclide,* die aus zwei in zwei Punkten vereinigten chalen besteht, von denen die eine sich innerhalb der anderen efindet.

Wie bei den allgemeinen Cycliden, so kann man sich auch ei den Dupin'schen denken, der Kegelschnitt, der die Centren er beweglichen Kugeln enthält, deren Enveloppe die Cyclide st, sei eine *Parabel,* also eine ähnliche Voraussetzung machen, wie die, aus welcher bei den allgemeinen Cycliden die para-olischen oder Cycliden 3ten Grads hervorgingen.

Man erhält so *die parabolischen Dupin'schen Cycliden, welche Flächen nur 3ter Ordnung sind,* weil die unendlich ferne Ebene wegfällt.

Von solchen Cycliden lassen sich die folgenden Typen construiren: 1) *die parabolische Horncyclide,* bei der zwei Doppelpunkte reell sind, und 2) *die parabolische Ringcyclide,* bei der die 4 Doppelpunkte sämmtlich imaginär sind.

Diese Flächen haben Schalen, welche sich ins Unendliche erstrecken; ihnen gehören eine unendlich ferne Gerade und einige andere reelle Geraden an.

Von diesen sämmtlichen Cycliden hat man Gipsmodelle angefertigt; siehe den *Catalog mathematischer Modelle* von Brill in Darmstadt.

Die Classification der Cycliden führte zuerst Loria, *Acc. Torino,* 1884 vollständig durch, *welcher 18 verschiedene Species von Cycliden je nach den übrigen Singularitäten, welche die Fläche besitzen kann, unterschied;* diese 18 Species entsprechen

natürlich den 18 Arten von Flächen 4ter Ordnung mit allgemeine Doppelkegelschnitt, die kurz nachher zugleich mit anderen Fläche Segre studirt hat; siehe oben § 6. Dieser letztere Autor wi dann auch nach, *dass von den 18 Arten von Cycliden nur 1 reellen Cycliden entsprechen (Gleichungen mit reellen Coefficient haben).* Siehe *Math. Ann.*, 24, p. 439.

Die älteste Cyclide, die untersucht wurde, war die m 4 Doppelpunkten (Dupin, *Applic. de Géom.*, 1822), von welch der *Torus* ein specieller Fall ist. Mannheim, *Nouv. An* 1860 zeigte, dass jede Dupin'sche Cyclide sich durch eine I version in einen Torus überführen lässt.

Bald nachher fing man an, die Cycliden in Bezug auf ih anallagmatischen Eigenschaften (siehe oben) zu studiren. Dah gehören die Arbeiten von Moutard, *Nouv. Ann. de Math.*, (2 3, 1864; Darboux, *Ann. de l'Éc. norm.*, 1865 u. ff., 187 Maxwell, *Quart. Journ.*, 9, 1867, der eine Classification geben versuchte, und später eine umfangreiche Abhandlung v Casey, *Phil. Trans.*, 161, 1871.

Ueber die Theorie dieser Flächen hat Darboux ei separate Monographie veröffentlicht: *Sur une classe remarquab de courbes et surfaces algébriques*, Paris 1873, 2. éd. 189 in welcher der Leser Näheres findet. Schliesslich unternah Loria im Jahr 1884, *Mem. Acc. Torino*, 36 das Studium d Cycliden von einem anderen Gesichtspunkt aus und bedien sich, gestützt auf die schon vor ihm von Lie, Klein u Reye eingeführten Begriffe, der sogenannten Kugelgeometri in welcher die Kugel als Raumelement betrachtet wird, sow der Kugelcomplexe und -Congruenzen zur Classification d Cycliden in 18 Species. Siehe weiter unten Kap. 14. Ver auch Bôcher, *Die Reihenentwicklungen der Potentialtheori* Leipzig 1894.

§ 8. Die Flächen 4ter Ordnung mit einer Doppelgerade

Die Gleichung dieser Fläche kann auf die folgende Art g schrieben werden (Kummer):

$$p^2S + 2pqS_1 + q^2S_2 = 0;$$

darin sind p, q lineare und die S quadratische Funktionen d Coordinaten. Der Schnitt der Ebenen $p = 0$, $q = 0$ ist d Doppelgerade der Fläche.

Dieser Gleichung lässt sich auch die Gestalt geben (Cayley):

$$\varphi_4(x_1, x_2) + \varphi_3(x_1, x_2)x_3 + \psi_3(x_1, x_2)x_4 + \\ + \varphi_2(x_1, x_2)x_3^2 + \psi_2(x_1, x_2)x_3x_4 + \chi_2(x_1, x_2)x_4^2 = 0;$$

bei sind die $\varphi_4, \varphi_3, \psi_3, \ldots$ *Functionen von* x_1, x_2 *vom* 4ten, *en, . . . Grad.*

Der Schnitt der Ebenen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ *ist die Doppel-rade der Fläche.*

Die Fläche ist im Allgemeinen von der 20ten *Klasse.*

Die Fläche enthält 16 Gerade ausser der Doppelgeraden; rner gibt es 64 dreifach berührende Ebenen, von denen jede ie Fläche in zwei Kegelschnitten schneidet; einer der vier Schnitt-unkte dieser letzteren liegt auf der Doppelgeraden und die brigen drei sind die drei Berührungspunkte der dreifach be-ührenden Ebene.

Die 16 Geraden liegen zu je zweien mit der Doppelgeraden i einer und derselben Ebene; sie gruppiren sich also in 8 Paare, on denen jedes die Doppelgerade schneidet.

Man erhält so 64 Kegelschnittpaare und 8 Geradenpaare; edes Kegelschnittpaar ist in Bezug auf jedes Geradenpaar so elegen, dass ein Kegelschnitt des Paares nur eine Gerade des Geradenpaares trifft und der andere Kegelschnitt die andere Gerade.

Die hauptsächlichsten Specialfälle, welche bei einer solchen Fläche auftreten können, sind die folgenden:

Eine der Tangentialebenen in den Punkten der Doppellinie kann immer dieselbe sein; *dieser Fall tritt ein, wenn die drei Functionen* $\varphi_2, \psi_2, \chi_2$ *der obigen Gleichung einen gemeinschaft-ichen Factor haben.*

Hier fällt eine der 16 Geraden der Fläche mit der Doppel-eraden zusammen.

Die beiden Tangentialebenen in jedem Punkt der Doppel-geraden können immer dieselben sein; *dies geschieht, wenn die drei eben genannten Functionen sich nur durch einen constanten Factor unterscheiden.*

Die Punkte der Doppelgeraden können ferner sämmtlich uniplanar sein; *alsdann ist diese Gerade eine Cuspidalgerade der Fläche;* die Tangentialebene in jedem Punkt der Cuspidalgeraden variirt dann von Punkt zu Punkt. *Dieser Fall tritt ein, wenn die drei letzten Terme sich auf die Form*

$$(x_1x_3 + x_2x_4)(x_3\varphi_1 + x_4\psi_1)$$

reduciren lassen, worin φ_1, ψ_1 *lineare Functionen in* x_1, x_2 *sind.*

Schliesslich kann es vorkommen, dass die Tangentialebene in den Punkten der Cuspidalgeraden immer dieselben sind; *die geschieht, wenn die drei letzten Terme auf einen der beiden Type*

$$x_1^2 x_3 x_4 \quad \text{oder} \quad x_1^2 x_3^2$$

zurückgeführt werden können.

In dem Fall der Cuspidalkante ist die Fläche 12ter Class

Eine Fläche 4ter Ordnung mit einer Doppelgeraden kan ausserhalb derselben bis 8 isolirte Doppelpunkte haben.

Die Gleichung einer Fläche 4ter Ordnung mit Doppelgerad und vier Doppelpunkten kann auf die folgende Art gefunde werden: Es mögen drei Flächen 2ten Grads $S = 0$, $S' = 0$, $S'' = 0$ die eine Gerade gemeinschaftlich haben, gegeben sein; sie werde ausserdem noch vier Punkte gemeinsam haben; *eine quadratisch Form von S, S', S'', gleich Null gesetzt, ist alsdann die Gleichun einer Fläche 4ter Ordnung, für welche diese Gerade und dies Punkte doppelt sind.*

In einem solchen Fall gibt es vier Ebenen, die durch di Doppelgerade und jeden der Doppelpunkte gehen und in jed der Ebenen liegen zwei Gerade der Fläche, welche sich in de Doppelpunkt schneiden.

Die Fläche 4ter Ordnung mit Doppelgerade und 8 Doppe punkten hat zur Gleichung

$$\begin{vmatrix} 0, & x_1, & x_2, & 1 \\ x_1, & a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ x_2, & a_{12}, & a_{22}, & a_{23} \\ 1, & a_{13}, & a_{23}, & a_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

worin a_{11}, a_{22}, a_{12} quadratische Formen in x_3 und x_4, ferne a_{23}, a_{13} lineare Formen und a_{33} eine Constante sind.

Es gibt 4 Ebenen, welche durch die Doppelgerade gehen un die Fläche längs je einer anderen Geraden berühren; auf jed dieser Geraden liegen zwei Doppelpunkte.

Die acht Doppelpunkte sind zu je vieren in 8 Ebenen g legen und durch jeden von ihnen gehen 4 solche Ebenen.

Auf diese Fläche kam Julius Plücker, *Neue Geometr des Raumes, gegr. auf die Betrachtung der geraden Linie a Raumelement*, mit einem Vorwort von Clebsch, in 2 Abth 1te Abth., Leipzig 1868, 2te Abth. von Klein herausg., ib. 186 1, N. 213, als er die Theorie der Liniencomplexe studiert Siehe Kap. 14.

Bezüglich der Theorie der Flächen, von welchen in diesem Paragraphen die Rede war, verweisen wir auf Salmon-Fiedler, *Geom. des Raumes*, 2, § 335 u. ff., den wir bei unserer Darstellung besonders benutzt haben; man sehe auch die in § 5 citirten Arbeiten von Kummer und Clebsch, *Math. Ann.*, 1, p. 260 nach. Ein Gipsmodell einer Fläche 4ter Ordnung mit Doppelgerade befindet sich auch unter den von L. Brill in Darmstadt besorgten Modellen.

§ 9. Die Römerfläche Steiner's.

Die Steiner'sche Fläche hat die Grundeigenschaft, dass sie von jeder ihrer Berührungsebenen in einem Paar Kegelschnitte geschnitten wird.

Sie besitzt drei Doppelgerade, die sich in einem Punkt treffen, der für die Fläche natürlich ein dreifacher Punkt ist.

Von den vier Schnittpunkten der beiden Kegelschnitte, in denen die Fläche von einer ihrer Berührungsebenen geschnitten wird, ist einer der Berührungspunkt und von den drei übrigen liegt jeder auf einer der drei Doppelgeraden.

Die Steiner'sche Fläche ist 3ter Classe und der von einem beliebigen Punkt an sie gezogene Berührungskegel ist 6ter Ordnung.

Diese Fläche gehört zu den von Kummer, *Berl. Monatsber.*, 1862, 1866, 1872 studirten Flächen, *die sich durch die Eigenschaft auszeichnen, dass sie vier singuläre Berührungsebenen haben, welche sie längs eines Kegelschnitts berühren; ihre Gleichung lautet:*

$$S^2 - \lambda X_1 X_2 X_3 X_4 = 0,$$

worin $S = 0$ eine Fläche 2ten Grads ist und

$$X_1 = 0,\ X_2 = 0,\ X_3 = 0,\ X_4 = 0$$

die Gleichungen der vier singulären Berührungsebenen sind.

Gibt man der Form S eine specielle in Bezug auf die X geeignete Gestalt, so erhält man verschiedene Flächen mit verschiedenen Eigenschaften; so lässt sich aus dieser allgemeinen Gleichung die Gleichung der Kummer'schen Fläche mit 16 Knotenpunkten ableiten; vergl. § 3; specialisirt man dagegen auf andere Art, so ergibt sich die Steiner'sche Fläche.

Der Gleichung einer solchen Fläche lässt sich ins Besondere die Form geben:

$$\{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 - 2X_1X_2 - 2X_2X_3 - 2X_3X_1 - \\ - 2X_1X_4 - 2X_2X_4 - 2X_3X_4\}^2 - 64X_1X_2X_3X_4 = 0$$

die man auch

$$\sqrt{X_1} + \sqrt{X_2} + \sqrt{X_3} + \sqrt{X_4} = 0$$

schreiben kann (Cayley).

Sie ist die reciproke Polarfläche der Fläche 3ter Ordnung mi 4 Doppelpunkten (die ja 4ter Classe ist, vergl. Kap. 11, § 1 *d. h. der sogenannten Cayley'schen Fläche.*

Wählt man zu Coordinatenebenen die drei Ebenen, vo denen jede zwei der Doppelgeraden enthält, und eine andere, s lässt sich die Gleichung der Steiner'schen Fläche auf die For

$$x_2^2x_3^2 + x_3^2x_1^2 + x_1^2x_2^2 - 2x_1x_2x_3x_4 = 0$$

reduciren, worin die drei Doppelgeraden die Kanten des Dreiflach

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0$$

sind. Kummer.

Eine besonders interessante Eigenschaft der Steiner'sche Fläche, welche zu ihrer ebenen Abbildung dient, wurde von Weierstrass gefunden, dem Steiner die Construction seiner Fläche mit getheilt hatte; sie besteht darin, *dass die homogenen Coordinate ihrer Punkte sich durch ternäre quadratische Formen ausdrücke lassen.* (Vergl. die Mittheilung von Kummer, *Crelle,* 64, p. 73.

Cayley und Clebsch zeigten dann (siehe die unten citirt Arbeit), *dass sie überdies die allgemeinste Fläche vom Geschlech Null ist, deren Coordinaten sich auf diese Art darstellen lasse*

Geht man von der ersten der oben angegebenen Formen de Gleichung aus, *so lassen sich die Formeln für diese Darstellun immer auf die folgenden reduciren:*

$$x_1 \equiv (y_1 + y_2 + y_3)^2,$$
$$x_2 \equiv (y_1 - y_2 - y_3)^2,$$
$$x_3 \equiv (-y_1 + y_2 - y_3)^2,$$
$$x_4 \equiv (-y_1 - y_2 + y_3)^2.$$

Legt man dagegen die zweite Form der Gleichung z Grund, *so ergiebt sich:*

$$x_1 \equiv 2y_2y_3,$$
$$x_2 \equiv 2y_3y_1,$$
$$x_3 \equiv 2y_1y_2,$$
$$x_4 \equiv y_1^2 + y_2^2 + y_3^2.$$

Mit Hülfe dieser Formeln lässt sich *die ebene Abbildung* er Fläche studiren, wie es Clebsch und später Andere gethan aben. In Bezug auf diese ebene Abbildung *hat die Fläche die Eigenschaft, dass sie sich eindeutig ohne aussergewöhnliche Punkte bbilden lässt.* Clebsch, *Math. Ann.*, 5.

Der Ort der Pole einer festen Ebene in Bezug auf alle Kegelschnitte einer Steiner'schen Fläche ist wiederum eine Steiner'sche Fläche. Lie.

Durch jeden Punkt der Steiner'schen Fläche gehen unendlich viele Kegelschnitte. Ausser den Flächen 2ten Grads und den Regelflächen 3ter Ordnung ist die Steiner'sche Fläche die einzige, welche diese Eigenschaft besitzt. Darboux, *Bull. des scienc. math.*, 2, 1880.

Zwei Kegelschnitte der Steiner'schen Fläche schneiden sich in nur einem Punkt und durch zwei Punkte geht im Allgemeinen nur ein Kegelschnitt.

In jeder Ebene des Raums gibt es 6 die Fläche osculirende Gerade und 4 sie doppelt berührende Gerade. Durch jeden Punkt des Raums gehen 9 sie osculirende Gerade.

Jede algebraische auf der Fläche liegende Curve ist von gerader Ordnung.

Alle ebenen Schnitte der Fläche sind rationale Curven; die Römerfläche ist die einzige Nicht-Regelfläche von solcher Beschaffenheit. Picard, *Traité d'analyse; Crelle,* 100; siehe auch Guccia, *Rend. Palermo,* 1.

Eine andere wichtige Eigenschaft der Steiner'schen Fläche hat Kronecker formulirt und Castelnuovo bewiesen (*Rend. Lincei,* 1894):

Ausser den Regelflächen ist die Steiner'sche die einzige irreducible Fläche, welche von jeder Ebene eines gewissen doppelt unendlichen Systems in reduciblen Curven geschnitten wird.

Die Paare von Berührungsebenen an die Fläche in den Punkten einer Doppelgeraden bilden eine Involution, der die Ebenen angehören, welche durch die beiden anderen Doppelgeraden gehen.

In jeder Doppelgeraden gibt es zwei Cuspidalpunkte.

Die vier Berührungskegelschnitte der singulären Ebenen schneiden sich zu je zweien in den Cuspidalpunkten; dieselben vier Kegelschnitte liegen auf einer Fläche 2ten Grads, welche die Doppelgeraden in den Cuspidalpunkten schneidet.

Die Haupttangentencurven der Steiner'schen Fläche sin Raumcurven 4ter Ordnung 2ter Species. Clebsch, Cremona.

Die 4 singulären Ebenen der Fläche sind die vier statio nären Ebenen für alle Haupttangentencurven.

Alle Haupttangentencurven 4ter Ordnung haben 3 Sehnen ge meinschaftlich, welche sich in dem dreifachen Punkt der Fläch schneiden; durch jede dieser Sehnen lassen sich an jede Curv 4ter Ordnung zwei osculirende Ebenen legen.

Die Haupttangentencurven werden auf der Fläche von un endlich vielen Curven 4ter Ordnung geschnitten, die 8 Punkte ge meinsam haben.

Jeder der vier Kegelschnitte, längs welchen die Fläche vo den 4 singulären Ebenen berührt wird, berührt 3 Kanten de Tetraeders der singulären Ebenen; zwei von ihnen schneiden sic auf einer Kante. Beltrami.

Es existiren ∞^3 Flächen 2ten Grads, welche die Fläche i vier Kegelschnitten schneiden.

Diese sogenannte *Römerfläche Steiner's* wurde etwa im Jah 1838 von Steiner während seines Aufenthalts in Rom entdeckt er hinterliess jedoch nichts Schriftliches über sie und es wa Kummer, der 1863 bei Gelegenheit seiner Arbeit über di Flächen 4ter Ordnung, die unendlich viele Kegelschnitte enthalte sie zuerst behandelte und sie in Folge von Mittheilungen vo Weierstrass (vergl. dazu die Note von Weierstrass in de *Berl. Monatsber.* 1863 oder *Crelle,* 64, p. 77) Steiner zuschrie

Spätere Untersuchungen sind von Schröter, *Berl. Monat ber.,* 1863; *Crelle,* 64; Cremona, *Crelle,* 63; *Rend. Ist. Lomb* 1867; Lampe, *Dissert.,* Berlin, 1864; Cayley, *Crelle,* 64 *Proc. London math. soc.,* 3, 5, 1873; Clebsch, *Crelle,* 67 Reye, Th., *Geometrie der Lage,* Hannover, 1877, 1880, p. 246 und Anderen.

Sturm, *Math. Ann.,* 3 betrachtete sie bei seinen Forschunge als specielle Fläche 3ter Classe und erzeugte sie daher mit Hülf eines Büschels von Flächen 2ten Grads und einer zu diese Büschel projectiven geraden Punktreihe.

In Folge ihrer wichtigen Eigenschaft, die Reciproke de Fläche 3ter Ordnung mit 4 conischen Punkten zu sein (verg Kap. 11, § 1), wurde sie oft mit dieser zusammen studirt un die Eigenschaften der einen aus denen der anderen abgeleite

Einige Sätze über diese Fläche 3ter Ordnung und ihre Reciproke fand Beltrami, dessen bez. Arbeiten bis 1863 zurückreichen, *Giorn. di Batt.*, 1; *Acc. Bologna*, 10, 1879.

Neuer ist die kleine separat erschienene Schrift von Gerbaldi, *La superficie di Steiner studiata nella sua rappresentazione analitica mediante le forme ternarie quadratiche*, Torino 1881, der sich die Aufgabe stellte, alle Eigenschaften der Fläche aus ihrer allgemeinsten ebenen Abbildung mit Hülfe der ternären quadratischen Formen zu entwickeln.

Man beachte jedoch, dass auch der allgemeinste Fall (siehe Kap. 4, p. 41 u. ff. der Gerbaldi'schen Arbeit) sich immer auf die specielle von Clebsch angegebene Abbildung zurückführen lässt. Schliesslich machen wir noch auf eine neue Arbeit von Zahlen, *Acta math.*, 19 aufmerksam.

Cayley, *Proc. London math. Soc.*, 3 untersuchte die Fälle, in denen zwei oder die sämmtlichen drei Doppellinien zusammenfallen und fand, dass die Fläche alsdann die Reciproke der speciellen Flächen 3ter Ordnung

$$x_1 x_3 x_4 + (x_1 + x_3) x_2^2 = 0$$

oder

$$x_1 x_3 x_4 + x_2^2 x_3 + x_1^3 = 0$$

wird.

Eine eingehende Betrachtung der Steiner'schen Fläche findet man in der S. 310 citirten Schrift Timerding's, *Ann. di mat.*, (3), 1, 1898. Vergl. auch Lacour, *Sur la surface de Steiner et Réduction à la forme canonique des formules qui donnent en fonction rationelle de deux paramètres les coordonnées d'un point de la surface de Steiner, Nouv. Annales de math.*, (3), 1, 1898.

In dem wiederholt citirten Catalog von L. Brill sind auch Modelle Steiner'scher Flächen aufgeführt.

§ 10. Die Regelflächen 4ter Ordnung.

Die Developpable 4ter Ordnung hat zur *Rückkehrkante* eine Raumcurve 3ter Ordnung; in Folge des engen Zusammenhangs, welcher zwischen den Raumcurven und ihren osculirenden Developpablen besteht (vergl. Kap. 9), reducirt sich mithin die Theorie der Developpablen 4ter Ordnung auf die der Raumcurven 3ter Ordnung, von welcher in Kap. 10, § 2 die Rede war.

Wir können hier nur einige wenige Bemerkungen hinzufügen.

Die Developpablen 4ter Ordnung sind vom Geschlecht Nu d. h. das Geschlecht eines jeden beliebigen ebenen Schnitts de selben ist Null.

Bezeichnet man mit $X_1 = 0$, $X_2 = 0$, $X_3 = 0$, $X_4 =$ die Gleichungen von vier Ebenen, *so lässt sich die Gleichung d Ebene, welche die Developpable einhüllt.*

$$X_1 t^3 + 3 X_2 t^2 + 3 X_3 t + X_4 = 0$$

schreiben und die Developpable selbst hat zur allgemeinen Gleichu

$$(X_1 X_4 - X_2 X_3)^2 - 4(X_2^2 - X_1 X_3)(X_3^2 - X_2 X_4) = 0.$$

Die Ebenen, welche zwei in verschiedenen Ebenen liegen Kegelschnitte berühren, die eine Tangente gemeinschaftlich habe hüllen eine Developpable 4ter Ordnung ein.

Wenn zwei Flächen 2ten Grads eine Gerade gemeins haben, so ist die abwickelbare ihnen umschriebene Fläche von d 4ten Ordnung.

Die Coordinaten eines Punkts der Rückkehrkante werd durch die Formeln ausgedrückt:

$$X_1 : X_2 : X_3 : X_4 = 1 : -t : t^2 : -t^3.$$

Wir gehen nun zu den windschiefen Regelflächen 4ter Or nung über.

Die windschiefe Regelfläche 4ter Ordnung ist auch 4ter Clas sie ist entweder vom Geschlecht Null oder vom Geschlecht in dem ersten Fall besitzt sie eine Doppelcurve doppelter Krü mung von der 3ten Ordnung, die entweder degenerirt ist od nicht (speciell eine dreifache Gerade sein kann), und ihre dopp berührende Developpable ist von der 3ten Classe; in dem zwei Fall hat sie eine degenerirte Doppelcurve 2ter Ordnung, und il doppelt berührende Developpable ist von der 2ten Classe.

Cremona und Cayley haben eine Classification die Flächen in 12 Arten vorgenommen, *von denen 10 vom Geschle Null und 2 vom Geschlecht 1 sind.* Zu diesen 12 Species fü Rohn, *Math. Ann.*, 24, p. 147 später eine neue mit einer *dr fachen* Geraden hinzu. Wir schliessen auch diese neue ein u unterscheiden daher die folgenden 13 Species:

a) *Flächen mit dreifacher Geraden.*

Auf der dreifachen Geraden gibt es 4 Punkte, in welch zwei der Tangentialebenen zusammenfallen.

Die Gleichung der Fläche lässt sich mit Ausnahme der Fälle IV und V (siehe unten) *auf die Form*

$$kx_1^2x_2^2 = x_1^2x_3(ax_1 + bx_2) + x_2^2x_4(cx_1 + dx_2)$$

reduciren, worin $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ die dreifache Gerade ist, die Punkte $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ und $x_1 = x_2 = x_4 = 0$ zwei der Punkte sind, in denen zwei der Berührungsebenen zusammenfallen, und $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ die doppelten Berührungsebenen in diesen Punkten darstellen.

Durch jeden der 4 Punkte, welche die eben angegebene Eigenschaft besitzen, geht eine Gerade (singuläre Erzeugende) und die Berührungsebene an die Fläche bleibt für alle Punkte dieser Geraden immer dieselbe.

Die Fläche ist stets vom Geschlecht Null.

Es lassen sich die folgenden 4 Unterfälle unterscheiden:

I. *(Die 8te Species Cremona's und die 9te Cayley's).*

Alle Geraden der Fläche schneiden die dreifache Gerade R.

Die drei durch einen Punkt von R gehenden Erzeugenden liegen nicht in derselben Ebene; sie bestimmen drei Ebenen, deren Enveloppe eine besondere Developpable 3ter Classe und 3ter Ordnung ist und zwar diejenige, welche die Fläche zweifach berührt.

Diese Fläche ist der Ort einer Geraden, welche sich so bewegt, dass sie eine feste Gerade schneidet und eine gegebene Developpable 4ter Ordnung in zwei Punkten berührt.

Die Gleichung der Fläche ist mit der oben angegebenen identisch; jedoch ist k seinem Wesen nach von Null verschieden.

II. *(Die 9te Species Cremona's, die 3te Cayley's).*

Es ist eine Gerade R′ der Fläche vorhanden, welche die dreifache Gerade R nicht schneidet.

Jede durch R′ gelegte Ebene enthält drei Erzeugende, die sich in einem Punkt von R schneiden und in jedem Punkt von R treffen sich Erzeugende, die in derselben Ebene mit R′ liegen; von jedem Punkt von R′ geht eine einzige Erzeugende aus.

Die Fläche lässt sich als Ort der Geraden auffassen, welche die entsprechenden Punkte einer zwischen den Punkten einer Geraden R und den Punkten einer ebenen Curve 3ter Ordnung mit einem Doppelpunkt O bestehenden projectiven Correspondenz (1, 1) verbinden; diese muss jedoch so festgesetzt werden, dass dem Schnittpunkt A von R mit der Ebene der Curve 3ter Ordnung der Schnittpunkt der Geraden AO mit dieser Curve entspricht.

Die Gleichung der Fläche ist mit der oben angegebenen iden tisch, wenn in dieser $k = 0$ gesetzt wird.

Die Gerade R′ ist die Enveloppe der dreifach berühren den Ebenen der Fläche; sie tritt, wenn sie dreimal gerechne wird, an die Stelle der doppelt berührenden Developpablen.

III. *(Die 3te Species Cremona's, die 12te Cayley's).*

Wenn durch jeden Punkt von R drei Erzeugende gehe von denen eine mit R zusammenfällt, so besteht die zweifach be rührende Developpable aus R und einem Kegel 2ten Grads.

Die Fläche ist der Ort der Geraden, welche die entsprechen den Punkte einer Geraden R und eines Kegelschnitts C verbinde die in solcher Beziehung (1, 2) zueinander stehen, dass jede Punkt von R zwei Punkte von C entsprechen, jedem Punkt vo C aber nur einer von R, wobei jedoch die Gerade und de Kegelschnitt einen Punkt gemeinschaftlich haben müssen, der i dieser Correspondenz kein Doppelpunkt ist.

Die Gleichung einer solchen Fläche ergibt sich aus der al gemeinen Gleichung, wenn $ad = bc$ gesetzt wird, so dass als die beiden Terme auf der rechten Seite einen Factor $ax_1 + b$ gemeinschaftlich haben.

IV. *(Die 10te Species Cremona's, die 6te Cayley's).*

Wenn durch jeden Punkt von R drei Erzeugende gehe von denen zwei mit R zusammenfallen, so besteht die doppe berührende Developpable aus dieser dreimal gerechneten Gerade R selbst.

Auf R gibt es zwei Punkte von der Beschaffenheit, das alle drei durch sie gehenden Erzeugenden mit R zusammenfalle

Die Fläche kann auf dieselbe Art wie in dem Fall II e zeugt werden, wenn man die Punkte A und O zusammenfalle lässt.

Die Gleichung der Fläche kann auf die Form

$$x_1^2 x_2^2 = (ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2)(x_1x_3 + x_2x_4)$$

zurückgeführt werden.

V. *(Die von Rohn gefundene Species).*

In dem Fall IV gibt es in jedem Punkt der dreifache Geraden R zwei feste und eine variabele Berührungsebene; nimm man an, die beiden festen Ebenen fallen zusammen, so erhä man den von Rohn, Math. Ann., 24, p. 147 entdeckten Fal Zwei Schalen der Fläche verzweigen sich längs der dreifache Geraden und haben diese zur Rückkehrkante. Auf der dreifache Geraden existirt ein einziger singulärer Punkt von der B

haffenheit, dass auch die dritte Erzeugende, die durch ihn geht, it R zusammenfällt. Nimmt man diesen Punkt zum Punkt $_1 = x_2 = x_3 = 0$, *so reducirt sich die Gleichung der Fläche uf die Form:*

$$_1{}^3x_4 + ax_1{}^2x_3x_4 + bx_1{}^4 + cx_1{}^3x_2 + dx_1{}^2x_2{}^2 + ex_1x_2{}^3 + fx_2{}^4 = 0.$$

---

b) *Flächen, die zur Doppelcurve eine nicht degenerirte cubische Raumcurve haben. Wenn eine Fläche* 4ter *Ordnung als Doppelcurve eine Raumcurve enthält, so ist sie n Allgemeinen eine Regelfläche; davon macht nur der Fall eine lusnahme, in welchem die Doppellinie aus drei durch denselben unkt gehenden Geraden besteht (die Steiner'sche Fläche,* siehe § 9).

Wenn die Doppelcurve eine *nicht* degenerirte cubische aumcurve ist, so sind nur die beiden folgenden Fälle zu nterscheiden:

VI. (*Die* 1te *Species Cremona's, die* 10te *Cayley's).*

Die Fläche wird durch die Geraden erzeugt, welche die entsprechenden Punkte zweier beliebig im Raum in verschiedenen Ebenen gelegener Kegelschnitte verbinden, die so beschaffen sind, dass zwischen den Punkten des einen und denen des anderen eine ein-eindeutige Zuordnung (1, 1) *besteht.*

Die Enveloppe der doppelt berührenden Ebenen ist eine allgemeine Developpable 3ter *Classe und* 4ter *Ordnung.*

Es gibt vier singuläre Erzeugende, in deren Punkten die Berührungsebene constant ist.

Die doppelte cubische Raumcurve hat vier Cuspidalpunkte; durch jeden der letzteren geht eine der singulären Erzeugenden.

Die Fläche ist vom Geschlecht Null.

Die Gleichung der Fläche lässt sich auf die Form

$$_{11}X_1{}^2 + a_{22}X_2{}^2 + a_{33}X_3{}^2 + 2a_{23}X_2X_3 + 2a_{31}X_3X_1 + 2a_{12}X_1X_2 = 0$$

educiren, worin

$$X_1 = x_2x_4 - x_3{}^2,$$
$$X_2 = x_2x_3 - x_1x_4,$$
$$X_3 = x_1x_3 - x_2{}^2$$

st.

Die Fläche kann auch als Ort der Geraden definirt werden, welche eine cubische Raumcurve in zwei Punkten schneiden und einem allgemeinen linearen Complex angehören; siehe Kap. 14; oder:

als Ort derjenigen Geraden, welche in zwei Punkten ein cubische Raumcurve und in einem Punkt einen eigentlichen Kegel schnitt treffen, der mit der Curve 3ter Ordnung zwei Punkt gemeinschaftlich hat; oder auch:

als Ort der Geraden eines linearen Complexes, in welchen sich zwei eine Raumcurve 3ter Ordnung osculirende Ebenen schneiden.

VII. *(Die 7te Species Cremona's, die 8te Cayley's).*

Nimmt man an, der lineare Complex, von dem in den vor stehenden Theoremen die Rede war, sei die Gesammtheit de Geraden, welche eine feste Gerade schneiden, so ergibt sich di Species VII, die wir hier betrachten wollen.

Die Fläche wird von den Geraden erzeugt, welche eine Raun curve 3ter Ordnung in zwei Punkten schneiden und eine gegeben Gerade R treffen.

Die dreimal gezählte Gerade stellt die doppelt berührend Developpable dar.

Die Fläche ist wieder vom Geschlecht Null.

Die Fläche lässt sich als Ort der Verbindungsgeraden d sich entsprechenden Punkte einer Geraden R und einer eben Curve 3ter Ordnung mit einem Doppelpunkt definiren, wenn zwisch den Punkten der Geraden und der Curve 3ter Ordnung eine ei eindeutige Correspondenz (1, 1) festgesetzt wird.

Die Gleichung der Fläche hat dieselbe Form, wie im vo hergehenden Fall, wenn man annimmt, zwischen den Coefficient bestehe die Beziehung:

$$a_{22}^2 + 2\,a_{22}a_{13} - 4\,a_{23}a_{12} + a_{11}a_{33} = 0.$$

---

c) *Flächen, welche zur Doppellinie einen Kegel schnitt und eine diesen schneidende Gerade habe Diese Flächen sind vom Geschlecht Null.*

Es werden zwei Fälle unterschieden:

VIII. *(2te Species Cremona's, 7te Cayley's).*

Die Fläche ist der Ort der Geraden, welche die entsprechen den Punkte eines Kegelschnitts C und einer Geraden R v binden, die in der Correspondenz (2, 1) stehen und keinen Pun gemeinschaftlich haben.

Die Gerade R ist die Doppelgerade.

Die doppelt berührende Developpable besteht aus eine Kegel 2ten Grads und der Geraden R.

Die Gleichung der Fläche lässt sich immer auf

$$x_1x_3 - x_2^2)^2 + mx_2x_4(x_1x_3 - x_2^2) + x_4^2(ax_1x_2 + bx_2^2) = 0$$

reduciren, worin b von Null verschieden ist. Der Doppelkegelschnitt liegt in der Ebene $x_4 = 0$ *und die Doppelgerade ist*

$$x_1 = x_2 = 0.$$

Die Fläche kann auch als Ort der Geraden definirt werden, welche die entsprechenden Punkte eines Kegelschnitts H und einer Geraden R verbinden, die in der Correspondenz $(2, 2)$ *stehen und sich schneiden; doch muss ihr Schnittpunkt nur sich selbst entsprechen. Der Kegelschnitt H und die Gerade R sind alsdann Doppelcurven.*

IX. *(4te Species Cremona's und 11te Cayley's).*

Nimmt man bei den Erzeugungsweisen im vorigen Fall an, der Kegelschnitt C und die Gerade R schneiden sich und ihr Schnittpunkt, als Punkt von C, falle mit einem der beiden ihm in R entsprechenden Punkte zusammen, so erhält man die Fläche IX.

Die doppelt berührende Developpable ist die dreifach gezählte Gerade R.

Der Kegelschnitt C wird in diesem Fall der Doppelkegelschnitt der Fläche (bei der Fläche VIII wird er es nicht).

Die Gleichung der Fläche ergibt sich aus der des vorigen Falles, wenn $b = 0$ *gesetzt wird.*

Auf dem Kegelschnitt gibt es einen und auf der Geraden zwei Cuspidalpunkte.

---

d) *Flächen, welche drei Gerade zu Doppellinien haben.* Die folgenden zwei Fälle, *die beide dem Geschlecht Null angehören,* sind zu unterscheiden.

X. *(Die 5te Species Cremona's, die 2te Cayley's).*

Eine der drei Geraden schneidet die beiden anderen, die sich ihrerseits nicht treffen. Dieser Fall kann aus den Fällen (c) dadurch abgeleitet werden, dass man den Doppelkegelschnitt in zwei verschiedene Gerade zerfallen lässt.

Die Fläche ist der Ort der Verbindungsgeraden der sich entsprechenden Punkte zweier in der Correspondenz $(2, 2)$ stehender windschiefer Geraden R, R', wenn die Bedingung hinzugefügt wird, dass jeder der Punkte, in welchen R, R' von einer dritten Geraden R'' getroffen werden, zwei zusammenfallenden Punkten in der anderen Geraden entsprechen soll.

Auf jeder der Geraden R, R' liegen zwei Cuspidalpunkte.

Die osculirende developpable Fläche besteht aus drei Gerade R, R', R''.

Durch jeden Punkt von R gehen zwei Erzeugende, in dere Ebene R' liegt und ebenso gehen von jedem Punkt von R' zw Erzeugende aus, in deren Ebene R liegt.

Nur die durch R'' gehenden Ebenen schneiden die Fläch in eigentlichen Kegelschnitten und nur die Punkte von R'' sin Spitzen von umschriebenen Kegeln 2ter Ordnung.

Dieselbe Fläche kann man als Ort der Geraden erhalte welche zwei windschiefe Gerade R, R' und einen Kegelschnitt treffen, der mit den Geraden keinen Punkt gemeinschaftlich ha oder:

als Ort der Geraden, welche zwei Gerade R, R' und ei Raumcurve 3ter Ordnung treffen, die von jeder der Geraden i einem Punkt geschnitten wird, oder auch:

als Ort der Geraden, welche die entsprechenden Punkte zwei in der Correspondenz $(1, 1)$ stehender Kegelschnitte verbinde vorausgesetzt, dass den Punkten, in welchen einer von ihnen d Schnittlinie der beiden Ebenen der Kegelschnitte trifft, d Punkte entsprechen, in denen der andere Kegelschnitt diesel Gerade schneidet; diese Gerade erscheint so als Doppelgerad oder auch:

als Ort der Geraden, welche die entsprechenden Punkte ein Geraden R und eines Kegelschnitts C verbinden, die keine Punk gemeinschaftlich haben und in der Correspondenz $(1, 2)$ stehe wenn nur dem Punkt r von R, in welchem R die Ebene von schneidet, in C zwei in einer Geraden mit r liegende Punkte r', entsprechen. Diese Gerade ist alsdann die Doppelgerade R'' d vorigen Construction; die Gerade R' trifft die Ebene des Kege schnitts in einem Punkt O, durch den alle Sehnen des Kege schnitts gehen, welche die beiden demselben Punkt von R en sprechenden Punkte verbinden.

Der Gleichung der Fläche kann man die Form geben:

$$x_1^2 x_3^2 + m x_1 x_2 x_3 x_4 + x_4^2 (a x_1 x_2 + b x_2^2) = 0.$$

Die drei Doppelgeraden sind:

$$(x_1 = 0,\ x_4 = 0),$$
$$(x_3 = 0,\ x_4 = 0),$$
$$(x_1 = 0,\ x_2 = 0).$$

XI. *(Die 6te Species Cremona's, die 5te Cayley's).*

Nehmen wir speciell an, die Gerade R'' falle mit R zu-
ammen, so ergibt sich eine andere Species von Regelflächen;
ie lässt sich als diejenige definiren, die aus der letzten Con-
truction des vorigen Falles hervorgeht, wenn vorausgesetzt wird,
er Punkt r falle mit O zusammen, d. h. also mit dem Punkt,
er allen Sehnen gemeinschaftlich ist, welche die Paare demselben
unkt von R entsprechender Punkte verbinden.

Die Fläche lässt sich also auch auf die folgende Art de-
niren:

Man stellt eine Correspondenz $(1, 1)$ *zwischen den Punkten
iner Geraden R und den durch R gehenden Ebenen her; diese
Ebenen schneiden einen Kegelschnitt C in je zwei Punkten, die, mit
em entsprechenden Punkt von R verbunden, die Erzeugenden der
Fläche liefern.*

*Die doppelt berührende Developpable wird durch die zwei-
nal gezählte Gerade R und eine andere Gerade R' dargestellt,
elche R in dem Punkt trifft, in dem R die Ebene von C
chneidet.*

*Auch die Doppelcurve wird durch diese nämlichen Geraden
largestellt.*

Die Gleichung der Fläche lässt sich auf die Form

$$(x_2 - \alpha x_1)^2 u_2 + (x_2 x_4 - x_1 x_3)(x_2 - \alpha x_1) u_1 + (x_2 x_4 - x_1 x_3)^2 = 0$$

educiren, worin u_2, u_1 Formen 2ten, 1ten Grads in x_1, x_2 sind.

Die Doppelgerade R' ist:

$$x_2 - \alpha x_1 = 0, \quad \alpha x_4 - x_3 = 0,$$

und die doppelt zu zählende Doppelgerade R:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0.$$

*Der Schnitt der Fläche ist im Allgemeinen eine Curve 4ter
Ordnung mit einem Selbstberührungspunkt in dem Punkt, in
welchem die Gerade R die Schnittebene trifft.*

---

e) *Regelflächen, die zwei Gerade zu Doppellinien
haben. Sie sind vom Geschlecht Eins;* man unterscheidet zwei
Fälle:

XII. *(11te Species Cremona's, 1te Cayley's).*

Die beiden Geraden treffen sich nicht. *Die Fläche lässt
sich als Ort der Geraden definiren, welche eine ebene Curve 4ter*

Ordnung mit zwei Doppelpunkten und zwei Gerade R, R' treffe von denen jede durch einen der Doppelpunkte geht.

Die Fläche kann auch als Ort der Geraden aufgefas werden, welche die entsprechenden Punkte zweier in der Corr spondenz $(2, 2)$ stehender Geraden R, R' verbinden.

Von jedem Punkt von R gehen zwei Erzeugende aus, d in einer durch R' gehenden Ebene liegen, und umgekehrt.

Die doppelt berührende Developpable besteht aus d Geraden R, R'.

Dieselbe Fläche lässt sich auch als Ort der Geraden d finiren, die zwei Gerade R, R' und eine allgemeine ebene Cur 3ter Ordnung treffen, die von jeder der beiden Geraden R, R' einem Punkt geschnitten wird.

Die allgemeine Gleichung der Fläche kann auf die For

$$x_1^2(a x_3^2 + 2 b x_3 x_4 + c x_4^2) + 2 x_1 x_2(a' x_3^2 + 2 b' x_3 x_4 + c' x_4^2) + x_2^2(a'' x_3^2 + 2 b'' x_3 x_4 + c'' x_4^2) = 0$$

reducirt werden.

Die beiden Doppelgeraden sind

$$(x_1 = 0,\ x_2 = 0),$$
$$(x_3 = 0,\ x_4 = 0).$$

Auf jeder Doppelgeraden gibt es 4 Cuspidalpunkte.

XIII. *(Die 12te Species Cremona's, die 4te Cayley's).*

Wir wollen uns denken, die beiden Doppelgeraden fall zusammen. Die Fläche XIII lässt sich dann aus der vorig durch die Annahme ableiten, die ebene Curve 4ter Ordnung halte einen *Selbstberührungspunkt,* indem sich die beiden Dopp punkte in einen einzigen vereinigen.

Die Fläche ist der Ort der Geraden, welche die entsprech den Punkte einer Geraden und einer allgemeinen ebenen Cur 3ter Ordnung verbinden, welche einen Punkt O mit der Gerad gemeinschaftlich hat und in der Correspondenz $(2, 1)$ zu ihr ste Diese Correspondenz muss speciell so angeordnet sein, dass Punktreihe auf der Geraden projectiv zu dem Strahlenbüschel dem Scheitel in O ist und dem Punkt O der Geraden die Ta gente an die Curve 3ter Ordnung in O entspricht; die beid Punkte der Curve 3ter Ordnung, welche alsdann einem Punkt Geraden entsprechen, sind jene beiden anderen Punkte, in welch der entsprechende Strahl die Curve 3ter Ordnung schneidet.

Diese Fläche hat zur Doppelcurve eine zweimal zu zählende Gerade und zur doppelt berührenden developpablen Fläche dieselbe zweimal zu zählende Gerade.

Die Gleichung der Fläche lässt sich schreiben:

$$u_4 + (x_2x_4 - x_1x_3)u_2 + (x_2x_4 - x_1x_3)^2 = 0,$$

worin u_4, u_2 Formen vom Grad 4, 2 in x_1, x_2 sind und die doppelt zu zählende) Doppelgerade

$$x_1 = 0, \; x_2 = 0$$

ist.

Die windschiefen Regelflächen 4ter Ordnung untersuchte Chasles, *Compt. Rend.*, 1861 und dann Cayley, der in einer ersten Abhandlung, *Phil. Trans.*, 1864 nur 8 Species unterschied; dann gab Cremona, *Mem. di Bologna*, 8, 1868 auf rein geometrische Art die Classification in 12 Species an, und im folgenden Jahr nahm Cayley, *Phil. Trans.*, 1869 das Thema wieder auf und fand von Neuem die 12 Species Cremona's. Später zeigte Rohn, *Math. Ann.*, 24, p. 147 bei Gelegenheit seiner Untersuchungen der Flächen 4ter Ordnung mit dreifacher Geraden und damit auch der Regelflächen mit dreifacher Geraden, dass Cremona und Cayley eine Species, die von uns mit V bezeichnete, übersehen hatten.

Das Studium der Regelflächen vom Gesichtspunkt der Realität oder Nichtrealität gewisser Elemente aus unternahm Rohn, *Math. Ann.*, 24, 28, der auch andere ähnliche Probleme behandelte, wie z. B. das in Bezug auf die Kummer'sche Fläche. Siehe weiter oben Kap. 12, § 3. Ueber die windschiefen Flächen 4ter Ordnung mit drei Doppelgeraden gibt es noch eine neuere Arbeit von Segen, *Crelle*, 112.

In dem wiederholt citirten Buch von Salmon-Fiedler sind die Hauptresultate Cayley's angegeben.

Die Brill'sche Sammlung von Modellen enthält eine ganze Reihe von Regelflächen 4ter Ordnung.

Andere Flächen 4ter Ordnung, die speciell untersucht wurden, sind ausser den von uns im Vorstehenden behandelten die folgenden:

Flächen 4ter Ordnung mit dreifachen Punkten oder Geraden, Lampe, *Diss.*, Berlin 1864; Rohn, *Math. Ann.*, 24.

Flächen 4ter Ordnung mit einer endlichen Anzahl von Gerade Sturm, *Math. Ann*, 4; Schur, *Math. Ann.*, 20.

Vier rationale Flächen 4ter Ordnung, Cremona, *Collec math. in memoriam D. Chelini, Mediolani*, 1881; Noether *Math. Ann.*, 33; Montesano, *Rend. Acc. Napoli*, 1900; etc.

In Bezug auf die letzteren weist Noether nach, *dass s die einzigen rationalen Flächen 4ter Ordnung ohne mehrfach Curven sind.*

Kapitel XIII.

lächen von höherer als der 4ten Ordnung. Regelflächen.

1. Flächen 5ter Ordnung, die nicht Regelflächen sind.

Von den bis jetzt untersuchten Flächen 5ter Ordnung ist ne der bemerkenswerthesten *die mit einer Doppelcurve 5ter Ordung.* Wir geben ihre Haupteigenschaften hier an:

Die Doppelcurve 5ter Ordnung der Fläche besitzt einen dreichen Punkt, der auch für die Fläche dreifach ist.

Die Fläche hat 10 Gerade; diese sind Sehnen der Doppelcurve.

Die Configuration dieser 10 Geraden ist dieselbe, wie die er 10 Geraden, welche von den 16 Geraden einer Fläche 4ter rdnung mit Doppelkegelschnitt übrig bleiben, wenn man eine on ihnen und die fünf, welche diese eine schneiden, weglässt; oder, as dasselbe ist, die Configuration ist dieselbe, wie die der 10 eraden, welche von den 27 Geraden einer Fläche 3ter Ordnung ibrig bleiben, wenn man zwei, die ein windschiefes Paar bilden, nd die 15 weglässt, die entweder die eine oder die andere ieser beiden Geraden treffen. Daraus folgt:

Jede der 10 Geraden schneidet drei andere von ihnen; die 10 Geraden sind zu je zweien in 15 Ebenen vertheilt und treffen ich in 15 Punkten; durch jede Gerade gehen drei der 15 Ebenen; n jeder der 15 Ebenen gibt es 5 Schnittpunkte von Geraden und urch jeden der Schnittpunkte gehen 5 Ebenen.

Es existiren 5 windschiefe Quadrupel von Geraden (Systeme on 4 Geraden, die sich zu je zweien nicht treffen).

Die Fläche lässt sich auf die Ebene abbilden.

Auf der Doppelcurve liegen 8 Cuspidalpunkte.

Es leuchtet ein, dass es auf der Fläche 10 Systeme von benen Curven 4ter Ordnung gibt, nämlich die Schnitte der Fläche mit den Ebenen, die durch eine der 10 Geraden gehen.

Jede Curve 4ter Ordnung eines Systems schneidet die Dopp curve in zwei festen Punkten; diese beiden Punkte sind identis mit den Punkten, in denen die Doppelcurve von der Geraden troffen wird, welche zu diesem System von Curven 4ter Ordnu gehört; die Curve 4ter Ordnung schneidet dann die Doppelcur noch in drei weiteren Punkten, die für die Curve 4ter Ordnu natürlich Doppelpunkte sind.

In jedem System gibt es zwei Curven 4ter Ordnung, wel die Gerade berühren, zu welcher dieses System gehört; die Ebe dieser beiden Curven 4ter Ordnung sind stationäre Berührun ebenen; die Berührungspunkte sind parabolische Punkte.

Zwei Curven 4ter Ordnung, die zwei verschiedenen Systen angehören, haben entweder 4 oder 3 Punkte gemeinschaftlich, nachdem die Geraden, die den beiden Systemen entsprechen, s schneiden oder nicht.

Zu den 5 windschiefen Quadrupeln von Geraden stel 5 Systeme von Kegelschnitten auf der Fläche in einer solch Beziehung, dass jeder Kegelschnitt eines Systems die 4 Gera eines Quadrupels schneidet und die übrigen 6 nicht.

Jeder Kegelschnitt trifft die Doppelcurve in 4 Punkten; z Kegelschnitte desselben Systems schneiden sich nicht; zwei Ke schnitte verschiedener Systeme schneiden sich im Allgemeinen einem Punkt.

Die Fläche besitzt im Ganzen 35 dreifach berühre Ebenen, von denen 20 die Fläche in zwei Kegelschnitten u einer Geraden treffen und 15 in zwei Geraden und einer Cu 3ter Ordnung; durch jede Gerade der Fläche gehen zwei Ebe der ersten und drei der zweiten Art.

Die hauptsächlichsten charakteristischen Zahlen für die Flä sind (siehe Kap. 9, § 1):

$a = 10$, die Ordnung des umschriebenen Kegels, dessen
$\delta = 12$, die Anzahl der Doppelerzeugenden dieses Kegels
$\varkappa = 18$, die Zahl der Rückkehrerzeugenden desselben Keg
$n' = 12$, die Klasse der Fläche.
$b' = 25$, die Klasse der doppeltberührenden developpablen Fläc
$c' = 24$, die Classe der Developpablen der stationä Ebenen.
$\sigma' = 20$, die Ordnung der parabolischen Curve.

Durch jeden Punkt der Fläche gehen 4 Doppeltangenten 12 osculirende Gerade.

In jeder beliebigen Ebene gibt es 15 die Fläche osculire und 20 sie doppelt berührende Gerade. Von den in einem Pu

r Fläche an diese gezogenen Tangenten berühren 4 auch ch sonst.

Um die Fläche projectiv zu construiren, verfährt man, wie lgt:

Man verbindet die entsprechenden Punkte zweier homo-aphischer ebener Systeme und sucht die Schnittpunkte dieser erbindungsgeraden mit den Ebenen eines zu diesen ebenen ıstemen correlativen Bündels auf; man erhält dann die in Rede hende Fläche; der dreifache Punkt ist das Centrum des Bündels. el Re.

Die hier besprochene Fläche wurde von Clebsch, *Math. nn.*, 3 und Cremona, ib., 4 eigentlich nur erwähnt. Eingehen-r beschäftigte sich mit ihr R. Sturm, *Ueber die Flächen mit ner endlichen Zahl von Geraden, vorzugsweise die der vierten nd fünften Ordnung,* ib., 4 und Caporali, der ihr seine ichtige Doctordissertation, *Ann. di mat.,* 7 widmete.

Eine Abart dieser Fläche ist der Ort der Berührungspunkte er von einem festen Punkt aus an die Flächen 2ten Grads iner Schar gelegten Tangentialebenen; dieser Ort wurde von Darboux, *Bull. des scienc. math.,* 1871 studirt; die Fläche hat ie Eigenthümlichkeit, dass sechs ihrer Geraden durch den drei-achen Punkt gehen. Andere Arbeiten über dieselbe Fläche sind on Del Re, dem die oben angegebene projective Erzeugung zu erdanken ist, *Acc. Napoli,* 1886; *Rend. Lincei,* 1890; *Acc. Torino,* 1893.

Eine andere Fläche 5ter Ordnung ist die *mit einer Doppel-urve 3ter Ordnung;* sie wurde, wie die vorige, ins Besondere nit Hülfe ihrer ebenen Abbildung studirt.

Sie enthält 11 einander nicht schneidende Gerade, die Sehnen ler Doppelcurve 3ter Ordnung sind; sie enthält ferner 55 Kegel-schnitte, von denen jeder zwei der Geraden in einem Punkt schneidet. Zwei der Kegelschnitte schneiden sich entweder nicht oder sie schneiden sich, je nachdem die Geradenpaare, denen sie uf die vorstehende Art zugeordnet sind, Gerade gemeinschaftlich haben oder nicht.

Die Fläche hat 220 dreifach berührende Ebenen, die zu je 20 durch jede der Geraden der Fläche gehen, und 55 andere dreifach berührende Ebenen, in denen die 55 Kegelschnitte liegen, und schliesslich noch weitere dreifach berührende Ebenen, welche die Fläche in nicht degenerirten Curven 5ter Ordnung schneiden.

Legt man durch eine Gerade der Fläche das Ebenenbüsche so schneidet eine jede dieser Ebenen die Fläche noch einmal in eine ebenen Curve 4ter Ordnung; diese Curven treffen die Gerade in zw festen und zwei beweglichen Punkten, von denen die letzteren ei Involution bilden; es gibt daher zwei besondere Ebenen, dere Curve 4ter Ordnung die Gerade berührt. Die beiden feste Schnittpunkte der Curven vierter Ordnung mit der Geraden sin mit den Punkten identisch, in denen die Gerade die Doppelcur 3ter Ordnung schneidet.

Auf der Doppelcurve 3ter Ordnung liegen 10 Cuspidalpunk der Fläche.

Diese Fläche untersuchten Clebsch, *Math. Ann.*, 1, d ihre ebene Abbildung seinen Forschungen zu Grund legte, un R. Sturm, ib., 4. Andere Arbeiten über denselben Gegenstan sind von Del Re, *Lincei*, 1892, 1893; *Acc. Modena*, 9, 189

Die Fläche 5ter Ordnung mit einer Doppelcurve 4ter Or nung 1ter Species wurde von Clebsch, *Gött. Abh.*, 15; *Math. An* 3; Noether, ib., 3; R. Sturm, ib., 4 studirt; eine Fläche 5t Ordnung mit einer dreifachen Geraden behandelte Cremon in seiner Abhandlung über die *Trasf. biraz. dello spazio, Rend Istit. Lomb.*, 1871 und später Del Re, *Lincei*, 1891; vergl. auc R. Sturm, *Math. Ann.*, 4, p. 281; eine Fläche 5ter Ordnun die zwei doppelte windschiefe Gerade besitzt, untersuchte Clebsc *Math. Ann.*, 1 wieder mit Hülfe ihrer ebenen Abbildung.

Mit rationalen Flächen 5ter Ordnung befassten sich auc Hill, *Math. Review*, 1; *Americ. Journ.*, 19 und Montesan *Rend. Acc. Napoli*, 1900, 1901.

§ 2. Developpable Flächen 5ter Ordnung.

Jede Developpable 5ter Ordnung ist von der 4ten Class hat eine Inflexionserzeugende und eine Doppelcurve 2ter Ordnun

Jeder ihrer ebenen Schnitte ist vom Geschlecht Null; mith ist auch die Fläche vom Geschlecht Null.

Sie hat zur Rückkehrkante eine Raumcurve 4ter Ordnu 1ter Species mit einem Cuspidalpunkt, der dreifacher Punkt d Fläche ist.

Sie ist die zweien Flächen 2ter Ordnung, welche eine stationä Berührung in einem Punkt miteinander haben, umschriebene Dev loppable.

Die Developpable 5ter Ordnung ist die Enveloppe der zweien egelschnitten gemeinschaftlichen Berührungsebenen, falls sich diese ei Kegelschnitte in einem Punkt treffen, und der eine in dem meinsamen Punkt den Schnitt der Ebenen der beiden Kegelhnitte berührt. Cremona.

Jede Erzeugende der Fläche trifft eine andere Erzeugende, die remona der ersteren *conjugirt* nannte; der Ort der Schnittpunkte veier conjugirter Erzeugender ist natürlich der Doppelkegelhnitt *K*. Ebenso wollen wir *die Punkte conjugirt* nennen, in nen zwei conjugirte Erzeugende die Cuspidalcurve *C* berühren, id *die Ebenen conjugirt*, welche die Developpable in zwei njugirten Erzeugenden berühren.

Alle Geraden, welche zwei conjugirte Punkte der Raumcurve er Ordnung verbinden, gehen durch denselben Punkt; dieser ist r Punkt C, in welchem die Inflexionserzeugende der Developpaen die Ebene schneidet, welche die Curve 4ter Ordnung in dem ationären Punkt A osculirt. Diese sämmtlichen Geraden bilden e Erzeugenden eines Kegels 2ten Grads S.

Die Ebene, welche zwei conjugirte Erzeugende enthält, berührt stets denselben Kegel 2ten Grads S. Die Schnittlinie zweier njugirter Ebenen berührt immer den Doppelkegelschnitt K und gt daher in einer festen Ebene.

Die Inflexionserzeugende wird von den Paaren conjugirter benen in Paaren von Punkten einer Involution geschnitten, deren oppelpunkte der Punkt B, in welchem die Curve 4ter Ordnung n der Inflexionserzeugenden berührt wird, und der Punkt C nd, in dem diese Erzeugende die Ebene schneidet, welche die Curve ter Ordnung in A osculirt.

Die conjugirten Punkte auf der Curve 4ter Ordnung sind armonisch conjugirt in Bezug auf die Spitze des Kegels 2ten rads S, von dem oben die Rede war, und die Ebene des Doppelegelschnitts K. Eine ähnliche Eigenschaft besteht für *die conigirten Ebenen.*

Unter *anharmonischem Verhältniss von 4 Punkten der Raumurve 4ter Ordnung* versteht man das anharmonische Verhältniss er 4 Ebenen, die durch die 4 Punkte und die Gerade gehen, elche den stationären Punkt *A* der Curve 4ter Ordnung mit em Punkt *D* verbindet, wenn man unter *D* den Schnittpunkt er durch *A* gehenden Erzeugenden der Developpablen mit er Ebene versteht, welche die Developpable längs der Inexionserzeugenden berührt.

Analog versteht man unter *anharmonischem Verhältniss v* *4 Berührungsebenen der Developpablen* dasjenige der 4 Punkt in denen diese Ebenen die Gerade schneiden, welche d Punkt B, in dem die Curve 4ter Ordnung von der Inflexion erzeugenden berührt wird, mit dem Punkt C verbindet, in welche diese Erzeugende die in A die Curve 4ter Ordnung osculiren Ebene trifft.

Man erhält dann:

Der Doppelkegelschnitt K ist die Enveloppe einer Ebe welche die Raumcurve in 4 Punkten trifft, die eine äquianh monische Gruppe bilden.

Der Kegel 2ter Ordnung S ist der Ort der Punkte, v welchen sich an die Developpable 4 Tangentialebenenen zieh lassen, die eine äquianharmonische Gruppe bilden.

Der Ort der Punkte, von welchen sich 4 harmonische E rührungsebenen an die Developpable ziehen lassen, ist eine Flä 3ter Ordnung und 4ter Classe.

Die Enveloppe der Ebenen, welche die Raumcurve 4ter O nung in 4 harmonischen Punkten schneiden, ist eine Fläche Ordnung und 3ter Classe.

Bezeichnet man mit $X_1 = 0$, $X_2 = 0$, $X_3 = 0$, $X_4 =$ vier Ebenen, so kann die Gleichung der Developpablen Ordnung

$$X_1^3 X_4^2 - 18 X_1^2 X_3^2 X_4 + 54 X_1 X_2^2 X_3 X_4 + \\ + 81 X_1 X_3^4 - 27 X_2^4 X_4 - 54 X_2^2 X_3^3 = 0 \qquad \text{(Schwa}$$

geschrieben werden; darin ist $X_4 = 0$ eine stationäre Eb der Punkt

$$X_1 = X_2 = X_3 = 0$$

der dreifache Punkt der Fläche, d. h. der Cuspidalpunkt Rückkehrcurve; die Inflexionserzeugende ist die Gerade:

$$X_3 = X_4 = 0,$$

und der Doppelkegelschnitt:

$$X_2 = 0, \; X_1 X_4 - 9 X_3^2 = 0.$$

Die Berührungsebene der Fläche wird durch die Gleich

$$X_1 t^4 + 4 X_2 t^3 + 6 X_3 t^2 + X_4 = 0$$

dargestellt, in welcher t einen beliebigen Parameter bedeutet, zwei Erzeugende enthaltende Ebene durch:

$$X_1 t^4 - 6 X_3 t^2 - 3 X_4 = 0,$$

ıd der von diesen Ebenen eingehüllte Kegel S durch die Gleichung:

$$X_1 X_4 - 3 X_3^2 = 0.$$

Die Ebene

$$X_1 t^3 + 3 X_2 t + 3 X_3 = 0$$

ht durch die Erzeugenden der Developpablen und umhüllt den egel 2ten Grads

$$3 X_2^2 - 4 X_1 X_3 = 0,$$

f welchem auch die Curve 4ter Ordnung liegt, die sich als Schnitt eses und des vorigen Kegels ergibt; diese Kegel haben die erührungsebene $X_1 = 0$ gemeinschaftlich und die Spitze des eiten Kegels liegt auf dem ersten, d. h. die Verbindungsgerade er Spitzen ist eine Erzeugende des ersten Kegels.

Die Coordinaten X_1, X_2, X_3, X_4 eines Punkts der Rückkehrante erhält man aus

$$X_1 : X_2 : X_3 : X_4 = 3 : -2t : t^2 : -t^4.$$

Mit den developpablen Flächen 5ter Ordnung beschäftigten ich Cayley, *Cambr. Journ.*, 5, 1850 = *Coll. math. papers*, 1, . 500; *Quart. Journ.*, 1864 = *Coll. math. papers*, 5, p. 267; Chasles, *Compt. Rend.*, 1862, p. 317, 418, 715; Cremona, ., p. 604; H. A. Schwarz, *Crelle*, 64. Ueber eine analytische Behandlung der von Cremona stammenden Theoreme siehe D'Ovidio und Salvatore Dino, *Giorn. di Batt.*, 3.

§ 3. Windschiefe Regelflächen 5ter Ordnung.

Die windschiefen Regelflächen 5ter Ordnung sind entweder vom Geschlecht Null, oder vom Geschlecht 1, oder vom Geschlecht 2. Die Flächen:

vom Geschlecht Null enthalten sämmtlich eine entweder degenerirte oder nicht degenerirte Doppelcurve 6ter Ordnung (wenn man auch eine vierfache Gerade als 6 zusammenfallende Doppelgerade und mithin als eine specielle Degeneration einer Doppelcurve 6ter Ordnung auffasst);

vom Geschlecht 1 eine Doppelcurve 5ter Ordnung, die entweder degenerirt ist oder nicht;

vom Geschlecht 2 eine degenerirte Doppelcurve 4ter Ordnung.

Die Flächen vom Geschlecht Null und vom Geschlecht 1 haben ein unendliches System ebener Curven 3ter Ordnung; davon sind diejenigen Flächen nullten Geschlechts ausgenommen, die eine

gerade Directrix besitzen, durch deren Punkte immer eine ein zige zweite Erzeugende geht.

H. A. Schwarz, *Crelle*, 67 *hat sie in 10 Arten vom Geschlecl Null, 4 vom Geschlecht 1 und eine vom Geschlecht 2 classificir*

Die windschiefen Regelflächen *vom Geschlecht Null* lasse sich auf eine der beiden folgenden Arten erzeugen:

I. *Man lässt die Punkte einer Geraden und einer ebene Curve 4ter Ordnung vom Geschlecht Null einander ein-eindeuti entsprechen; der Ort der die entsprechenden Punkte verbinden den Geraden ist im Allgemeinen eine windschiefe Regelfläch vom Geschlecht Null und von der 5ten Ordnung.*

II. *Man ordnet die Punkte zweier ebenen Curven 3ter Ord nung vom Geschlecht Null, die einen sich selbst entsprechende Punkt gemeinschaftlich haben, einander ein-eindeutig zu; der Or der Geraden, welche die sich entsprechenden Punkte verbinde ist eine windschiefe Regelfläche nullten Geschlechts und 5ter Ordnun*

Diese letztere Erzeugungsweise kann man auch durch ein andere ersetzen:

II. bis) *Man ordnet die Punkte eines Kegelschnitts und d einer Curve 3ter Ordnung vom Geschlecht Null einander ein-ei deutig zu; der Ort der die entsprechenden Punkte verbindende Geraden ist eine rationale windschiefe Regelfläche 5ter Ordnun*

Bei dieser letzteren Construction kann der Kegelschnitt i eine Doppelgerade zerfallen; man verfährt dann so, dass ma eine Correspondenz (2, 1) zwischen den Punkten der Gerade und der Curve 3ter Ordnung herstellt.

Die Gleichung einer auf die erste Art erzeugten Fläch lässt sich durch Elimination von t aus zwei Gleichungen vo Typus

$$X_1 t^4 + X_2 t^3 + X_3 t^2 + X_4 t + X_5 = 0,$$
$$X_6 t + X_7 = 0$$

bilden, worin die $X = 0$ Ebenen des Raums darstellen.

Die Gleichung einer auf die zweite Art erzeugten Fläch erhält man im Allgemeinen durch Elimination von t aus d beiden Gleichungen:

$$X_1 t^3 + X_2 t^2 + X_3 t + X_4 = 0,$$
$$X_5 t^2 + X_6 t + X_7 = 0.$$

An Stelle der zweiten dieser Gleichungen kann man natürlich ne lineare Combination der beiden und mithin eine in t cubi-che Gleichung substituiren).

Bei der ersten Construction ergibt sich eine rationale wind-chiefe Regelfläche mit einer vierfachen Geraden (der Geraden $X_6 = X_7 = 0$). *Der Typus I von* H. A. Schwarz.

Durch die zweite Construction erhält man im Allgemeinen indschiefe Regelflächen, welche zur Doppellinie eine Curve 6ter *Ord-ung mit einem dreifachen Punkt haben. Typus II.*

Diese Curve 6ter Ordnung kann degeneriren; es ergeben sich ann die folgenden anderen Fälle: *Die Doppelcurve besteht aus:*

III. *einer dreifachen Geraden und einer cubischen Raum-urve, die mit der dreifachen Geraden zwei Punkte gemeinschaft-ich hat;*

alle Erzeugenden treffen die dreifache Gerade (Leitgerade, erade Directrix);

IV. *einer dreifachen Leitgeraden, einem Kegelschnitt und iner Geraden;*

V. *einer dreifachen und einer doppelten Leitgeraden und wei doppelten Geraden;*

VI. *einer Leitgeraden, einer Raumcurve* 5ter *Ordnung mit inem dreifachen Punkt und mit drei scheinbaren Doppelpunkten; ie Curve hat zwei Punkte mit der Geraden gemeinschaftlich;*

VII. *einer Leitgeraden, einer Raumcurve* 4ter *Ordnung mit inem Doppelpunkt und einer anderen Geraden; die Curve* 4ter *Ordnung schneidet die gerade Directrix in einem Punkt;*

VIII. *einem Kegelschnitt und einer Raumcurve* 4ter *Ordnung mit einem Doppelpunkt; der Kegelschnitt geht durch den Doppel-unkt und durch 2 andere Punkte der Raumcurve* 4ter *Ordnung;*

IX. *drei Kegelschnitten mit einem gemeinsamen Punkt, die ich zu je zweien in einem weiteren Punkt schneiden;*

X. *einer geraden Directrix und einer Raumcurve* 5ter *Ord-nung mit einem Doppelpunkt.*

Die windschiefen Regelflächen 5ter Ordnung *vom Geschlecht* 1 dagegen lassen sich auf die nachstehende Art erzeugen:

Man denkt sich in einer Ebene eine allgemeine Curve 3ter *Ordnung und nimmt auf ihr einen Punkt an, von welchem aus die übrigen Punkte der Curve projicirt werden; diese werden so in Paare vereinigt; denkt man sich ferner, die Curve verdoppele sich in zwei Curven, deren Ebenen getrennt sind, und ein Punkt*

der einen entspreche demjenigen der beiden Punkte der Paare d anderen Ebene, mit dem er vor der Spaltung nicht zusammenfi so ist der Ort der Geraden, welche die entsprechenden Punk verbinden, eine windschiefe Regelfläche vom Geschlecht 1. H. A Schwarz.

Es sind die folgenden Arten zu unterscheiden:

XI. *Die Fläche mit einer Doppelcurve 5. Ordnung; dur jeden Punkt der letzteren gehen zwei Erzeugende, von denen je die Doppelcurve in noch zwei Punkten schneidet.*

Durch jeden Punkt des Raums gehen 5 Ebenen, von den jede mit der Fläche zwei Gerade gemeinschaftlich hat.

Durch jeden Punkt der Fläche gehen zwei ebene auf d Fläche liegende Curven 3ter Ordnung.

XII. *Die Fläche mit einer dreifachen Leitgeraden und eine doppelten Kegelschnitt.*

XIII. *Die Fläche mit einer dreifachen Leitgeraden, ein doppelten Leitgeraden und einer doppelten Geraden.*

XIV. *Die Fläche mit einer doppelten Leitgeraden und ein doppelten Raumcurve 4ter Ordnung.*

Die windschiefen Regelflächen 5ter Ordnung *vom Geschlec* 2 schliesslich kann man sich auf die folgende Art entstand denken.

Man betrachtet eine ebene Curve 4ter Ordnung mit eine Doppelpunkt und das von dem letzteren ausgehende Strahle büschel und denkt sich eine gerade, nicht in derselben Ebene liegen Punktreihe (a) projectiv derart auf das Büschel bezogen, dass e bestimmter Punkt der Geraden mit einem der beiden Schnittpunk zusammenfällt, in welchen der dem Punkt entsprechende Stra die Curve 4ter Ordnung trifft; der Ort der Geraden, welche jed Punkt P der Geraden mit den beiden variabelen Punkten verbi den, in welchen der dem Punkt P entsprechende Strahl die Cur 4ter Ordnung schneidet, ist eine Regelfläche 5ter Ordnung vo Geschlecht 2.

Die Gerade (a) ist dreifache Leitgerade der Fläche, a welcher noch eine andere doppelte Leitgerade existirt.

Näheres findet man in der citirten Arbeit von H. A. Schwar der wir die vorstehenden Resultate entnommen haben.

§ 4. Flächen 6ter Ordnung oder Classe.

Eine Fläche 6ter *Classe* wurde von Seligmann Kantor, *Wien. Ber.* 1879, (79), 2, p. 768 untersucht; sie entsteht folgendermassen:

Man betrachtet drei Punkte A_1, A_2, A_3 im Raum und eine Fläche 2ten Grads F_2. Von einem variabelen Punkt P der letzteren werden die Punkte A auf die Fläche 2ten Grads projicirt; die Ebenen der Projectionen der drei Punkte umhüllen die Fläche 6ter Classe.

Die Fläche lässt sich auf eine Ebene abbilden; sie hat eine vierfach berührende Ebene (die Ebene der drei Punkte A), welche die Fläche in jedem der Berührungspunkte osculirt.

Zwei Berührungsebenen an die Fläche, welche sich in einer Geraden a der vierfach berührenden Ebene E schneiden, werden durch E und die Ebene harmonisch getrennt, welche durch den Pol von E in Bezug auf die Fläche 2ten Grads und durch a geht.

Der Fläche ist ein Kegel 3ter Classe doppelt umschrieben, dessen Spitze in dem eben genannten Pol liegt.

In der vierfach berührenden Ebene giebt es drei Gerade (die Seiten des Dreiecks $A_1 A_2 A_3$) von der Beschaffenheit, dass durch jede von ihnen unendlich viele die Fläche doppelt berührende Ebenen gehen.

Die zu dieser Fläche dualistische Fläche ist natürlich von der 6ten Ordnung, hat einen vierfachen Punkt, drei durch diesen gehende Doppelgerade und eine ebene Doppelcurve 3ter Ordnung.

Derselbe Autor (Kantor) hat an dem angegebenen Ort auch eine andere Fläche untersucht:

Man betrachtet 4 Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 und eine Fläche 2ten Grads F_2, projicirt von einem Punkt von F_2 die 4 Punkte auf F_2 und erhält so 4 andere Punkte

$$A_1', A_2', A_3', A_4';$$

die beiden Tetraeder (A) und (A') sind homolog; *ihre Homologieebene hüllt eine Fläche 6ter Classe ein.*

Eine weitere Fläche 6ter Ordnung wurde von Emil Weyr, *Ueber Flächen sechsten Grades mit einer dreifachen cubischen Curve, Wien. Ber.*, 1882 (85, 2. Abth.) p. 513 studirt; man erhält sie auf die folgende Art:

Auf einer Raumcurve 3ter Ordnung betrachtet man ei Involution von 4 Punkten; *die Kanten des Tetraeders d 4 Punkte einer jeden Gruppe erzeugen eine Regelfläche 6ter Or nung, welche die Curve 3ter Ordnung zur dreifachen Curve h Die Seitenflächen des Tetraeders osculiren eine Curve 3ter Clas*

Der der Fläche umschriebene Kegel, dessen Spitze in eine beliebigen Punkt des Raums liegt, ist 6ter Classe und hat die durch diesen Punkt gehenden Osculationsebenen der eben genan ten Curve 3ter Classe zu dreifachen Berührungsebenen.

Noch eine andere Fläche 6ter Ordnung betrachtete Noethe *Math. Ann.* 3, p. 203 u. ff. *Sie besitzt als Doppelcurve ei Raumcurve 3ter Ordnung und eine Gerade, welche diese Cur nicht schneidet.*

Ihre Gleichung lässt sich schreiben:

$$\sum A_{ik} y_i y_k = 0, \qquad (i, k = 1, 2, 3);$$

darin ist

$$y_1 = L_2 M_3 - L_3 M_2,$$
$$y_2 = L_3 M_1 - L_1 M_3,$$
$$y_3 = L_1 M_2 - L_2 M_1;$$

die L, M sind in den Coordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 homogene linea Functionen und die A ergeben sich aus den Formeln

$$A_{ik} = \alpha_{ik} x_3^2 + 2\beta_{ik} x_3 x_4 + \gamma_{ik} x_4^2.$$

Jede Ebene des Büschels

$$x_4 - \lambda x_3 = 0$$

schneidet die Fläche ausser in der doppelt gezählten Axe d Büschels in einer variabelen rationalen Curve 4ter Ordnung (n drei Doppelpunkten).

Die Gleichung der Fläche enthält 18 Constante, weil d Existenz der Doppelcurve 3ter Ordnung und der Doppelgerade wie Noether beweist, 66 Constante absorbirt.

Ausser der Doppelgeraden besitzt die Fläche 10 Gerade.

Die Fläche enthält 12 Kegelschnitte und 32 Raumcurv 3ter Ordnung.

Diese Curven liegen zu je zweien zugleich mit der Doppelcur 3ter Ordnung auf demselben Hyperboloid und gehen durch dieselb beiden Punkte der Doppelgeraden.

*Jede von ihnen hat 5 Punkte mit der Doppelcurve 3ter Or nung gemeinschaftlich und keine schneidet eine der 10 Gerad

Jede der 32 Curven 3ter Ordnung ist 6 Kegelschnitten zugeordnet, welche sie in je einem Punkte schneidet.

Vertheilt man die 12 Kegelschnitte derart in 6 Paare, dass in dasselbe Paar diejenigen kommen, die durch die nämlichen Punkte der Doppelgeraden gehen, und wählt aus 5 Paaren der Kegelschnitte beliebig aus, so existirt immer eine der 32 Raumcurven 3ter Ordnung, welche die 5 gewählten Kegelschnitte in je einem Punkt schneidet; der sechste von derselben Curve geschnittene Kegelschnitt bleibt auf diese Art eindeutig bestimmt.

Die Fläche ist vom Geschlecht Null und deshalb auf die Ebene abbildbar. Diese ebene Abbildung sowie viele andere Eigenschaften wurden von Noether l. c. studirt.

Andere Flächen 6ter Ordnung sind die sogenannten *Berührungsflächen* der Kummer'schen Fläche, deren Studium aus der Untersuchung der hyperelliptischen Functionen vom Geschlecht 2 hervorging. *Sie berühren die Kummer'sche Fläche längs einer Curve 12ter Ordnung.*

In Bezug auf ihre Gleichung, die man *rational* nennt, *weil ihre Coefficienten rationale Invarianten der binären Form 6ter Ordnung sind*, siehe Pascal, *Ann. di mat.*, (2), 19.

Noch andere Flächen 6ter Ordnung wurden von Pieri, *Acc. Torino*, 1889; Humbert, *Compt. Rend.*, 1895; Del Pezzo, *Acc. Napoli*, 1897; etc. betrachtet.

Wir wollen schliesslich noch Einiges über *die developpablen Flächen 6ter Ordnung* sagen.

Die Rückkehrcurve einer solchen Fläche kann nicht von höherer als der 6ten und geringerer als der 4ten Ordnung sein.

Die Fläche ist immer vom Geschlecht Null, d. h. das Geschlecht eines jeden ihrer ebenen Schnitte ist Null.

Es gibt 3 Arten von Developpablen 6ter Ordnung, nämlich:

1. *Die Fläche, deren Rückkehrkante eine Raumcurve 4ter Ordnung entweder 1ter oder 2ter Species ist. In dem ersteren Fall hat diese Raumcurve einen wirklichen und zwei scheinbare Doppelpunkte: d. h. sie ist der Schnitt zweier Flächen 2ter Ordnung, welche sich in einem Punkt berühren; in dem 2ten Fall hat sie 3 scheinbare Doppelpunkte.*

Ihre charakteristischen Zahlen sind (über die Bedeutung der Symbole vergl. Kap. 9, § 4):

$m = 6,\quad \alpha = 4,\quad \beta = 0,\quad x = 6,\quad y = 4,\quad g = 6,\quad \lambda =$
$\tau = 0,\quad k = 6,\quad R = 6.$

Ihr ebener Schnitt ist eine Curve 6ter Ordnung und Clas
mit 4 Spitzen, 6 Doppelpunkten, 4 Inflexionstangenten un
6 Doppeltangenten.

Andere Eigenschaften findet man in Kap. 10, § 4, S. 26:

2. *Die Fläche, deren Rückkehrkante eine Raumcurve 5ter Or*
nung mit 2 Spitzen und 4 scheinbaren Doppelpunkten ist.

Ihre charakteristischen Zahlen sind:

$m = 5,\quad \alpha = 2,\quad \beta = 2,\quad x = 5,\quad y = 5,\quad g = 4,\quad \lambda =$
$\tau = 0,\quad k = 4,\quad R = 6.$

Der ebene Schnitt der Fläche ist 6ter Ordnung und 5ter Clas
mit 5 Doppelpunkten, 5 Spitzen, 2 Wendungen und 4 Doppe
tangenten.

3. *Die Fläche, deren Rückkehrkante eine Raumcurve 6ter Or*
nung mit 4 Spitzen und 6 scheinbaren Doppelpunkten ist.

Ihre charakteristischen Zahlen sind:

$m = 4,\quad \alpha = 0,\quad \beta = 4,\quad x = 4,\quad y = 6,\quad g = 3,\quad \lambda =$
$\tau = 0,\quad k = 3,\quad R = 6.$

Die 4 Ebenen, welche längs der 4 Cuspidalerzeugenden b
rühren, gehen durch den nämlichen Punkt.

Ihr ebener Schnitt ist 6ter Ordnung und 4ter Classe m
6 Spitzen, 4 Doppelpunkten, 3 Doppeltangenten und kein
Wendung.

Die allgemeine Gleichung der Developpablen 6ter Or
nung kann auf die folgende Art aufgestellt werden:

Es seien $X_1 = 0, \ldots, X_5 = 0$ die Gleichungen von 5 Ebene
die Formen X sind dann natürlich durch eine lineare Beziehu
verbunden, die wir

$$a_1 X_1 + 4 a_2 X_2 + 6 a_3 X_3 + 4 a_4 X_4 + a_5 X_5 = 0$$

schreiben wollen.

Die Gleichung der Developpablen 6ter Ordnung lautet da
(Cayley):

$$(X_1 X_5 + 4 X_2 X_4 + 3 X_3^2)^3 -$$
$$- 27 (X_1 X_3 X_5 - X_1 X_4^2 - X_2^2 X_3 + 2 X_2 X_3 X_4 - X_3^3)^2 =$$

Die Rückkehrkante ist der (partielle oder totale) Schnitt d
beiden Flächen

$$X_1 X_5 - 4 X_2 X_4 + 3 X_3^2 = 0,$$
$$X_1 X_3 X_5 - X_1 X_4^2 - X_2^2 X_3 + 2 X_2 X_3 X_4 - X_3^3 = 0.$$

Die Doppel- oder Knotencurve wird durch die Gleichungen bestimmt:

$$\frac{X_1 X_3 - X_2^2}{X_1} = \frac{X_1 X_4 - X_2 X_3}{2 X_2} = \frac{X_1 X_3 + 2 X_2 X_4 - 3 X_3^2}{6 X_3} =$$
$$= \frac{X_2 X_5 - X_3 X_4}{X_4} = \frac{X_3 X_5 - X_4^2}{2 X_5},$$

und die Schnittpunkte der Knotencurve und der Rückkehrkante durch:

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{X_2}{X_3} = \frac{X_3}{X_4} = \frac{X_4}{X_5}.$$

Die verschiedenen Arten von Developpablen 6ter Ordnung unterscheiden sich nach der Beschaffenheit der Coefficienten $a_1, \ldots, a_5$, d. h. nach der Beschaffenheit der Wurzeln der Gleichung 4ten Grads, die diese Zahlen zu Coefficienten hat. Cayley.

Sind nämlich diese Wurzeln ungleich, so erhält man die Developpable mit einer Rückkehrkante 6ter Ordnung.

Sind zwei Wurzeln gleich, so ist die Rückkehrkante 5ter Ordnung.

Sind dagegen zwei Paare von Wurzeln gleich, so hat die Developpable eine Rückkehrkante 4ter Ordnung 2ter Species.

Wenn die 4 Wurzeln eine harmonische Gruppe bilden, so ergibt sich die Developpable mit der Rückkehrkante 4ter Ordnung 1ter Species.

Wenn schliesslich 3 oder 4 Wurzeln gleich sind, so degenerirt die Developpable in andere Developpable 5ter bez. 4ter Ordnung.

Mit diesen Developpablen 6ter Ordnung beschäftigten sich Cayley, *Cambr. Math. Journ.*, 5, 1850; *Quart. Journ.* 7, 1865; 9, 1867; *Ann. di mat.*, 2, 1868, p. 99 u. 219, etc.; Salmon, *Cambr. Math. Journ.*, 1850; Chasles, *Compt. Rend.*, 54, 1862; H. A. Schwarz, *Crelle*, 64.

Die windschiefen Regelflächen 6ter Ordnung untersuchte Bergstedt, *Om regelytor af 6 graden*, Dissert., Lund 1886; Fink, *Ueber windschiefe Flächen im Allgemeinen und insbesondere über solche des 6ten Grads.* Tübinger Dissert., auch in dem Correspondenzblatt für die Gelehrten- und Realschulen Württembergs,

1887; Wiman, *Classification af regelytorna af 6 graden*, Lu 1892. Vergl. auch Wiman, *Acta math.*, 19.

§ 5. Die Developpablen 7ter Ordnung.

Die Rückkehrcurve einer Developpablen 7ter Ordnung ka entweder von der 5ten, 6ten oder 7ten Ordnung sein.

Wir führen hier zuerst ein Theorem an, welches für al Developpablen ungerader Ordnung gilt:

Bei jeder abwickelbaren Fläche ungerader Ordnung ist d Anzahl der Inflexionsberührungsebenen ungerade und ebenso ist d Anzahl der Spitzen der Rückkehrcurve ungerade. H. A. Schwar

Alle Developpablen bis zur 7ten Ordnung inclusive si vom Geschlecht Null, weil ihre ebenen Schnitte dieses Geschle haben; daraus folgt, dass für sie die Summe der Zahlen, welc die Ordnung der Rückkehrkante und die Ordnung der Knote curve angeben, constant ist.

Diese sämmtlichen Flächen bis zur 7ten Ordnung inclusi lassen sich als Enveloppen von Ebenen auffassen, in deren Gl chungen ein Parameter t rational eingeht, d. h. von Ebenen, d durch Gleichungen von der Form

$$X_1 t^n + X_2 t^{n-1} + \cdots = 0$$

dargestellt werden; darin ist n eine ganze positive Zahl und d X sind in den Coordinaten lineare Ausdrücke.

Cayley nannte diese Developpablen *planar*; ihnen ist d Arbeit von H. A. Schwarz, *Crelle*, 64 gewidmet.

Die charakteristischen Zahlen für die drei Species von D veloppablen 7ter Ordnung sind die folgenden (Schwarz l. c.):

1. *die Rückkehrcurve ist 5ter Ordnung:*

$$m = 7,\ g = 10,\ h = 5,\ \alpha = 5,\ \beta = 1,\ x = 10,\ y = 8,\ \lambda =$$
$$\tau = 2,\ k = 22,\ R = 13;$$

2. *die Rückkehrcurve ist 6ter Ordnung:*

$$m = 6,\ g = 7,\ h = 7,\ \alpha = 3,\ \beta = 3,\ x = 9,\ y = 9,\ \lambda =$$
$$\tau = 1,\ k = 18,\ R = 12;$$

3. *die Rückkehrcurve ist 7ter Ordnung:*

$$m = 5,\ g = 5,\ h = 10,\ \alpha = 1,\ \beta = 5,\ x = 8,\ y = 10,\ \lambda =$$
$$\tau = 0,\ k = 15,\ R = 11.$$

§ 6. Regelflächen von beliebiger Ordnung.

Wir haben auf S. 207 und ff. einige allgemeine Eigenschaften er algebraischen Regelflächen angegeben und dann auf S. 223, 230 noch andere sie betreffende Sätze hinzugefügt; diese beziehen sich auf die Ordnung, die Classe, das Geschlecht, die Knotencurve der Regelflächen, auf die Curven, die sich auf ihnen beschreiben lassen, etc. Wir wollen jetzt, ohne uns zu wiederholen, noch einige andere interessante Sätze anführen.

Wir bemerken vor Allem die projective Eigenschaft:

Jede Ebene, welche eine Erzeugende der windschiefen Regelfläche enthält, berührt die Fläche in einem und nur in einem Punkt; das Büschel von Berührungsebenen ist projectiv zu der Punktreihe der Berührungspunkte längs der Erzeugenden. Chasles.

Wir bemerken ferner die folgenden metrischen Eigenschaften:

Schneidet man eine Regelfläche mit Ebenen, die einer festen Ebene parallel sind, so bilden die in den Punkten derselben Erzeugenden an die Schnittcurven gelegten Tangenten ein hyperbolisches Paraboloid.

Auch die Normalen der Fläche in den Punkten einer Erzeugenden bilden ein hyperbolisches Paraboloid (das Normalenparaboloid).

Centralpunkt einer Erzeugenden heisst der Fusspunkt des Lothes, welches dieser Erzeugenden und der ihr unendlich nahen gemeinschaftlich ist; der Ort aller Centralpunkte bildet die sogenannte *Strictionslinie.* Chasles.

Der Centralpunkt einer Erzeugenden ist der Scheitel des Normalenparaboloids.

Centralebene in Bezug auf eine Erzeugende nennt man die Ebene, die durch die Erzeugende und das dieser und der ihr unendlich nahen Erzeugenden gemeinschaftliche Loth geht, und *Schiefe* einer Berührungsebene wird dann wohl der Winkel zwischen ihr und der Centralebene in Bezug auf die durch den Berührungspunkt gehende Erzeugende genannt.

Die Tangente der Schiefe einer Berührungsebene ist dem Abstand des Berührungspunkts von dem Centralpunkt proportional.

Die Centralebene berührt in dem Centralpunkt; die Centralebene und die Berührungsebene in dem unendlich fernen Punkt der Erzeugenden stehen senkrecht aufeinander.

Parameter einer Erzeugenden heisst der Abstand ihres Cen-

tralpunkts von dem Punkt, in welchem die Schiefe der Berüh rungsebene $\frac{\pi}{4}$ beträgt.

Wenn eine Ebene durch eine Erzeugende einer windschiefe Fläche geht, so ist das Product der Abstände des Centralpunkt von den beiden Punkten, in welchen die Ebene berührt be normal ist, constant *und dem Quadrat des Parameters gleic* Chasles.

Wenn zwei windschiefe Flächen sich in allen Punkten ein Erzeugenden unter constantem Winkel schneiden, so hat die Gerade denselben Parameter und denselben Centralpunkt, m man sie nun als zur einen oder zur anderen Fläche gehörig b trachten und umgekehrt.

Auf den windschiefen Regelflächen sind gewisse singulä Punkte und Gerade bemerkenswerth; nehmen wir an, eine g wisse Erzeugende schneide die ihr unendlich nahe; alsdann wi der Schnittpunkt der beiden unendlich nahen Erzeugende *Cuspidalpunkt (Spitze, sommet)* genannt, während die Erzeugend auf welcher dieser Punkt liegt, *singulär (arête, Kante, Torsa linie)* und die (Berührungs)-Ebene, welche durch die singulä Erzeugende und die ihr unendlich nahe geht, *singuläre Berü rungsebene* heisst.

Offenbar gehört der Cuspidalpunkt der Doppel- oder Knote linie an.

Wenn n die Ordnung und a der Rang*) der windschiefe *Fläche ist, so wird die Anzahl der singulären Erzeugenden*

$$T = 2a - 2n.$$

Sturm, *Math. Ann.* 6; Schubert, ib., 17.

Da eine Gerade des Raums durch 4 Bedingungen bestimm wird, so erhält man im Allgemeinen eine Regelfläche, wenn d Geraden vorgeschrieben wird, dass sie entweder drei gegebe Curven treffen soll, oder eine Curve zweimal und eine ande einmal oder schliesslich eine Curve dreimal.

Es bietet sich nun das Problem dar, die Charakteristike der Regelflächen zu bestimmen, welche diese Curven auf d angegebene Art zu *Leitlinien* haben. Damit beschäftigten sic Cayley, *Cambr. Journ.*, 7, 1852 = *Coll. math. papers*, 2, p. 3

---

*) Man pflegt *Rang* einer Fläche die Ordnung a des ihr un schriebenen Kegels oder die Classe a' ihres ebenen Schnitts zu nenne (siehe Kap. 9, § 1, S. 208, 209).

Phil. Trans., 153, 1863 = *Coll. math. papers*, 5, p. 168; Salmon, *Cambr. Journ.*, 8, 1853; *Trans. Irish Acad.*, 23 und später Rupp, *Math. Ann.*, 18.

Doch, ehe wir die Resultate mittheilen, zu denen sie geommen sind, müssen wir noch Einiges über die Singularitäten hinufügen, welche die Regelflächen auch sonst noch besitzen können.

Eine Erzeugende einer Regelfläche kann *doppelt* sein, d. h. erart, dass für jeden ihrer Punkte zwei verschiedene Berühungsebenen an die Fläche existiren; fallen diese beiden Ebenen ür jeden ihrer Punkte zusammen, so ist sie eine *stationäre Erzeugende.*

Jede Erzeugende, die durch die stationären Punkte einer Leitcurve geht, ist eine stationäre Erzeugende und im Allgemeinen kann eine stationäre Erzeugende nicht anders entstehen.

Die Doppellinie der Regelfläche lässt sich in verschiedene Theile zerlegen, von denen einige auch *Leitlinien* der Regelfläche sind und andere nicht. Wir bezeichnen nun mit

D_N die Summe der Zahlen, welche die Ordnungen der Doppel-(Knoten-)Curven angeben, die zugleich Leitlinien sind;

R_N die Summe der Zahlen, welche die Ordnungen der Doppelcurven angeben, mit Ausnahme der Doppelcurven, die zugleich Leitlinien sind, und mit Ausnahme der doppelten Erzeugenden;

G_N die Anzahl der doppelten Erzeugenden mit Ausnahme der stationären;

T_N die Summe der drei vorstehenden Zahlen, d. h. die Anzahl der Doppelpunkte (mit Ausnahme der Spitzen) eines ebenen Schnitts der Regelfläche;

G_S die Anzahl der stationären Erzeugenden;

T die Anzahl der singulären Erzeugenden (siehe oben);

a den Rang der Regelfläche (siehe oben).

Man erhält dann die folgenden Resultate:

1ter Fall. Drei einfache Leitcurven φ, ψ, χ
von den Ordnungen m_1, m_2, m_3,
den Classen r_1, r_2, r_3,
den Geschlechtern p_1, p_2, p_3,
mit h_1, h_2, h_3 *scheinbaren Doppelpunkten und*
β_1, β_2, β_3 *Cuspidalpunkten.*

Es ist:

$n = 2m_1m_2m_3$ (die Ordnung der Regelfläche),

$D_N = \frac{1}{2}m_1m_2m_3(m_1m_2 + m_2m_3 + m_3m_1)$,

$$G_N = \tfrac{1}{2} m_1 m_2 m_3 (m_1 + m_2 + m_3 - 3) + \\ + m_1 m_2 h_3 + m_2 m_3 h_1 + m_3 m_1 h_2,$$

$$R_N = \tfrac{1}{2} m_1 m_2 m_3 [4 m_1 m_2 m_3 - (m_1 m_2 + m_2 m_3 + m_3 m_1) - \\ - 2(m_1 + m_2 + m_3) + 5],$$

$$2 T_N = 2 m_1 m_2 m_3 (2 m_1 m_2 m_3 - 2) - \\ - (m_1 m_2 r_3 + m_2 m_3 r_1 + m_3 m_1 r_2) - \\ - 3(m_1 m_2 \beta_3 + m_2 m_3 \beta_1 + m_3 m_1 \beta_2)$$

$$G_S = \beta_1 m_2 m_3 + \beta_2 m_3 m_1 + \beta_3 m_1 m_2,$$

$$a = 2 m_1 m_2 m_3 + m_1 m_2 r_3 + m_2 m_3 r_1 + m_3 m_1 r_2,$$

$$T = 2(m_1 m_2 r_3 + m_2 m_3 r_1 + m_3 m_1 r_2).$$

2ter Fall. Eine doppelte Leitcurve φ und eine einfache

$$n = m_2 \{h_1 + \tfrac{1}{2} m_1 (m_1 - 1)\},$$

$$D_N = \tfrac{1}{2} m_2 \{h_1^2 - h_1 + m_1 m_2 (m_1 - 1)^2 - m_1 (m_1 - 1)\},$$

$$G_N = h_1 h_2 + \tfrac{1}{4} m_1 m_2 (m_1 - 1)(m_2 - 1) + \\ + 3 m_2 (m_1 - 2) \{h_1 - \tfrac{1}{6} m_1 (m_1 - 1)\}$$

$$R_N = m_2 \{\tfrac{1}{2} h_1 (m_1 - 2)(m_1 - 3) + \\ + \tfrac{1}{8} m_1 (m_1 - 1)(m_1 - 2)(m_1 - 3)\} + \\ + m_2 (m_2 - 1) \{\tfrac{1}{2} h_1^2 + \tfrac{1}{2} h_1 (m_1^2 - m_1 - 1) - \\ + \tfrac{1}{8} m_1 (m_1 - 1)(m_1^2 - 5 m_1 + 2)\},$$

$$2 T_N = m_2^2 \{h_1 + \tfrac{1}{2} m_1 (m_1 - 1)\}^2 - m_2 h_1 - \tfrac{3}{2} m_1 m_2 (m_1 - 1) - \\ - r_1 m_2 (m_1 - 3) - h_1 r_2 - 3 \beta_2 \beta_1 - 3 \beta_1 m_2 (m_1 -$$

$$G_S = \beta_2 h_1 + \beta_1 m_2 (m_1 - 2),$$

$$a = r_1 m_2 (m_1 - 3) + m_1 m_2 (m_1 - 1) + h_1 r_2 - 3 \beta_1 m_2,$$

$$T = r_1 m_2 (2 m_1 - 5) + 2 h_1 r_2 - 3 \beta_1 m_2.$$

3ter Fall. Die Curve φ ist eine dreifache Leitlinie; die Regelfläche besteht in diesem Fall aus den die Curve dreimal schneidenden Geraden; vergl. auch Kap. 9, § 4, S. 230.

$$n = (m - 2) \{h - \tfrac{1}{6} m (m - 1)\},$$

$$D_N = \tfrac{1}{2} m (h - m + 2)(h - m + 1),$$

$$G_N = \tfrac{1}{4} \{- m^4 + 18 m^3 - 71 m^2 + 78 m - \\ - 48 m h + 132 h + 12 h^2$$

$$R_N = \tfrac{1}{2} h^2 m (m - 1) - \tfrac{1}{6} h (m^4 - 5 m^3 + 5 m^2 - 49 m + 120) - \\ + \tfrac{1}{72} (m^6 - 6 m^5 + 31 m^4 - 270 m^3 + 868 m^2 - 840 n$$

$$T_N = m^2h^2 - 4mh^2 + 6h^2 -$$
$$- \tfrac{1}{3}(m^4 - 5m^3 + 11m^2 + 14m - 78)h +$$
$$+ \tfrac{1}{36}(m^6 - 6m^5 + 13m^4 + 90m^3 - 518m^2 + 636m),$$
$$G_S = \beta(h - 2m + 6),$$
$$a = -2h^2 + h(m^2 + 5m - 24) -$$
$$- \tfrac{1}{6}(16m^3 - 84m^2 + 104m) - 3\beta(h - 2m + 6),$$
$$T = -4h^2 + 2h(m^2 + 4m - 22) - 5m^3 + 27m^2 -$$
$$- 34m - 6\beta(h - 2m + 6).$$

Man erhält eine Regelfläche auch, wenn die sich entsprechenden Punkte zweier Curven (*Leitlinien*) verbunden werden, die in der Correspondenz (α_1, α_2) stehen; *sind* m_1, m_2 *die Ordnungen der beiden Curven, so ist die Ordnung der Regelfläche* $m_1\alpha_2 + m_2\alpha_1$.

Von dem Standpunkt der Liniengeometrie aus (vergl. Kap. 14) werden die Regelflächen als Schnitte dreier Liniencomplexe definirt; sie können entweder der vollständige Schnitt oder ein Theil des Schnitts sein.

In den folgenden Formeln nehmen wir den ersten Fall an.

Wenn die drei Complexe von den Ordnungen m_1, m_2, m_3 *sind, so ist die Ordnung der Regelfläche* $n = 2m_1m_2m_3$ *und ihr Rang*

$$a = 2m_1m_2m_3(m_1 + m_2 + m_3 - 2) - 2G_N,$$

worin G_N, *wie oben, die Anzahl der Doppelerzeugenden der Fläche angibt (und angenommen wird, dass die Fläche keine stationäre Erzeugende habe).*

Die Ordnung der Doppelcurve ist

$$D = m_1m_2m_3\{2m_1m_2m_3 - (m_1 + m_2 + m_3) + 1\}$$

und das Geschlecht der Fläche

$$p = m_1m_2m_3(m_1 + m_2 + m_3 - 4) - 1 - G_N.$$

Diese Formeln können jedoch Modificationen unterliegen, je nach den verschiedenen Eigenthümlichkeiten der Complexe.

Wenn einer der gegebenen Complexe linear ist $(m_3 = 1)$, *so sind die algebraischen Asymptotencurven (die Haupttangenten-*

curven) der Fläche, d. h. diejenigen, deren Tangenten die Fläch osculiren (eine dreipunktige Berührung mit der Fläche haben vergl. S. 204), von der Classe (dem Rang)

$$12\,m_1 m_2 (m_1 + m_2 - 2)$$

und der Ordnung

$$2\,m_1 m_2 (m_1 + m_2 - 1).$$

Diese Zahlen ändern sich jedoch, wenn die gegebene Complexe specielle Beziehungen zu einander haben; wenn z. B auch $m_2 = 1$ ist, so gelten diese Zahlen nicht mehr, falls di beiden linearen Complexe eine *specielle Congruenz* gemeinschaf lich haben. Siehe Voss, *Math. Ann.*, 8, p. 82, 83.

Es gibt auf der Fläche eine einfache Unendlichkeit vo Punkten, in denen eine Tangente die Fläche *vierpunktig berüh*

Die Curve dieser Punkte vierpunktiger Berührung ist vo der Ordnung

$$2\,m_1 m_2 m_3 \{6(m_1 + m_2 + m_3) - 19\}$$

und enthält

$$8\,m_1 m_2 m_3 \{3(m_1 + m_2 + m_3) - 10\}$$

Punkte, in welchen sie Erzeugende der gegebenen Regelfläch berührt; diese Erzeugenden sind stationäre Tangenten an eine alg braische Haupttangentencurve.

Ueber die Tangenten, die mit der Regelfläche eine Berü rung 4ter Ordnung haben, siehe Voss, l. c., p. 99.

Die Regelfläche n^{ter} Ordnung ohne vielfache Erzeugende un und vom Geschlecht Null hat den Rang $2(n-1)$ und enthä eine Doppelcurve von der Ordnung $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$.

Es gibt $2(n-2)(n-3)$ Erzeugende, welche die Doppe curve berühren, $\frac{1}{6}(n-2)(n-3)(n-4)$ dreifache Punkte un ebensoviele dreifach berührende Ebenen.

Es existiren $2(n-2)$ singuläre Erzeugende (Kanten, Torsa linien) in dem oben definirten Sinn.

Die durch die Tangenten vierpunktiger Berührung erzeug Regelfläche ist von der Ordnung $8(n-3)$ und ebensogross ist d Anzahl der Punkte, in welchen die Curve dieser Berührung punkte eine Erzeugende berührt. Das Geschlecht dieser Rege fläche ist $4n-13$.

Es gibt auf einer solchen Regelfläche n^{ter} Ordnung $10(n-4)$ *unkte, in welchen eine Tangente eine Berührung 4ter Ordnung it der Fläche hat.*

Die Asymptotenlinien einer Regelfläche von der $(n_1+n_2)^{\text{ten}}$ rdnung und vom Geschlecht Null, die zu Leitlinien eine n_1 nd eine n_2-fache Gerade hat, sind algebraische Curven und n der Ordnung $2(n_1+n_2-1)$. Cremona, *Ann. di mat.*,). 1.

Wenn die beiden Leitgeraden sich unbegrenzt bis zum Zummenfallen einander nähern, so werden die Asymptotenlinien m Geschlecht Null und der Ordnung $2n_1+n_2-2$, falls $\geq n_2$ ist. Cremona, l. c.

Die hauptsächlichsten und grundlegenden metrischen Eigenhaften der Regelflächen fanden und studirten besonders Monge, *dd. à la géom. déscript.;* Hachette, *Crelle,* 8; Chasles, *Journ. Liouville,* 2; etc.; siehe auch die *darstellende Geometrie* von e La Gournerie.

Cayley, Salmon, Rupp beschäftigten sich in ihren oben tirten Arbeiten mit den Problemen in Bezug auf die charakristischen Zahlen der Regelflächen mit bestimmten Leitlinien.

Die Asymptotenlinien der Regelflächen studirten Clebsch, *relle.* 68; Cremona, l. c.; Voss l. c.; Pittarelli, *Rend. incei,* 1891—1894 und Andere.

Speciellen Regelflächen ist das Buch De La Gournerie's, *ech. sur les surf. réglées tétraèdrales symétriques,* Paris 1867 ewidmet.

Lüroth, *Crelle,* 67 und Voss, *Math. Ann.*, 8 untersuchten ie Regelflächen, die man als *vollständige* Schnitte dreier iniencomplexe betrachten kann.

Die rationalen Regelflächen (vom Geschlecht Null) machten remona, l. c.; Armenante, *Ann. di mat.,* (2), 4; Clebsch, *Iath. Ann.,* 5; Noether, *Math. Ann.,* 3, p. 194 zum Gegenand ihrer Forschungen; der letztere studirte die rationale Regelläche n^{ter} Ordnung mit einer $(n-1)$-fachen Geraden.

Neuere Untersuchungen über die Regelflächen vom Standunkt der Geometrie auf den Flächen und unter Rücksichtahme auf die mehrdimensionalen Räume sind von Segre, *Atti cc. Torino,* t. 19, 21, 22, 1883—1887; *Rend. Lincei,* 1887; *Iath. Ann.,* 34.

§ 7. Rationale Flächen. Flächen mit rationalen oder elliptischen oder hyperelliptischen Schnitten.

Man nennt *rational* (oder *unicursal, homaloid*) Flächen, di man in ein-eindeutige Correspondenz mit einer Ebene bringe kann. Den Betrachtungen in Kap. 9, § 7 über die ebene Ab bildung dieser Flächen fügen wir noch die folgenden Bemerkunge hinzu:

Die Bedingungen, damit eine Fläche n^{ter} Ordnung mit ein Doppelcurve von der Ordnung d und dem Geschlecht π, welc t dreifache, auch für die Fläche dreifache Punkte besitzt, ration sei, sind die folgenden:

1. *Das numerische Geschlecht* (vergl. Kap. 9, § 4, S. 22 *muss Null sein:*

$$p_n = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6} - (n-4)d + 2t + \pi - 1 = 0$$

2. *Es dürfen keine Flächen von der Ordnung $2(n-$ existiren, welche doppelt durch die Doppelcurve gehen (mit Au nahme der Flächen, welche die gegebene Fläche enthalten).*

Jede Fläche, welche so beschaffen ist, dass die Coordinat eines beliebigen ihrer Punkte sich als rationale Functionen zwe Parameter ausdrücken lassen, ist rational. Dieses Theore welches einem Satz von Lüroth (*Math. Ann. 9*) über die Curv entspricht (siehe Kap. 5, § 1, p. 131), wurde von Castelnuov *Math. Ann.*, 44, 48, p. 313 bewiesen.

Jede Fläche 3ter Ordnung ist rational mit Ausnahme allgemeinen Kegels 3ter Ordnung.

Alle Flächen 4ter Ordnung, die vielfache Linien haben, si rational, wenn man die Regelflächen ausnimmt, die von höher Geschlecht als dem nullten sind. Unter den Flächen 4ter O nung ohne vielfache Linien gibt es nur 4 rationale Arten; e von ihnen studirte Cremona, *Collect. math. in mem. D. Chel* Mediolani 1881 und die übrigen mit Einschluss dieser letzte Noether, *Math. Ann.*, 33.

Jede Fläche, welche ein einfach unendliches System ra naler Curven derart enthält, dass durch jeden Punkt der Flä eine einzige Curve des Systems geht, lässt sich in eine Re fläche birational transformiren (abbilden); wenn dieses Sys rational ist, so ist es auch die Fläche. Das Problem wurde Noether, *Math. Ann.*, 3 behandelt, der es in dem letzte

all vollständig auflöste; über den allgemeinen Fall siehe nriques, *Rend. Lincei,* 1898 und *Math. Ann.,* 52.

Alle Flächen, die ein doppelt unendliches System elliptischer urven enthalten, sind rational oder können in eine Regelfläche m Geschlecht 1 birational transformirt (abgebildet) werden. astelnuovo, *Rend. Lincei,* 1894.

Ueber den Fall, in dem die Curven des linearen Systems perelliptisch sind, siehe Castelnuovo, ib.

Eine Fläche, deren sämmtliche ebene Schnitte rationale Curven nd, ist rational und insbesondere entweder eine Regelfläche oder e Steiner'sche Fläche 4ter Ordnung. Theorem von Picard, relle, 100; vergl. Kap. 12, § 9.

Jede Fläche, deren sämmtliche ebene Schnitte elliptische urven sind, ist entweder rational oder eine Regelfläche; in dem sten Fall kann ihre Ordnung nicht höher als die neunte sein. astelnuovo, *Rend. Lincei,* 1894.

Eine Fläche, deren sämmtliche ebene Schnitte hyperelliptische Curven sind, ist entweder rational (und enthält ein Büschel on Kegelschnitten) oder eine Regelfläche. Enriques, *Rend. incei,* 1893.

Eine Zusammenstellung dieser und anderer Resultate findet an bei Castelnuovo-Enriques, *Math. Ann.,* 48, . 307 u. ff.

Verwandt mit diesen Untersuchungen sind die Studien ber die Flächen, welche sich birational in sich selbst transormiren lassen. Castelnuovo und Enriques dehnten einen atz von Schwarz über Curven auf die Flächen aus und bewiesen an (*Compt. Rend.,* 1895; siehe auch Painlevé, ib.):

Jede Fläche, welche eine continuirliche transitive Gruppe irationaler Transformationen (d. h., eine solche, bei welcher jeder Punkt der Fläche in jeden beliebigen anderen übergehen kann) n sich selbst zulässt, ist eine rationale Fläche, wenn die Gruppe von zwei Parametern abhängt und die Transformationen unter ich nicht vertauschbar sind; hängt aber die Gruppe von mehr ls 2 Parametern ab, so ist die Fläche entweder rational oder n eine elliptische Regelfläche (vom Geschlecht 1) transformirbar.

Dieses Problem behandelte zuerst Picard, *Journ. de math.,* 4), 5, der den Fall der vertauschbaren Gruppe ∞^2 eingehend esprach; diese Gruppe führte dann zu der Classe der hyperelliptischen Flächen, die Humbert, *Journ. de math.,* (4), 9 gründlich studirte. Siehe auch die citirte Arbeit von Castel-

nuovo-Enriques, *Math. Ann.*, 48 und Painlevé, *Leçons sur la théor. anal. des équat. diff. professées à Stockholm*, Herman Paris 1897, in welcher der Verfasser die Theorie der Fläche mit Transformationen in sich selbst erschöpfend behandelt.

Es gibt auch algebraische Oberflächen, welche unendlich viele discontinuirliche, aber keine continuirlichen Transformationen in sich zulassen. Diese Eigenschaft wurde von Humbert bei gewissen mit der Kummer'schen Fläche verwandten Flächen entdeckt. Vergl. Painlevé, *Compt. Rend.*, 126, 1898.

Kapitel XIV.

Die Liniengeometrie und die Kugelgeometrie im Raum.

§ 1. Allgemeines. Liniencoordinaten im Raum.

Eine Gerade im Raum wird durch vier elementare Bedingungen bestimmt, so dass also der Strahlenraum (in welchem die Gerade das Element ist) als ein *(nicht linearer, sondern quadratischer)* Raum von vier Dimensionen zu betrachten ist.

Wenn x_1, x_2, x_3, x_4 die homogenen Coordinaten eines Punkts des Raums und y_1, y_2, y_3, y_4 die eines anderen Punkts sind, so bilden wir die Determinanten 2ter Ordnung der Matrix

$$\begin{vmatrix} x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \\ y_1, & y_2, & y_3, & y_4 \end{vmatrix}$$

und setzen

$$p_{ij} = x_i y_j - x_j y_i.$$

Die Verhältnisse zweier beliebiger der 6 Grössen p_{ij} ändern sich nicht, wenn man anstatt eines der Punkte (x), (y) oder beider einen beliebigen anderen Punkt der Geraden substituirt, welche sie verbindet; die Grössen p_{ij} kann man daher zu homogenen Coordinaten einer Geraden des Raums wählen.

Zwischen ihnen besteht die einzige identische Relation:

$$p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0.$$

Nach der Definition dieser Coordinaten wird die Gerade als Ort von Punkten betrachtet; man pflegt sie *Strahlencoordinaten* zu nennen. Plücker.

Betrachtet man dagegen die Gerade als Enveloppe von Ebenen, so erhält man analoge Coordinaten, die *Axencoordinaten* genannt werden:

Wenn (u), (v) die homogenen Coordinaten zweier durch

die Gerade gehender Ebenen sind, so ergeben sich die Binome

$$\pi_{ij} = u_i v_j - u_j v_i .$$

Die Verhältnisse zweier der sechs π_{ij} sind unabhängig von der Wahl der speciellen durch die Gerade gehenden Ebenen (u), (v); diese π_{ij} können daher zu homogenen Axencoordinaten einer Geraden im Raum gewählt werden; zwischen ihnen besteht die identische Beziehung

$$\pi_{12}\pi_{34} + \pi_{13}\pi_{42} + \pi_{14}\pi_{23} = 0 .$$

Die Bedingung, damit zwei Gerade mit den Coordinaten (p) und (p') sich schneiden (in derselben Ebene liegen), ist durch

$$p_{12}p'_{34} + p_{13}p'_{42} + p_{14}p'_{23} + p'_{12}p_{34} + p'_{13}p_{42} + p'_{14}p_{23} = 0$$

gegeben.

Die 6 Geraden des Raums, für welche je 5 der 6 Coordinaten verschwinden, sind die Kanten des Fundamentaltetraeders.

Sind x, y, z die *orthogonalen* Cartesischen Coordinaten eines Punkts des Raums und $x', y' z'$ die Coordinaten eines zweiten Punkts, so werden die Coordinaten p

$$p_{14} = x - x', \quad p_{24} = y - y', \quad p_{34} = z - z',$$
$$p_{23} = yz' - zy', \; p_{31} = zx' - xz', \; p_{12} = xy' - yx',$$

die wir bez. mit

$$l\,,\; m\,,\; n,$$
$$L,\; M,\; N$$

bezeichnen wollen.

Wir geben jetzt einige Fundamentalformeln an, die sich auf metrische Eigenschaften beziehen:

Der Winkel, den zwei Gerade (l, m, n, L, M, N) (l', m', n', L', M', N') miteinander bilden, ist durch die Formeln

$$\cos(rr') = \frac{ll' + mm' + nn'}{\sqrt{(l^2 + m^2 + n^2)(l'^2 + m'^2 + n'^2)}},$$

$$\sin^2(rr') = \frac{\left\| \begin{matrix} l', & m', & n' \\ l\,, & m\,, & n \end{matrix} \right\|^2}{(l^2 + m^2 + n^2)(l'^2 + m'^2 + n'^2)}$$

gegeben; dabei steht

$$\left\| \begin{matrix} l', & m', & n' \\ l\,, & m\,, & n \end{matrix} \right\|^2 \quad \textit{für}$$

$$\left| \begin{matrix} l', & m' \\ l\,, & m \end{matrix} \right|^2 + \left| \begin{matrix} m', & n' \\ m\,, & n \end{matrix} \right|^2 + \left| \begin{matrix} n', & l' \\ n\,, & l \end{matrix} \right|^2 .$$

Der Abstand zweier Geraden ist

$$\text{Abst.}\,(rr') = \frac{lL' + mM' + nN' + Ll' + Mm' + Nn'}{\sqrt{\left\| \begin{matrix} l, & m, & n \\ l', & m', & n' \end{matrix} \right\|^2}}.$$

Unter dem *Moment zweier Geraden* versteht man das Pro-ıct aus dem Sinus ihres Winkels mit ihrem kleinsten Abstand 'ayley); aus den vorstehenden Formeln ergibt sich daher sofort, ıss *das Moment zweier Geraden* in orthogonalen Coordinaten

$$\text{Mom.}\,(rr') = \frac{lL' + mM' + nN' + Ll' + Mm' + Nn'}{\sqrt{(l^2 + m^2 + n^2)(l'^2 + m'^2 + n'^2)}}$$

t.

Die 6 allgemeinen homogenen Coordinaten einer Geraden nd den 6 Momenten der Geraden in Bezug auf jede der 6 anten des Fundamentaltetraeders der Coordinaten proportional, . h. in Bezug auf die sechs Geraden des Raums, für welche 5 er 6 Coordinaten der Geraden Null werden.

Eine grosse Anzahl solcher Formeln wurde von Cayley, *Cambr. Trans.*, 11, Thl. 2 = *Coll. math. papers*, 7, p. 66 auf-estellt; über ähnliche Formeln, aber mit den Coordinaten p_{ij} iehe d'Ovidio, *Giorn. di Batt.*, 8, 11.

Ein anderes Liniencoordinatensystem untersuchte Zeuthen, *Math. Ann.*, 1; dabei werden zu homogenen Liniencoordinaten ie Volumina von sechs Tetraedern genommen, von denen jedes u gegenüberliegenden Kanten eine auf der Geraden gewählte Strecke (die Einheit) und eine der 6 Kanten des Fundamental-etraeders hat.

Diese Coordinaten genügen einer homogenen Relation 2ten Grads nit drei Termen, die der Beziehung ähnlich ist, welche die p_{ij} rfüllen. Siehe auch Drach, *Math. Ann.*, 2; d'Ovidio, *Giorn. li Batt.*, 10.

Von den 6 Coordinaten p_{ij} kann man mittelst einer linearen Transformation zu einem Coordinatensystem x_i $(i = 1, \ldots, 6)$ übergehen, wenn man es so einrichtet, dass die quadratische Relation, welcher die p genügen, sich in die specielle quadratische Beziehung

$$\sum x_i^2 = 0$$

verwandelt.

Diese 6 Coordinaten x_i heissen *die Klein'schen Coordinaten*, *Math. Ann.*, 2; vergl. auch seine *Inaug.-Diss.*, Bonn 1868, wieder abgedruckt in den *Math. Ann.*, 23.

Eine elegante geometrische Interpretation dieser Transfor mation ist die folgende: Die sechs p_{ij} werden als homogen Coordinaten eines Punkts im Raum von 5 Dimensionen auf gefasst; alsdann stellt die Relation 2ten Grads, welcher die genügen, in diesem Raum eine *nicht degenerirte Fläche 2ter Ord nung* dar (weil ihre Discriminante von Null verschieden ist jeder Punkt dieser Fläche entspricht so einer Geraden de Raums und umgekehrt und die Geometrie auf dieser Fläche 2ter Ord nung entspricht der Liniengeometrie des gewöhnlichen Raum

Wir wollen eine lineare Transformation der Coordinaten i dem Raum von 5 Dimensionen derart vornehmen, dass d Gleichung dieser Fläche 2ter Ordnung die Form

$$\sum x_i^2 = 0$$

annimmt, d. h. die Form, welche nur die Terme mit den Quadrate der Coordinaten enthält (es lässt sich dieses auf unendlich vie Arten ausführen, vergl. Bd. 1, Kap. 12, § 15); die neuen Coordinate sind dann die oben erwähnten Klein'schen. Wie man nun weis sind die linearen Räume $x_i = 0$, wenn der Gleichung der Fläch 2ter Ordnung die obige Form gegeben wird, zu je zweien in B zug auf die Fläche 2ter Ordnung conjugirt, d. h. der Pol ein der Räume in Bezug auf die Fläche 2ter Ordnung liegt in de anderen Raum (diese Eigenschaft ist nur die Erweiterung d für die Kegelschnitte auf S. 79 und für die Flächen 2ter Or nung auf S. 106 angegebenen Satzes). Wir kommen mithin dem Resultat: *Die Fundamentalräume in dem neuen Coor natensystem sind zu je zweien in Bezug auf die Fundamente fläche 2ter Ordnung conjugirt.*

Eine Relation zwischen den Liniencoordinaten stellt ei dreifache Unendlichkeit von Geraden im Raum dar, d. h. d was man einen *Liniencomplex* zu nennen pflegt; zwei Relation zwischen den Liniencoordinaten stellen eine doppelte Unendlic keit von Geraden dar, d. h. eine *Liniencongruenz* und schlie lich drei Relationen zwischen den Liniencoordinaten eine *Reg fläche.*

Vier Beziehungen der genannten Art stellen dann im A gemeinen *eine endliche Anzahl von Geraden des Raums* dar.

Definirt man einen *Complex* als eine Mannigfaltigkeit c von Geraden und einen *algebraischen Complex* als eine Mann faltigkeit ∞^3 von Geraden, deren Coordinaten algebraisc

unctionen dreier unabhängiger Parameter sind, so ergibt sich as Theorem:

Jeder algebraische Complex kann immer vollständig durch ine einzige algebraische Relation zwischen den sechs Liniencoordinaten dargestellt werden; legt man dagegen die Punkte einer läche 2ter Ordnung des Raums von 5 Dimensionen zu Grund, o erhält der Satz die andere Fassung:

Jeder algebraische in der Fundamentalfläche 2ter Ordnung nthaltene Raum von 3 Dimensionen ist immer der vollständige chnitt dieser Fläche mit einem anderen algebraischen Raum von Dimensionen.

Wenn die algebraische Beziehung, die einen algebraischen omplex darstellt, den Grad n hat, *so sagt man, der Complex ei n^{ten} Grads.*

Der Grad des Complexes ist der Ordnung des Kegels gleich, er von allen zum Complex gehörenden Geraden gebildet wird, ie durch einen beliebigen Punkt des Raums gehen (des Complexegels).

In jeder Ebene gibt es ∞^1 Gerade des Complexes, die eine urve *(die Complexcurve)* umhüllen; *die Classe dieser Curve ist uch der Grad des Complexes.*

Bei den Complexen fliessen die Begriffe von *Ordnung* und *Classe* zusammen, man hat nur die eine charakteristische Zahl, len *Grad,* der die Anzahl der Geraden des Complexes angibt, ie durch einen Punkt gehen oder in einer Ebene liegen.

Eine *Congruenz* heisst *algebraisch*, wenn sie der theilweise oder vollständige Schnitt zweier algebraischer Complexe ist.

Unter *Ordnung einer algebraischen Congruenz* versteht man ie Anzahl ihrer Geraden, die durch einen Punkt des Raums gehen und unter *Classe einer algebraischen Congruenz* die Anzahl ihrer Geraden, die in einer Ebene liegen.

Zwei Complexe von den Graden n und n' haben eine Congruenz von der Ordnung nn' und auch der Classe nn' gemeinschaftlich.

Drei Complexe von den Graden n, n', n'' haben eine Regelfläche von der Ordnung $2nn'n''$ gemeinschaftlich.

Vier Complexe von den Graden n, n', n'', n''' haben im Allgemeinen $2nn'n''n'''$ Gerade gemeinsam.

Zwei Congruenzen von den Ordnungen n, n' und den Classen m, m' haben im Allgemeinen $nn' + mm'$ Gerade gemeinsam. Theorem von Halphen, *Compt. Rend.,* 1872.

Alle Geraden, die eine algebraische Curve n^{ter} Ordnung schneiden, bilden einen (algebraischen) Complex n^{ten} Grads.

Alle Geraden, die eine gegebene Gerade schneiden, bilden einen linearen sogenannten speciellen Complex, der die gegebene Gerade zur Directrix hat.

Die sämmtlichen Geraden, die zwei Curven von den Ordnungen n_1, n_2 treffen, bilden eine Congruenz von der Ordnung und Classe $n_1 n_2$.

Die sämmtlichen Geraden, die zwei gegebene Gerade schneiden, bilden eine Congruenz von der Ordnung und Classe (eine lineare Congruenz).

Alle Geraden, die drei algebraische Curven von den Ordnungen n_1, n_2, n_3 schneiden, bilden eine Regelfläche von der Ordnung $2 n_1 n_2 n_3$. Cayley; vergl. auch weiter oben Kap. 13, § 6.

Es gibt zwei Gerade, die gleichzeitig vier gegebene Gerade schneiden. Theorem von Steiner, *System. Entwickel.* etc., *Werke* 1, p. 284.

Es existiren $2 n_1 n_2 n_3 n_4$ Gerade, die vier algebraische Curven von den Ordnungen n_1, n_2, n_3, n_4 treffen.

Die sämmtlichen Geraden, die eine algebraische Fläche n^{te} Ordnung und a^{ten} Rangs berühren (vergl. Kap. 9, § 1 und Kap. 13, § 6), *bilden einen Complex a^{ten} Grads (einen speciellen Complex).*

Wenn von wenigen früheren Untersuchungen, unter denen sich auch einige von Cayley befinden, abgesehen wird, da man wohl sagen, die *Liniengeometrie* als Lehre für sich s mit der *Neuen Geometrie des Raumes,* Leipzig 1868, 1869 v Plücker entstanden, der schon 1865 einige Abhandlunge über diesen Gegenstand veröffentlicht hatte, *Proc. London mat Soc.,* 1865; *Phil. Trans.,* 1865.

In den Jahren 1866, 1868 veröffentlichte Battaglini, *Ren Acc. Napoli,* 1866; *Atti Acc. Napoli,* 3, 1866; 4, 1868; *Gior di Batt.,* 6, 7, 10 seine Untersuchungen über die Complex setzte viele allgemeine Eigenschaften fest und stellte die Theo eines besonderen quadratischen Complexes, der seinen Nam trägt, auf. Er machte den Anfang mit einer symbolischen B zeichnung, die von Clebsch (siehe weiter unten § 2) vervo kommnet wurde und gab vielfache Anwendungen der Liniengeom trie auf die Mechanik; *Rend.* und *Atti Acc. Napoli,* 1869, 187

Von anderen Arbeiten citiren wir als die hervorragen sten: Clebsch, *Math. Ann.,* 2, 5; Klein, ib. 2, 5, 7, 22, et

issert., 1868, wieder abgedruckt in den *Math. Ann.* 23; Lie, ., 5; Reye (siehe weiter unten § 4); Voss, *Math. Ann.*, 9; egre, *Atti Acc. Torino*, t. 19, 20, 1883—1885; *Mem. Acc. orino*, (2), t. 36 (1885), 37 (1886); etc.

Ein systematisches neues Buch über die in Rede stehende heorie ist von R. Sturm, *Die Gebilde 1ten und 2ten Grads der iniengeometrie in synthetischer Behandlung*, 3 Thle., Leipzig, 892, 1893, 1897.

Wir werden im Folgenden an den betreffenden Stellen noch eitere Literaturangaben machen; ausführlichere Nachweise findet an in dem wiederholt citirten Werk von Loria.

R. Sturm hat in seinem eben angeführten Buch andere Benennungen für die Complexe und die Congruenzen gebraucht; r nennt er den *linearen Complex: Strahlengewinde* oder einfach *ewinde;* den speciellen linearen Complex: *Strahlengebüsch* oder ürzer *Gebüsch;* die *lineare Congruenz: Strahlennetz.*

Diese Benennungen sind dann auch von anderen deutschen utoren benutzt worden.

§ 2. Der allgemeine algebraische Complex n^{ten} Grads. Die symbolische Bezeichnung von Battaglini und Clebsch. Invariante Formen der Complexe.

Der algebraische Complex n^{ten} Grads ist durch

$$\binom{n+5}{5} - \binom{n+3}{5} - 1$$

Gerade individualisirt; daher wird

ein linearer Complex durch 5 Gerade,
ein quadratischer durch 19 Gerade

gekennzeichnet.

Die sämmtlichen Geraden des Complexes, welche eine bestimmte Gerade des Raums treffen, bilden eine Congruenz, welche natürlich der Schnitt des Complexes mit dem speciellen linearen Complex ist, der aus *allen* die gegebene Gerade treffenden Geraden besteht; die sämmtlichen *Geraden dieser Congruenz berühren eine und dieselbe Fläche*, die *Complexfläche* genannt wird; Plücker.

Je nachdem die gegebene Gerade im Endlichen oder Unendlichen liegt, heisst die Complexfläche *Meridian-* oder *Aequatorialfläche;* Plücker.

Legt man durch die gegebene Grade eine Ebene, so

umhüllen alle in ihr gelegenen Geraden des Complexes eine Curve; *die Complexfläche ist der Ort dieser Umhüllungscurven*.

Jeder Kegel, dessen Spitze in einem Punkt der Gerade liegt und welcher Gerade des Complexes zu Erzeugenden hat ist der Complexfläche umschrieben; *diese kann daher als die Enveloppe derjenigen Kegel des Complexes angesehen werden deren Spitzen in den Punkten der Geraden liegen.*

Die Complexflächen eines Complexes n^{ten} Grads sind von der Ordnung und Classe $2n(n-1)$ und haben die Gerade, die von ihren zum Complex gehörigen Tangenten getroffen wird, zu $n(n-1)$-fachen Geraden; diese Gerade ist für die Fläche $n(n-1)$-fach, mag die letztere als Ort oder als Enveloppe betrachtet werden.

Für einen Complex 2ten Grads sind daher die Complexflächen 4ter Ordnung und 4ter Classe und haben eine Doppelgerade.

Die Geraden des Raums, zu welchen Complexflächen gehören die durch denselben Punkt gehen oder dieselbe Ebene berühren bilden einen Complex $n(n-1)^{\text{ten}}$ Grads.

Es gibt gewisse Punkte des Raums von der Beschaffenheit dass die durch sie gehenden Geraden des Complexes einen Kegel mit einer Doppelerzeugenden bilden; und es gibt gewisse Ebenen des Raums, die derart sind, dass die Enveloppe der in ihnen gelegenen Geraden des Complexes eine Doppeltangente hat. Diese *Punkte* und *Ebenen* heissen *singulär* und *der Ort der ersteren ist eine Fläche, die zugleich die Enveloppe der letzteren ist* und die *Singularitätenfläche des Complexes* genannt wird. Der Satz wurde für Complexe 2ten Grads von Plücker, allgemein von Pasch aufgestellt. Pasch, *Zur Theorie der Complexe und Congruenzen von Geraden,* Giessener Habilitationsschrift 1870; *Ueber die Brennfläche der Strahlensysteme und die Singularitätenflächen der Complexe, Crelle,* 76.

Die Bezeichnung „Singularitätenfläche" stammt von F. Klein, *Gött. Nachr.,* 1869, p. 267.

Wenn eine Gerade für den von einem ihrer Punkte ausgehenden Kegel doppelt ist, so muss sie auch für die in einer ihrer Ebenen liegende Enveloppe doppelt sein. Diese Gerade heisst *singuläre Gerade des Complexes.*

Es kann vorkommen, dass alle Punkte einer Geraden singulär und alle durch die Gerade gehenden Ebenen singu

nd; die Gerade ist alsdann eine Doppelgerade des Complexes; *ieser Fall kann jedoch bei dem allgemeinen Complex nicht ntreten.*

Die Singularitätenfläche eines Complexes n^{ten} Grads ist von er Ordnung und Classe $2n(n-1)^2$; Clebsch, *Math. Ann.*, 5.

Die singulären Geraden eines Complexes sind durch den ollständigen Schnitt des Complexes mit einem anderen $2(n-1)^{\text{ten}}$ Grads gegeben; sie bilden mithin eine Congruenz von der Ordung und der Classe $2n(n-1)$.

Wir führen die folgenden Theoreme von Clebsch, *Math. Ann.*, 5 an:

Die Spitzen der einem Complex n^{ten} Grads angehörigen Kegel, die von einer festen Geraden in n Punkten geschnitten erden, für welche eine (binäre) Invariante vom k^{ten} Grad erschwindet, bilden eine Fläche von der Ordnung kn, die diese este Gerade als $\frac{kn}{2}$-fache Gerade enthält.

Die Geraden, welche einen dem Complex n^{ten} Grads anehörigen Kegel in Punkten schneiden, die eine bestimmte invariante Eigenschaft haben (für welche eine binäre Invariante k^{ten} Grads erschwindet), bilden einen Complex vom Grad $\frac{kn}{2}$.

Zu diesen beiden Theoremen lassen sich selbstverständlich auch die *dualen* Sätze aufstellen, wenn man an Stelle der Spitzen der Kegel die Ebenen der Umhüllungscurven des Complexes, an Stelle einer Punktreihe ein Ebenenbüschel etc. in Beracht zieht.

Für $n = 4$ erhält man die Theoreme:

Die Spitzen der einem Complex 4ten Grads angehörigen Kegel, die von einer festen Geraden in 4 äquianharmonischen oder harmonischen Punkten geschnitten werden, bilden eine Fläche 9ter bez. 12ter Ordnung, welche diese Gerade zur 4-fachen bez. 6-fachen Geraden hat.

Die Geraden, welche einen bestimmten Kegel eines Complexes 4ten Grads in 4 äquianharmonischen oder harmonischen Punkten schneiden, bilden einen Complex 4ten bez. 6ten Grads.

Wenn ein Complex $C = 0$ vom n^{ten} Grad gegeben ist, so lassen sich *die Polarcomplexe* einer Geraden des Raums genau auf dieselbe Art definiren, wie bei der gewöhnlichen Polaritäts-

theorie; sind p'_{ij} die Coordinaten der gegebenen Geraden, s stellt die Gleichung

$$\sum \frac{\partial C}{\partial p_{ij}} p'_{ij} = 0$$

einen Complex $(n-1)^{\text{ten}}$ Grads dar, welcher *der erste Pola complex des gegebenen* heisst. Ebenso ergeben sich die übrige Polarcomplexe.

Battaglini (siehe das Citat am Ende des vorigen Par graphen) führte zuerst und dann Clebsch in die analytisch Darstellung der Complexe eine Symbolik ein, die derjenig analog ist, die bei der Invariantentheorie der Curven u Flächen zur Verwendung kommt.

Wir geben im Folgenden die Symbolik in der v Clebsch, *Math. Ann.*, 2 vervollkommneten Gestalt an.

Bei Benutzung der Coordinaten p_{ij} ist ein algebraisch Complex durch die Gleichung gegeben:

$$\sum_1^4 a_{ij,\,kh,\,lm\,\ldots}\, p_{ij} p_{kh} p_{lm} \ldots = 0. \qquad (1$$

Wir setzen nun symbolisch

$$a_{ij,\,kh,\,lm\,\ldots} \equiv a_{ij}\, a_{kh}\, a_{lm} \ldots .$$

Die linke Seite der Gleichung (1) lässt sich dann als symbolische Potenz eines linearen Ausdrucks, d. h. durch

$$\left[\sum_1^4 a_{ij} p_{ij}\right]^n$$

darstellen, worin die Symbole a_{ij} die Eigenschaft haben, d sie ihr Vorzeichen ändern, wenn die Indices i und j vertaus werden.

Nun lässt sich beweisen, *dass sich immer und auf* eine *Art die linke Seite der Gleichung des Complexes als die symbolische Potenz der linken Seite der Gleichung eines s ciellen linearen (symbolischen) Complexes ausdrücken lässt, wo unter speciell verstanden wird, dass der Complex eine f Gerade zur Directrix habe.*

Wenn wir mit $P = 0$ die quadratische Gleichung bezei nen, der die p_{ij} genügen, so lässt sich offenbar der Gleich $F = 0$ eines jeden Complexes vom Grad $n > 1$ immer Form geben:

$$F + MP = 0,$$

worin $F = 0$ die gegebene Gleichung und M eine Form vom $(n-2)^{\text{ten}}$ Grad mit *willkürlichen* Coefficienten ist.

Wenn wir nun in dem obigen symbolischen Ausdruck

$$a_{ij} = a_i b_j - a_j b_i, \quad (i, j = 1, 2, 3, 4)$$

setzen, so wird der lineare Complex

$$\sum a_{ij} p_{ij} = 0$$

der Complex der Geraden, welche die Verbindungsgerade der beiden Punkte (a_1, a_2, a_3, a_4), (b_1, b_2, b_3, b_4) treffen; diese symbolische Substitution kann man aber unter der Bedingung machen, dass zwischen den wirklichen Coefficienten des gegebenen Complexes F alle linearen Beziehungen bestehen sollen, welche identisch werden, wenn diese wirklichen Coefficienten durch Producte von Factoren vom Typus

$$a_i b_j - a_j b_i$$

ausgedrückt werden.

Nun ist die einzige zwischen diesen Factoren bestehende Beziehung

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1)(a_3 b_4 - a_4 b_3) + (a_1 b_3 - a_3 b_1)(a_4 b_2 - a_2 b_4) + \\ + (a_1 b_4 - a_4 b_1)(a_2 b_3 - a_3 b_2) = 0;$$

mithin sind die *einzigen* Beziehungen n^{ten} *Grads* zwischen Determinanten vom Typus $(a_i b_j - a_j b_i)$ diejenigen, die man durch Multiplication der vorstehenden Relation mit einer beliebigen monomen Combination $(n-2)^{\text{ten}}$ Grads derselben Determinanten erhält; führt man diese Multiplication aus, so wird jeder der drei Terme der vorstehenden Relation ein *wirklicher* Coefficient des Complexes; es muss unter diesen daher die lineare Beziehung bestehen:

$$a_{12,34,lm,\ldots} + a_{13,42,lm,\ldots} + a_{14,23,lm,\ldots} = 0.$$

Nun existiren im Allgemeinen zwischen den Coefficienten von F keine Relationen dieser Art; *man kann aber immer und auf eine einzige Art* M *so wählen, dass die Coefficienten von*

$$F + MP$$

derartigen Beziehungen genügen. Den Beweis dafür hat Clebsch, *Math. Ann.*, 2 geliefert.

Die Form, welche auf diese Art die Gleichung des Complexes annimmt, heisst die *Normalform* und Clebsch hat gezeigt, *dass sie*

$$F - \frac{P}{1\,(n+1)}\,\Delta F + \frac{P^2}{1\cdot 2\,(n+1)\,n}\,\Delta^2 F - \\ - \frac{P^3}{1\cdot 2\cdot 3\,(n+1)\,n\,(n-1)}\,\Delta^3 F + \cdots = 0$$

lautet, worin

$$\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial p_{12}\,\partial p_{34}} + \frac{\partial^2 F}{\partial p_{13}\,\partial p_{42}} + \frac{\partial^2 F}{\partial p_{14}\,\partial p_{23}} \quad \textit{und}$$

$$\Delta^2 F = \Delta(\Delta F), \quad \Delta^3 F = \Delta\{\Delta(\Delta F)\}, \cdots \textit{ ist.}$$

Der Strahlenraum wird durch jede *projective* oder *dua* Transformation des Punkt- und Ebenenraums in sich selb transformirt; die Gruppe aller linearen Transformationen unt den p_{ij}, durch welche der Strahlenraum in sich selbst übe geführt wird, ist zugleich die Gruppe der sämmtlichen linear Transformationen, für welche die Relation

$$P \equiv p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0$$

unverändert bleibt.

Die Coefficienten eines Complexes mögen $a_{ij,hk,\ldots}$ u die Coefficienten des durch eine dieser linearen Transformati nen transformirten Complexes $a'_{ij,hk,\ldots}$ heissen; die letzter lassen sich linear durch die ersteren ausdrücken. Der Begr von *Invarianten* des Complexes ergibt sich unmittelbar: m nennt *Invariante vom Grad k* (oder *Covariante) des Comple* eine solche rationale ganze homogene Function vom Grad in den a (oder vom Grad k in den a und einem beliebig anderen Grad in den p), die bis auf einen Factor (Potenz Substitutionsdeterminante) unverändert bleibt, wenn an die Ste der a die a' (oder an die Stelle der a die a' und der p transformirten Coordinaten p') gesetzt werden.

§ 3. Die linearen Complexe.

Die allgemeine Gleichung eines linearen Complexes ist

$$\sum_1^4 a_{ij}p_{ij} = 0.$$

Genügen die Coefficienten a der Relation

$$A \equiv a_{12}a_{34} + a_{13}a_{42} + a_{14}a_{23} = 0,$$

besteht der Complex aus allen Geraden, welche eine gegebene Gerade treffen, deren Coordinaten die a_{ij} sind; dieser besondere Complex heisst der specielle lineare Complex.

Der lineare Complex hat eine einzige Invariante, nämlich A.

Gegeben sei ein Punkt des Raums; die durch ihn gehenden Geraden des linearen Complexes liegen in einer Ebene und sind die Gesammtheit der Geraden dieser Ebene, welche durch den Punkt gehen; ist umgekehrt eine Ebene gegeben, so umhüllen alle in ihr gelegenen Geraden des Complexes einen Punkt.

Mittelst des Complexes wird mithin eine specielle Raumpolarität festgesetzt und zwar eine der sogenannten *Nullpolaritäten oder Nullsysteme.* Vgl. Kap. 1, § 4, S. 44; Kap. 10, § 2, S. 251.

Den Punkt und die Ebene, welche in dieser Polarität conjugirt sind, kann man auch *conjugirt in Bezug auf den Complex* nennen.

Zwei Gerade des Raums, welche sich in der Nullpolarität entsprechen, heissen *conjugirt in Bezug auf den Complex; die Geraden des linearen Complexes sind sich selbst conjugirt.*

Zwei conjugirte Gerade können sich nicht treffen, wenn sie nicht zusammenfallen.

Jede Gerade, welche zwei conjugirte Gerade trifft, gehört zu dem Complex, und umgekehrt, *jede Gerade des Complexes, welche eine diesem nicht angehörige Gerade trifft, schneidet auch die der letzteren conjugirte Gerade.*

Diameter oder *Durchmesser* des Complexes werden die Geraden genannt, welche den unendlich fernen Geraden des Raums conjugirt sind, und *Diametralebenen* des Complexes die den unendlich fernen Punkten conjugirten Ebenen.

Die Durchmesser sind sämmtlich einander und den Diametralebenen parallel.

Die unendlich vielen Geraden des Complexes, welche in einer Diametralebene liegen, sind sämmtlich einander parallel.

Axe des Complexes heisst der (einzige) Durchmesser, welcher senkrecht auf den Ebenen steht, die durch die unendlich ferne dem Durchmesser conjugirte Gerade gehen.

Für jede Gerade des Complexes ist das Product aus ihrem geringsten Abstand von der Axe mit der trigonometrischen Tangente des Winkels zwischen der Geraden und der Axe constant; dieses constante Product heisst der Parameter des Complexes.

Der lineare Complex wird durch jede schraubenförmige Bewegung um die eigene Axe in sich selbst transformirt.

Ein linearer Complex lässt sich auf verschiedene Art erzeugen, nämlich:

1) *durch die in der Nullpolarität vereinigten Geraden;*

2) *indem man alle Geraden zusammenfasst, welche die verschiedenen Paare von Erzeugenden einer Fläche 2ter Ordnung treffen, die in einer beliebigen, zwischen den Erzeugenden festgestellten Involution conjugirt sind. Die Chasles'sche Erzeugungsweise, Journ. de Liouville,* (1), 4;

3) *indem man alle Geraden zieht, die zwei zueinander projective Ebenenbüschel in Punktreihen schneiden, welche in Involution liegen;*

4) *durch die Geraden, von welchen aus zwei projective Punktreihen, deren Träger sich nicht schneiden, in einer Involution von Ebenen projicirt werden;*

5) *indem man alle Geraden zieht, welche die Paare sich entsprechender Strahlen zweier projectiver Strahlenbüschel treffen, die zwar in verschiedenen Ebenen liegen und ein verschiedenes Centrum besitzen, jedoch einen Strahl gemeinschaftlich haben, der sich selbst entspricht. Die Sylvester'sche Erzeugungsweise, Comptes Rend.,* 52, 1861.

Ueber die Construction eines linearen Complexes, von welchem 5 Gerade gegeben sind, siehe R. Sturm, l. c., p. 107 u. ff.

§ 4. Büschel und Netze linearer Complexe.

Wenn die Gleichungen zweier linearer Complexe vorliegen und eine lineare Combination ihrer linken Seiten gebildet und gleich Null gesetzt wird, so erhält man die Gleichung eines *Büschels linearer Complexe.*

Ein Büschel linearer Complexe enthält im Allgemeinen zwei Complexe, die speciell sind. Siehe § 3, S. 385.

Daraus folgt:

Der Schnitt der beiden linearen Complexe ist im Allgemeinen eine Congruenz 1ter Ordnung und Classe (eine lineare Congruenz, Basiscongruenz des Büschels), welche aus allen Geraden besteht, die zwei gegebene Gerade treffen.

Wenn die beiden speciellen Complexe des Büschels zusammenfallen, so ist die Schnittcongruenz eine specielle Congruenz, welche nur eine einzige Directrix hat.

Sind ferner alle Complexe des Büschels specielle, so besteht die Schnittcongruenz aus den Geraden, welche in einer Ebe

gen und den Geraden des Raums, welche durch einen Punkt ser Ebene gehen.

Die Axen aller linearen Complexe eines Büschels bilden eine egelfläche 3ter Ordnung mit verschiedenen Leitgeraden, von denen ne im Unendlichen liegt.

Die Gleichung dieser Regelfläche lässt sich auf die Form educiren:

$$z(x^2 + y^2) - cxy = 0; \quad \text{Plücker.}$$

Cayley nannte diese Regelfläche *Cylindroid.*

Wenn die Gleichungen dreier linearer Complexe

$$C = 0, \quad C' = 0, \quad C'' = 0$$

gegeben sind, so stellt die Gleichung

$$C + \lambda C' + \mu C'' = 0$$

n *Netz linearer Complexe* dar.

Der Schnitt der drei linearen Complexe ist im Allgemeinen ne Regelfläche 2ter Ordnung; die ∞^1 Leitgeraden aller in dem tz enthaltenen speciellen linearen Complexe bilden das zweite ystem von Erzeugenden dieser Regelfläche 2ter Ordnung.

Die Axen der sämmtlichen ∞^2 Complexe des Netzes bilden ne Congruenz 2ter Ordnung und 3ter Classe, die aus den Lothen esteht, welche den ∞^2 Paaren von Erzeugenden der zugehörigen egelfläche 2ter Ordnung gemeinschaftlich sind.

Den Anfang mit dem Studium des linearen Complexes hat iorgini, *Mem. della Società italiana delle scienze,* 20, 1827; löbius, *Crelle,* 10 und Chasles, *Corr. math.,* 6, 1830; *Journ. e Liouville,* 4, 1839 gemacht; dann folgten, ausser Plücker, eye, *Crelle,* 69, 86, 95, etc.; Pasch, ib., 75; d'Ovidio, *Atti cc. Torino,* 16, 1881; *Ann. di mat.,* 7; *Atti Acc. Lincei,* (2), 3; e Paolis, *Mem. Acc. Lincei,* 1885; etc.

Die Bemerkung ist von Interesse, dass die Theorie der eciproken Figuren in der graphischen Statik im engsten Zuammenhang mit der Theorie der linearen Complexe steht.

Man hat auch die Systeme der projectiv aufeinander beogenen linearen Complexe und die geometrischen Gebilde stulirt, welche durch die Geraden erzeugt werden, die den sich ntsprechenden Complexen gemeinsam sind. Vergl. darüber Segre, *Mem. Acc. Torino,* t. 36, 37, 1885/86; Montesano, *Sui complessi di rette di 2^0 grado generati da due fasci proiettivi di omplessi lineari* (separate Schrift), Napoli 1886 und *Rend. Acc. Napoli,* 1886.

Mit dem Studium des Linienraums und speciell der linear Complexe unter Zuhülfenahme der Geometrie der ebenen Keg schnitte beschäftigten sich Cremona, *Giorn. di Batt.*, Aschieri, *Rend. Ist. Lomb.*, 1879; *Mem. Ist. Lomb.*, 188 Segre, *Atti Acc. Torino*, t. 20, 1885.

Die Abbildung des linearen Complexes auf den Punktrau (die ersten Begriffe sind Klein zu verdanken, Klein u Noether, *Gött. Nachr.*, 1869) untersuchten speciell Capora *Mem. Acc. Lincei*, 1877/78; Del Pezzo, *Rend. Palermo*. 1.

§ 5. Die linearen Involutionscomplexe Klein's.

Zwei lineare Complexe

$$\sum a_{ij} p_{ij} = 0, \quad \sum b_{ij} p_{ij} = 0,$$

die so beschaffen sind, dass die *Invariante*

$$a_{12} b_{34} + a_{13} b_{42} + a_{14} b_{23} + a_{34} b_{12} + a_{42} b_{13} + a_{23} b_{14}$$

verschwindet, stehen in einer Beziehung zueinander, welche *Involution* bezeichnet wird; Klein, *Math. Ann.*, 2.

Jeder specielle lineare Complex liegt zu sich selbst in volution.

Es sind bis zu sechs lineare Complexe möglich, die zu zweien in Involution liegen. Sie werden von Klein *das Sys der sechs Fundamentalcomplexe* genannt; *es gibt* ∞^{15} *sol Systeme, jedes von ihnen besteht aus Complexen, die sämmt nicht speciell sind.*

Die Untersuchung dieser Systeme steht in Zusammenhang den neuen von Klein eingeführten Liniencoordinaten. Siehe S. 3 *Bezeichnet man mit* $x_i = 0$ *die Gleichungen der 6 Fundamen complexe, so wird die Gleichung der Fundamentalfläche* 2ter *C nung des Raums von fünf Dimensionen* (siehe S. 376) $\sum x_i^2 =$ *Jeder andere lineare Complex ist durch* $\sum a_i x_i = 0$ *geg und zwei Complexe* $\sum a_i x_i = 0$, $\sum b_i x_i = 0$ *sind involu risch, wenn*

$$\sum a_i b_i = 0 \quad \textit{ist.}$$

Die sechs Fundamentalcomplexe schneiden sich zu je zweien in linearen Congruenzen mit verschiedenen Directricen. Siehe § *Die Directricen einer dieser Congruenzen gehören den 4 and Fundamentalcomplexen an und treffen daher die 12 Direct der 6 durch diese 4 Complexe bestimmten Congruenzen.*

Geht man von diesen Begriffen aus, so kommt man

merkenswerthen Configurationen und insbesondere zu einer onfiguration von 16 Punkten und 16 Ebenen, die mit derjenigen der singulären Punkte und Ebenen der Kummer'schen läche identisch ist. Siehe Kap. 12, S. 303.

Näheres findet man bei Klein, l. c.; Königs, *Géom. glée* etc.; *Ann. de Toulouse*, 7, 1893 und in dem citirten Werk von R. Sturm.

Ueber die Anwendung auf die Kummer'sche Fläche siehe uch die schon auf S. 302 citirte Arbeit Reichardt's, *Nova cta der Leop. Carol. Akad.*, 50, Halle 1887.

§ 6. **Complexe 2ten Grads im Allgemeinen.**

Der Complex 2ten Grads hängt von 19 Constanten ab; er ird daher durch 19 seiner Geraden individualisirt.

Die Complexfläche in Bezug auf eine gegebene Gerade r ist on der 4ten Ordnung und Classe; die Gerade r ist Doppelerade für sie.

Der Ort der Spitzen der Complexkegel, in Bezug auf welche wei Punkte reciprok sind, ist eine durch diese beiden Punkte hende Fläche 2ter Ordnung. Battaglini.

Auf jeder Geraden r giebt es 4 Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 von er Beschaffenheit, dass die Complexkegel, deren Spitzen in ihnen iegen, in zwei Ebenen zerfallen und durch jede Gerade gehen 4 Ebenen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ derart, dass die in ihnen liegenden Complexgeraden zwei Punkte umhüllen.

Die Punkte A sind Cuspidalpunkte für die Complexfläche in Bezug auf r (die Doppelgerade der Fläche) und die Ebenen α sind die 4 durch r gehenden Ebenen, deren beide Berührungspunkte mit der Fläche in einen zusammenfallen.

Das anharmonische Verhältniss der 4 Punkte A ist demjenigen der 4 Ebenen α gleich. Klein, *Math. Ann.* 2, 7.

Die Punkte A erzeugen und die Ebenen α umhüllen dieselbe Fläche 4ter Ordnung und Classe (die Singularitätenfläche des Complexes 2ten Grads; siehe § 2, S. 380). *Sie ist eine Kummer'sche Fläche.* Kap. 12, § 3.

Jedem Punkt A entspricht eine durch ihn gehende Gerade a (Doppelgerade des Kegels, dessen Spitze A ist) und jeder Ebene α entspricht eine in ihr liegende Gerade a' (Doppelgerade für die in α liegende Enveloppe); die Geraden a und a' sind *singuläre Gerade des Complexes;* siehe § 2, S. 380.

Jede singuläre Gerade s ist einem auf ihr liegenden singu-

lären Punkt S und einer durch sie gehenden singulären Ebene zugeordnet; diese berührt die Singularitätenfläche in dem singulär Punkt S und schneidet sie in zwei anderen Punkten, welche d Centren zweier in der singulären Ebene σ liegender Büsch sind. Die beiden anderen durch s gelegten Berührungsebene sind die zwei Ebenen, in welche der Kegel zerfällt, dessen Spit in S liegt.

Jede Ebene π schneidet die Singularitätenfläche in ein Curve, welche die in π gelegene Complexcurve (siehe S. 377) *jedem Punkt berührt, in welchem sie diese Curve trifft; die g meinschaftlichen Tangenten sind singuläre Gerade des Complexe ebenso gilt der duale Satz.*

Die Ebenen, welche so beschaffen sind, dass die in ihnen liege den Complexcurven entweder zwei gegebene Gerade schneid oder eine Gerade schneiden und eine Ebene berühren, oder au zwei Ebenen berühren, hüllen eine developpable Fläche 16ter, b 8ter, bez. 4ter Classe ein.

Die Regelfläche, welche aus den singulären Geraden beste die eine gegebene Gerade schneiden, ist 8ter Ordnung und sämmtlichen singulären Geraden bilden eine Congruenz 4ter Or nung und Classe.

Es gibt 16 Ebenen, deren Complexcurven aus zwei unen lich nahen Punkten gebildet sind, und in dualer Weise gibt 16 Punkte, deren Complexkegel aus zwei zusammenfallend Ebenen bestehen.

Diese 16 Punkte und 16 Ebenen sind die singulären Pun und Ebenen der Kummer'schen Fläche, welche die Singularität fläche des Complexes ist.

Die 16 Punkte liegen in allen auf eine beliebige Gera bezogenen Complexflächen und die 16 Ebenen berühren diesel Flächen.

Ist die Kummer'sche Fläche gegeben, so wird der Comp auf die folgende Art gebildet: Man betrachte in einer Fläche in S berührenden Ebene σ die singuläre Gerade s Complexes; diese schneidet die Fläche in zwei anderen Punkt man nehme nun in σ die beiden Strahlenbüschel, welche di Punkte zu Centren haben; die Gesammtheit aller dieser Büschel, welche man durch Variation der Berührungsebene erhält, ist der gegebene Complex.

Wir wollen nun das in σ gelegene Strahlenbüschel, des Centrum in S liegt, betrachten, und die ∞^2 Büschel die Art. Wie sich beweisen lässt, können sie auf die folge

rt projectiv einander zugeordnet werden: Man nehme in einem on ihnen einen beliebigen Strahl und alle ihm entsprechenden n den übrigen an und betrachte die beiden anderen Schnittpunkte er letzteren mit der Fläche und die Strahlenbüschel, die diese chnittpunkte zu Centren haben und in den durch diese Schnittunkte gehenden Berührungsebenen an die Fläche liegen. Diese ∞^2 trahlenbüschel bilden dann einen zweiten quadratischen Complex, elcher dieselbe Singularitätenfläche, wie der gegebene, hat.

Man erhält so ∞^1 Complexe 2ten Grads, die *confocal* Klein und Lie), *homofocal* (Segre), in *Involution liegend* Schur) oder *consingulär* (R. Sturm) genannt werden.

Da die Gleichung der Kummer'schen Fläche von 18 Contanten, die des quadratischen Complexes von 19 Constanten bhängt, so erkennt man, dass es in der That ∞^1 quadratische omplexe mit derselben Singularitätenfläche geben muss.

Ueber die Art, die projective Correspondenz, von der eben lie Rede war, festzusetzen, verweisen wir auf R. Sturm, l. c., 3, p. 32.

Jede Gerade des Raums gehört vier confocalen Complexen an.

Die durch die singulären Geraden des quadratischen Complexes gebildete Congruenz kann man als den Schnitt dieses Complexes mit einem anderen ansehen, welcher in der von dem gegebenen Complex erzeugten Reihe confocaler Complexe unendlich wenig von dem gegebenen verschieden ist.

Eine singuläre Gerade des Complexes, welche die Kummersche Fläche osculirt (eine dreipunktige Berührung mit ihr hat), heisst *eine singuläre Gerade* 2ter *Ordnung des Complexes* (Segre); berührt sie die Kummer'sche Fläche vierpunktig, so wird sie von demselben Autor *eine singuläre Gerade* 3ter *Ordnung* genannt.

Die singulären Geraden 2ter *Ordnung eines quadratischen Complexes bilden eine Regelfläche* 16ter *Ordnung, und die aller Complexe der confocalen Reihe eine Congruenz von der* 24ten *Ordnung und Classe.*

Singuläre Gerade 3ter *Ordnung eines gegebenen quadratischen Complexes gibt es im Ganzen 32; die singulären Geraden* 3ter *Ordnung der Complexe der ganzen confocalen Reihe bilden eine Regelfläche* 64ter *Ordnung, welche in die 16 in jeder der Doppelebenen der Kummer'schen Fläche enthaltenen Enveloppen* 2ter *Ordnung und in die 16 von jedem der 16 Doppelpunkte derselben Fläche ausgehenden Kegel* 2ter *Ordnung zerfällt.*

Wenn die Klein'schen Coordinaten (siehe § 1, S. 375) benutzt werden, lässt sich die Gleichung des Complexes 2ten Grads schreiben:

$$\sum_1^6 k_i x_i^2 = 0,$$

worin die x an die Relation

$$\sum_1^6 x_i^2 = 0$$

gebunden sind.

Die singulären Geraden 1ter Ordnung werden durch d Schnitt des gegebenen Complexes mit einem anderen bestimm dessen Gleichung

$$\sum_1^6 k_i^2 x_i^2 = 0$$

lautet.

Die singulären Geraden 2ter Ordnung ferner ergeben si aus dem Schnitt der vorstehenden Congruenz mit dem Compl

$$\sum_1^6 k_i^3 x_i^2 = 0;$$

und für diejenigen dritter Ordnung muss schliesslich noch

$$\sum_1^6 k_i^4 x_i^2 = 0$$

sein.

Die Gleichung der Reihe confocaler Complexe lautet:

$$\sum_1^6 \frac{x_i^2}{k_i + \lambda} = 0,$$

worin λ ein variabeler Parameter ist*).

Der erste, der sich mit den Complexen 2ten Grads beschä tigte, war Battaglini, *Atti Acc. Napoli,* 1866; *Giorn. di Batt.,*

---

*) Man könnte glauben, dass unter diesen einfach unendli vielen Complexen derjenige nicht enthalten sei, dessen Gleichu $\sum k_i x_i^2 = 0$ lautet; wir bemerken jedoch, dass man diese Gleichun da $\sum x_i^2 = 0$ ist, auch $\sum (k_i + \mu) x_i^2 = 0$ schreiben kann, wä rend man der Gleichung im Text aus demselben Grund auch die Fo $\sum \left(\frac{1}{\mu - \lambda} + \frac{1}{k_i + \lambda} \right) x_i^2 = 0$, d. h. $\sum \frac{k_i + \mu}{k_i + \lambda} x_i^2 = 0$ geb kann; multiplicirt man nun mit $k_1 + \lambda$ und lässt dann λ gegen convergiren, so ergibt sich $\sum (k_i + \mu) x_i^2 = 0$.

· studirte einen speciellen quadratischen Complex, der nach
m benannt wurde; siehe § 7; es ist jedoch zu bemerken, dass
: Anfangs geglaubt hatte, dieser Complex sei der allgemeinste;
iesen Irrthum hat Klein, *Dissert.*, Bonn 1868 nachgewiesen.
1 dem Plücker'schen Werk ist zum ersten Mal eine Theorie
er Complexe 2ten Grads enthalten, die später eingehend auch von
nderen Autoren, Clebsch, Klein, Lie (siehe § 1, S. 378) unter-
ucht wurden. Eine umfassende Darstellung dieser Theorie bringt
er 3te Band des citirten Buches von R. Sturm.

Von anderen Arbeiten über die Complexe 2ten Grads citiren
ir Caporali, *Mem. Acc. Lincei*, 1878, der sie auf den Punkt-
aum abbildete; Schur, *Dissert.*, Berlin 1879 (Auszug in den
Iath. Ann., 15); Reye, *Crelle*, 86, 93, 95, 97, 98; Segre,
Iem. Acc. Torino, t. 36, 1885, der die früher von Klein (vergl.
1, S. 376) angegebene Idee weiter ausbaute, d. h. die Geometrie
uf einer Fläche 2ten Grads im Raum von fünf Dimensionen
tudirte; Montesano, die S. 387 citirte Schrift und *Rend. Acc.*
Napoli, 1886; etc.

Wie die Complexe 2ten Grads classificirt werden und
welche die bemerkenswerthesten sind, davon wird im folgenden
Paragraphen die Rede sein.

Die Theorie der Polarität der Complexe 2ten Grads (siehe
§ 2, S. 381 und diejenige der Diameter, Centren, etc. (siehe
S. 385), die ein specieller Fall der ersteren ist, behandelte be-
sonders Plücker. Vergl. auch die §§ 567—585 im 3ten Band
les R. Sturm'schen Werks.

Reye, *Crelle*, 98, legt seiner Classification der allgemeinen
Complexe 2ten Grads die Anzahl der in ihnen enthaltenen ima-
ginären Elemente zu Grund. Er unterscheidet *hyperbolische, parabolische, elliptische* und *imaginäre Complexe.*

§ 7. Classification der Complexe 2ten Grads.

Bezeichnet man mit $P = 0$ (siehe § 2) die identische quadratische Relation zwischen den Liniencoordinaten oder die Gleichung der Fundamentalfläche 2ter Ordnung im Raum von 5 Dimensionen und mit $C = 0$ die Gleichung einer anderen Fläche 2ter Ordnung in demselben Raum, deren Schnitt mit der ersteren die Mannigfaltigkeit liefert, welche dem Liniencomplex 2ten Grads entspricht, so lassen sich die Complexe classificiren, *indem man die Discriminante der Fläche* 2ter *Ordnung*

$$P + \lambda C = 0$$

betrachtet, die vom 6ten Grad in λ ist und insbesondere ei Determinante 6ter Ordnung Δ darstellt.

Wenn die Wurzeln dieser Discriminante sämmtlich ve schieden sind, *d. h. wenn das Büschel von Flächen 2ter Ordnu 6 verschiedene Kegel enthält,* so liegt der in § 6 besproche *allgemeine Complex mit 19 Constanten* vor; *die Singularitäte fläche ist dann eine allgemeine Kummer'sche Fläche.*

Es kann vorkommen, dass sie speciell ein *Tetraedroid* wir siehe Kap. 12, § 4; alsdann erhält man den sogenannten *Ba taglini'schen oder harmonischen Complex,* der als besonderen Fa den *Painvin'schen Complex* enthält, dessen Singularitätenfläc zur *Fresnel'schen Fläche* geworden ist. Siehe Kap. 12, § S. 310.

Es sind ferner die Fälle zu untersuchen, in denen ein Th der Wurzeln der Discriminante Δ einander gleich ist, kei jedoch alle Unterdeterminanten 5ter Ordnung der Determinan 6ter Ordnung annullirt. Alsdann fallen einige der Kegel 2ten Grad von denen oben die Rede war, zusammen. Nimmt man z. B. a 2 von ihnen oder 3 etc. fallen zusammen, so werden die bezü lichen Complexe mit

$$[2, 1, 1, 1, 1] \quad \text{oder} \quad [3, 1, 1, 1], \quad \text{etc.}$$

bezeichnet, während für den allgemeinen Complex das Symbo

$$[1, 1, 1, 1, 1, 1]$$

gebraucht wird.

In solchen Fällen hat der Complex Doppelgerade (§ 2, S. 381 *die auch für die Singularitätenfläche Doppelgerade sind. M unterscheidet ausser dem allgemeinen Fall 10 Fälle.* Siehe d Tabelle S. 396.

Es bleiben nun die Fälle zu betrachten, in denen d Determinante 6ter Ordnung Δ vielfache Wurzeln hat und die Wurzeln sämmtliche Minoren 5ter Ordnung (wir wollen sie mit . bezeichnen) oder auch alle Minoren 4ter Ordnung der Det minante, die Δ'' heissen mögen, annulliren.

Wir benutzen die folgende Schreibweise zur Bezeichnu der Complexe, welche diesen Fällen entsprechen; wir nehmen a eine Wurzel sei ν-fach für Δ, ν'-fach für alle Minoren Δ' u annullire *nicht sämmtliche* Minoren Δ''. Den bezüglichen Co plex bezeichnen wir mit dem Symbol

$$[(\nu - \nu', \nu'), r, s, \ldots],$$

worin

$$\nu + r + s + \cdots = 6$$

:t und $r, s, \ldots$ die Vielfachheiten der übrigen Wurzeln der)eterminante Δ angeben, d. h. derjenigen Wurzeln, welche die Δ' nicht annulliren. Mit anderen Worten: wenn eine ν-fache Vurzel von Δ auch die Δ' mit der Vielfachheit ν' der Wurzel nnullirt, so wird in dem oben S. 394 definirten Symbol an ie Stelle der Zahl ν, welche dieser vielfachen Wurzel entpricht, das Symbol $(\nu - \nu', \nu')$ gesetzt.

Auf ähnliche Art wird, wenn eine Wurzel ν-fach für Δ, '-fach für alle Δ' und ν''-fach für alle Δ'' ist, in demselben ymbol an die Stelle der Zahl ν

$$(\nu - \nu', \nu' - \nu'', \nu'')$$

esetzt. So bedeutet z. B. das Symbol $[(3, 2), 1]$, dass von den 5 Wurzeln von Δ eine fünffach und für sämmtliche Δ' doppelt st; und das Symbol $[(111)\,21]$, dass von den 6 Wurzeln von Δ eine einfach und eine andere doppelt ist, ohne alle Δ' zu nnulliren, dass ferner eine dreifach, für alle Δ' doppelt und ür alle Δ'' einfach ist. *Es ist immer:*

$$\nu - \nu' \geqq \nu' - \nu'' \geqq \nu''.$$

Diese Bezeichnungsart ist durch die *Weierstrass'sche Theorie der Elementartheiler*, von der wir in Bd. 1, p. 328 handelten, veranlasst worden. Wir haben hier die $P + \lambda C$ zu untersuchen, wobei P und C Formen zweiten Grads in sechs Variabelen sind.

Auf die Möglichkeit, die Elementartheiler in dieser Frage zu verwerthen, hat zuerst Klein in seiner Dissertation hingewiesen.

Ueber die Literatur siehe Bd. 1, Kap. 12, § 15, S. 328—330.

Wir lassen nun die Tabelle für alle oben erwähnten Fälle folgen.

Den Fällen 9, 10, 11 entsprechen insbesondere als Singularitätenflächen, ausser einer Ebene, die von Cayley unter den Nummern 16, 18, 19 aufgeführten Flächen, *Mem. on Cubic Surfaces, Phil. Trans.*, 1869, Thl. 1, p. 317 und *dual.*

In den Fällen 12—49 ist die Singularitätenfläche immer eine Regelfläche.

Falls alle Δ'' für eine Wurzel von $\Delta = 0$ verschwinden, degenerirt die Singularitätenfläche stets in eine doppelte Fläche 2ter Ordnung.

Laufende Nummer:	Symbol:	Anzahl der Constanten:	Doppelgerade des Complexes:	Singularitätenfläche:
2	[21111]	18	1	4ter Ordnung und 4ter Classe mit einer Doppelgeraden. Sie ist die Complexfläche eines allgemeinen quadratischen Complexes in Bezug auf eine beliebige Gerade oder eine Gerade des Complexes oder eine singuläre Gerade 1ter Ordn. oder eine singuläre Gerade 2ter Ordnung.
3	[3111]	17	1	
4	[411]	16	1	
5	[51]	15	1	
6	[2211]	17	2 Gerade, die sich schneiden.	4ter Ordnung und Classe mit 2 Doppelgeraden, die sich schneiden. Complexfläche des allgemeinen quadratischen Complexes in Bezug auf eine Berührende an die Kummer'sche Fläche. Die Geraden sind . . . beide cuspidal.
7	[321]	16		. . . beide doppelt,
8	[33]	15		. . . eine cuspidal,
9	[222]	16	3 in einer Ebene liegende Gerade oder (dual) 3 durch einen Punkt gehende Gerade *).	Cayley'sche Fläche 3ter Ordnung und 4ter Classe und die durch die drei Geraden gehende Ebene oder dual:
10	[42]	15		Steiner'sche Fläche 4ter Ordnung und 3ter Classe (siehe Kap. 11 und 12) und der Punkt auf den 3 Geraden.
11	[6]	14		Für den Complex [6] ist die Singularitätenfläche eine Complexfläche eines allgemeinen Complexes in Bezug auf eine singuläre Gerade 3ter Ordnung.

12	[(11) 1111]	17	2 windschiefe Gerade.	Regelfläche 4ter Ordnung mit zwei Doppeldirectricen und ohne Doppelerzeugende (Typus 11 von Cremona, siehe Kap. 12, § 10, S. 343).
13	[(11) 211]	16	3 Gerade, von denen eine die beiden anderen windschiefen schneidet.	Dieselbe mit einer Doppelerzeugenden (allgemeiner Typus 5 von Cremona; vergl. oben S. 341).
14	[(11) 31]	15	Dieselben.	Dieselbe mit einer Cuspidalerzeugenden (Typus 5 von Cremona mit Cuspidalerzeugender).
15	[(11) 22]	15	4, von denen zwei windschief sind, und 2 sich schneiden; von den ersteren bildet eine mit den letzteren ein Dreieck und die andere ein Dreikant.	Regelfläche 3ter Ordnung mit 2 Directricen, von denen eine doppelt, die andere einfach ist, ein Punkt auf der Doppeldirectrix und eine durch die einfache Directrix gehende Ebene, welche die doppelte Erzeugende in einem beliebigen, nicht cuspidalen Punkt schneidet. Die Regelfläche 3ter Ordnung hat zwei Cuspidalpunkte und 2 ebensolche Ebenen, welche auf der ersten Leitlinie liegen bez. durch die zweite Leitlinie gehen.
16	[(11) 4]	14	Dieselben.	Dieselbe, doch sind der Punkt und die Ebene cuspidal.
17	[(21) 111]	16	2 windschiefe Gerade.	Regelfläche 4ter Ordnung mit zwei zusammenfallenden Leitlinien (Typus 12 Cremona's). Dieser Leitlinie gehören 4 Cuspidalpunkte und 4 Cuspidalebenen an.

*) In dem Complex [42] fallen zwei der 3 Geraden zusammen und in [6] fallen alle drei zusammen. Daher kommt ein scheinbarer Widerspruch zwischen den Resultaten der verschiedenen Autoren Weiler, p. 204; Segre § 164; R. Sturm, p. 486, die weiter unten citirt werden. Wir machen darauf aufmerksam, damit Irrthümer vermieden werden.

Laufende Nummer:	Symbol:	Anzahl der Constanten:	Doppelgerade des Complexes:	Singularitätenfläche:
18	[(21) 21]	15	3 Gerade, von denen zwei windschiefe durch die dritte geschnitten werden.	Regelfläche 4ter Ordnung (Typus 6 Cremona's) mit einer Doppelerzeugenden.
19	[(21) 3]	14	Dieselben.	Dieselbe mit einer Cuspidalerzeugenden.
20	[(31) 11]	13	Dieselben.	Regelfläche 4ter Ordnung mit einer dreifachen Geraden, die einfache Directrix und doppelte Erzeugende ist (Typus 10 Cremona's).
21	[(31) 2]	14	Wie in Fall 15.	Cayley'sche Regelfläche 3ter Ordnung mit einem Punkt und einer Ebene wie in Fall 15.
22	[(41) 1]	14	Wie in Fall 18.	Wie in Fall 20, doch ist die dreifache Gerade auch Cuspidalerzeugende (nicht nur doppelt) (Typus 10 Cremona's mit stationären Ebenen, die zusammenfallen).
23	[(51)]	13	Wie in Fall 15.	Cayley'sche Regelfläche 3ter Ordnung mit einem Punkt und einer Ebene, wie in Fall 16.
24	[(22) 11]	14	Ein Strahlenbüschel.	Kegel 2ten Grads und Kegelschnitt.
25	[(32) 1]	13	Dasselbe.	Kegel 2ten Grads und durch seine Spitze gehender Kegelschnitt; die Ebene des Kegelschnitts berührt den Kegel.
26	[(22) 2]	13	Ein Strahlenbüschel und eine durch sein Centrum gehende andere Gerade oder dual in der Ebene des Büschels.	Wie in Fall 24, nur zerfällt der Kegel in zwei Ebenen oder dual der Kegelschnitt in zwei Punkte.

27	[(42)]	12	Ebenso.	Ebenen berührender Kegelschnitt oder dual ein Kegel und zwei Punkte auf einer seiner Erzeugenden (specieller Fall von 26).
28	[(33)]	11	Ein Strahlenbüschel und zwei andere Gerade, von denen eine in der Ebene des Büschels liegt, und die andere durch sein Centrum geht.	Eine dreifache Ebene, ein dreifacher Punkt; eine zweite Ebene und ein zweiter Punkt, die sich angehören.
29	[(11) (11) 11]	15	4 Gerade, die ein windschiefes Vierseit bilden.	Zwei Flächen 2ten Grads, die sich in einem windschiefen Vierseit schneiden.
30	[(11) (11) 2]	14	5 Gerade, die ein Vierseit und eine Diagonale bilden.	Eine der Flächen 2ten Grads wird zu einem Paar Berührungsebenen an die andern *).
31	[(21) (11) 1]	14	4 Gerade, die ein windschiefes Vierseit bilden.	Zwei Flächen 2ten Grads, die eine zweimal gezählte Gerade und zwei andere gemeinschaftlich haben, welche die erste schneiden.
32	[(21) (21)]	13	Dieselben.	Zwei Flächen 2ten Grads, die ein Paar von doppelt gezählten Geraden gemeinschaftlich haben.
33	[(22) (11)]	12	Wie in Fall 28.	2 Ebenen, 2 Punkte; eine Ebene und ein Punkt sind zweimal gezählt und gehören sich an.

*) Dieser Complex heisst der Hirst'sche, *Collect. math. in memoriam D. Chelini,* Mediolani 1881, p. 51; *Proc. Lond. Math. Soc.*, 10. Er wird durch zwei zueinander correlative Ebenen erzeugt. Siehe auch R. Sturm, 3, p. 429, 430.

Laufende Nummer:	Symbol:	Anzahl der Constanten:	Doppelgerade des Complexes:	Singularitätenfläche:
34	[(31)(11)]	13	Wie in Fall 30.	Wie in Fall 30.
35	[(11)(11)(11)]	13	Die 6 Kanten eines Tetraeders.	4 Ebenen und 4 Punkte, welche die Seitenflächen und Ecken eines Tetraeders bilden. Dies ist der *tetraedrale Complex*; vergl. § 9.
36	[(111) 111]	14	Ein System von Erzeugenden einer Fläche 2ten Grads.	Eine zweimal gezählte Fläche 2ten Grads.
37	[(111) 21]	13	Ein System von Erzeugenden einer Fläche 2ten Grads und eine Directrix derselben.	Dieselbe.
38	[(111) 3]	12	Dasselbe.	Dieselbe.
39	[(211) 11]	13	Zwei Strahlenbüschel.	Zwei Doppelebenen und auf ihrem Schnitt zwei Doppelpunkte.
40	[(211) 2]	12	Zwei Strahlenbüschel und eine Doppelgerade in einem von ihnen.	Dieselben.
41	[(211) 1]	12	Zwei Strahlenbüschel	Dieselben

42	[(411)]	11	Dieselben.	Dieselben*).
43	[(221) 1]	11	Zwei zusammenfallende Strahlenbüschel.	Eine Ebene und ein Punkt, die einander angehören und viermal zu zählen sind.
44	[(321)]	10	Dieselben.	Dieselben.
45	[(222)]	8	Ein (ebenes) Strahlennetz oder dual ein Strahlenbündel.	Ein Doppelkegel 2ten Grads oder dual ein Doppelkegelschnitt.
46	[(111) (11) 1]	12	Ein System von Erzeugenden einer Fläche 2ten Grads und zwei verschiedene Leitgerade dieser Fläche.	Eine doppelte Fläche 2ten Grads.
47	[(111) (21)]	11	Dieselben, doch fallen die beiden Leitgeraden zusammen.	Dieselbe.
48	[(211) (11)]	11	Zwei Strahlenbüschel und zwei Strahlen, von denen der eine dem 1ten, der andere dem zweiten Büschel angehört.	Ein Paar Ebenen und ein Paar Punkte, zweimal gezählt.
49	[(111) (111)]	9	Die beiden Systeme von Erzeugenden einer Fläche 2ten Grads.	Eine doppelte Fläche 2ten Grads.

*) Näheres über die Singularitätenfläche in den Fällen 40, 41, 42 findet man in der weiter unten citirten Arbeit Segre's, p. 68.

Es sind im Ganzen 49 Species; rechnet man die 6 Species, die noch eine zweite zu ihnen *dualistische* Species zulassen, also die unter den Nummern 9, 10, 11, 26, 27, 45 doppelt, so ergeben sich 55 Species.

Die erste Arbeit über die Classification der Complexe ist von Weiler, *Math. Ann.*, 7; sie enthält jedoch viele Ungenauigkeiten, welche von Segre und Anderen richtig gestellt wurden. Auf Weiler folgte Segre, *Atti Acc. Torino*, 36, 1884; er untersuchte in einem besonderen Aufsatz, *Math. Ann.*, 23 auch die Fälle, in denen die Singularitätenfläche eine degenerirte doppelte Fläche 2ten Grads ist. In dem 3ten Band des Sturm'schen Werks wird der Gegenstand ausführlich nach Methoden der reinen Geometrie behandelt.

§ 8. Der Battaglini'sche oder harmonische Complex.

Der Battaglini'sche Complex (vergl. die Literaturangaben am Ende des § 6) wird auf die folgenden Arten projectiv erzeugt: *Er ist die Gesammtheit der Geraden, die zwei Flächen 2ten Grad f_1, f_2 in vier harmonischen Punkten treffen,* oder:

die Gesammtheit der Geraden, durch welche sich an zwei gegebene Flächen 2ten Grads (die übrigens nicht dieselben sind wie die vorigen) vier harmonische Berührungsebenen legen lassen. Aschieri, *Giorn. di Batt.*, 8.

Der Battaglini'sche Complex lässt sich also auf unendlich viele Arten erzeugen.

Die Congruenz der singulären Geraden des Battaglini'schen Complexes ist der Schnitt dieses Complexes mit dem tetraedralen Complex (siehe § 9) *derjenigen Geraden, deren Polaren in Bezug auf die beiden Flächen 2ten Grads f_1, f_2 sich schneiden.*

Betrachtet man das Büschel $\lambda f_1 + \mu f_2 = 0$ und ordnet die Flächen 2ten Grads dieses Büschels paarweise involutorisch in der Art einander zu, dass $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ die Doppelelemente der Involution darstellen, *so sind die den beiden Flächen 2ten Grads eines jeden Paares gemeinschaftlichen Tangenten die Geraden des Complexes.* Segre und Loria, *Math. Ann.*, 23.

Die singulären Ebenen des Complexes sind die den beiden Flächen 2ten Grads eines jeden Paares gemeinschaftlichen Berührungsebenen, und die singulären Geraden sind die Verbindungsgeraden der Berührungspunkte. Ebenda.

Wie wir schon gesagt haben (§ 7, S. 394), *ist die Sing*

laritätenfläche des Battaglini'schen Complexes ein Tetraedroid; wir fügen hinzu:

Jedem Tetraedroid als Singularitätenfläche entsprechen zwei Battaglini'sche Complexe.

Die auf die Coordinaten p bezogene Gleichung des Battaglini'schen Complexes lässt sich durch die Quadrate der p allein ausdrücken.

Ein specieller Fall des Battaglini'schen Complexes ist der Painvin'sche (*Bull. de Darboux,* 1871; *Nouv. Ann. de math.,* 1872; Desmoulin, *Bull. de la Soc. Math.,* 20), *welcher aus den sämmtlichen Geraden besteht, von denen aus man an ein Ellipsoid Paare von orthogonalen Berührungsebenen legen kann.*

Man erhält diesen Complex, wenn man eine der beiden Flächen 2ten Grads, die auf die oben angegebene Art (als Enveloppe) zur Erzeugung des Complexes dienen, in den Kugelkreis des (Euclid'schen) Raums) degeneriren lässt.*

Die Singularitätenfläche des Painvin'schen Complexes ist eine Fresnel'sche Wellenfläche.

Die Battaglini'schen Complexe wurden von Segre und Loria, *Math. Ann.,* 23 und von Montesano, *Rend. Acc. Napoli,* 1886 in Classen geordnet; man vergleiche auch das Sturm'sche Werk, Bd. 3, p. 488 u. ff.

§ 9. Der Reye'sche oder tetraedrale Complex.

Zu dem tetraedralen oder Reye'schen Complex gehört das Symbol oder die Charakteristik

$$[(11)\,(11)\,(11)] \quad \text{(siehe § 7).}$$

Seine Gleichung in Klein'schen x-Coordinaten kann geschrieben werden:

$$a(x_1^2 + x_2^2) + b(x_3^2 + x_4^2) + c(x_5^2 + x_6^2) = 0.$$

Dem Reye'schen Complex entspricht ein Tetraeder von der Beschaffenheit, dass jede Gerade, welche in einer seiner Seitenflächen liegt oder durch eine seiner Ecken geht, dem Complex angehört.

Die vier Seitenflächen und die vier Ecken des Tetraeders bilden die Singularitätenfläche des Complexes, und die Congruenz

*) Kugelkreis oder absoluter Kegelschnitt (assoluto) heisst der unendlich ferne imaginäre Kreis, der allen Kugeln des Raums gemeinschaftlich ist, d. h. der Ort der unendlich fernen imaginären Kreispunkte sämmtlicher Ebenen des Raums. Siehe S. 28 und 83.

der singulären Geraden besteht aus allen in einer der vier Ebenen enthaltenen und allen durch einen der vier Eckpunkte gehenden Geraden.

Die Kanten des Tetraeders sind Doppelgerade des Complexes.

Wählt man dieses Tetraeder zum Fundamentaltetraeder der Coordinaten, so lautet die Gleichung des Complexes in Coordinaten p_{ij}:

$$ap_{12}p_{34} + bp_{13}p_{42} + cp_{14}p_{23} = 0.$$

Der Reye'sche Complex besteht aus allen Geraden, welche die 4 Ebenen des Fundamentaltetraeders in 4 Punkten schneiden, die in einem bestimmten anharmonischen Verhältniss stehen; oder: *aus allen Geraden, die von den 4 Ecken des Tetraeders in vier in bestimmtem anharmonischem Verhältniss stehenden Ebenen projicirt werden. (Dieses zweite anharmonische Verhältniss ist dem ersteren gleich).*

Variirt man das anharmonische Verhältniss, während das Tetraeder fest bleibt, so ergeben sich ∞^1 confocale tetraedrale Complexe.

Reye hat die folgenden Erzeugungsweisen des tetraedralen Complexes angegeben:

Er ist die Gesammtheit der Geraden, welche die sich entsprechenden Punkte zweier superponirter homographisch einander zugeordneter Räume (siehe Kap. 1) *verbinden,* oder:

die Gesammtheit der Schnittlinien der sich entsprechenden Ebenen der beiden nämlichen Räume; oder:

die Gesammtheit der Geraden, welche die ihnen entsprechenden Geraden in denselben beiden Räumen schneiden.

Andere Erzeugungsarten sind:

Der Reye'sche Complex ist die Gesammtheit der Geraden, welche die Paare sich entsprechender Strahlen zweier homographischer und beliebig im Raum gelegener Strahlenbüschel treffen.

Er ist auch die Gesammtheit der Geraden, welche die Punkte einer Ebene mit den Punkten der ihnen entsprechenden Strahlen eines homographisch auf die Ebene bezogenen Bündels verbinden.

Er wird ferner durch alle Sehnen und Tangenten der sämmtlichen Raumcurven 3ter Ordnung definirt, welche durch die 4 Ecken des Tetraeders gehen und eine Gerade des Raums, die dem Complex natürlich angehört, zweimal schneiden. Nimmt man statt dieser Geraden eine andere Gerade des Complexes, so

ändern sich die Curven 3ter Ordnung, der Complex aber bleibt derselbe.

Der Reye'sche Complex wird durch das Tetraeder und eine dieser Erzeugungsgeraden des Complexes individualisirt.

Ein speciell von metrischem Gesichtspunkt aufgefasster tetraedaler Complex *besteht aus den Geraden, die von zwei festen Punkten gleichweit entfernt sind;* siehe R. Sturm, l. c., p. 364. Ein anderer specieller tetraedraler Complex hat die Charakteristik [(22)(11)]; siehe § 7; *bei ihm sind* die *Complexcurven, d. h. die Curven, welche in den Ebenen des Raums von Geraden des Complexes umhüllt werden, sämmtlich Parabeln und die Complexkegel sämmtlich gleichseitig.* Vergl. S. 122.

Den tetraedralen Complex untersuchte zuerst Reye, *die Geometrie der Lage,* 2 Bde., Hannover 1877, 1880 (1. Aufl., 1866, 1868); auf ihn folgten Lie, *Gött. Nachr.,* 1870, *Math. Ann.,* 5; Battaglini, *Giorn. di Batt.,* 12; Aschieri, *Rend. Ist. Lomb.,* 1879; Loria, *Atti Acc. Torino,* 1884; *Giorn. di Batt.,* 23; etc.

Weiler, *Zeitschr. f. Math.,* 22 stellte die Abbildung auf den Raum von drei Dimensionen her; dem tetraedralen Complex ist der 2te Thl. des 1ten Bds. des Sturm'schen Werks gewidmet.

Arbeiten über andere specielle Complexe findet man auf p. 222, 223 des öfter citirten Buches von Loria, *Il pass. e il pres. delle princip. teorie geom.,* Torino, 1896 und auf p. 102, 103 der deutschen Ausg.

§ 10. Allgemeine Theorie der Liniencongruenzen.

Die Ordnung n einer algebraischen Congruenz ist die Anzahl ihrer Geraden, die durch einen beliebigen Punkt des Raums gehen, und *die Classe* m einer Congruenz die Anzahl ihrer in einer beliebigen Ebene gelegenen Geraden.

Unter dem *Rang* r (nach Schumacher: *Art,* nach Sturm: *Rang*) einer Congruenz versteht man die Anzahl ihrer Paare von Geraden, die mit einer willkürlichen Geraden des Raums demselben Büschel angehören.

Eine Congruenz von der Ordnung n und Classe m pflegt man mit (n, m) zu bezeichnen, und, wenn auch der Rang angegeben werden soll, mit (n, m, r).

Nennt man das *Geschlecht* der Regelfläche, längs welcher die Congruenz (n, m, r) von einem allgemeinen linearen Complex geschnitten wird, p, so besteht die Relation

$$p = (n - 1)(m - 1) - r.$$

Die Zahl p pflegen einige Autoren auch *das Geschlecht der Congruenz* zu nennen.

Wenn Classe und Ordnung gleich 1 sind, so ist der Rang Null.

Jede Congruenz, deren Ordnung und Classe gleich sind, und die einem linearen Complex angehört, hat den Rang Null.

Die Congruenz, welche der Schnitt zweier Complexe von den Graden n_1, n_2 ist, hat den Rang $n_1 n_2 (n_1 - 1)(n_2 - 1)$.

Die Ebenen, welche durch zwei der n Strahlen der Congruenz, die durch einen Punkt P gehen, gelegt werden, umhüllen, wenn P eine Gerade durchläuft, eine abwickelbare Fläche T von der Classe

$$\tfrac{1}{2}n(n-1) + r;$$

durchläuft P eine Ebene, so umhüllen dieselben Ebenen eine Fläche S von der Classe

$$\tfrac{1}{2}m(m-1) + r,$$

für welche die von P durchlaufene Ebene $\frac{1}{2}m(m-1)$-fache Berührungsebene ist.

Die Schnittpunkte der in einer Ebene liegenden m Geraden der Congruenz bilden, wenn die Ebene um eine Gerade rotirt, eine Curve C von der Ordnung

$$\tfrac{1}{2}m(m-1) + r,$$

und wenn die Ebene um einen Punkt rotirt, eine Fläche S_1 von der Ordnung

$$\tfrac{1}{2}n(n-1) + r,$$

für welche das Centrum des Ebenenbündels

$\frac{1}{2}n(n-1)$*-facher Punkt ist.*

Der Ort der Geraden der Congruenz, die eine gegebene Gerade schneiden, ist eine Regelfläche R von der Ordnung

$$n + m,$$

welche diese Gerade zur n-fachen Directrix hat.

Mittelst der algebraischen Congruenzen werden involutorisch Correspondenzen *höherer Ordnung* zwischen den Ebenen und Punkten des Raums bestimmt; diese Zuordnungen wollen wir analog den gewöhnlichen Nullpolaritäten und Nullsystemen von Möbius (§ 3, S. 385) *Nullsysteme höherer Ordnung* nennen. Is

ein Punkt des Raums gegeben, so gehen n Strahlen der Congruenz und mithin $\alpha = \frac{1}{2}n(n-1)$ Ebenen durch ihn; wenn eine Ebene gegeben ist, so liegen m Strahlen der Congruenz und mithin $\beta = \frac{1}{2}m(m-1)$ Punkte in ihr; die gewöhnliche Nullpolarität ist ein specieller Fall der höheren für $\alpha = \beta = 1$.

Einer solchen Correspondenz kann man *eine zweite Charakteristik* γ beilegen, welche angibt, wie viele Punkte auf einer beliebigen Geraden des Raums derart existiren, dass eine der den Punkten entsprechenden Ebenen durch die Gerade geht. *Wenn ein solches Nullsystem mittelst einer Congruenz hergestellt wird, entspricht seine dritte Charakteristik* γ *dem Rang der Congruenz.*

Das älteste Beispiel für eine derartige Zuordnung wurde von Cremona, *Compt. Rend.*, 54, 1862 gegeben; spätere Untersuchungen sind von Ameseder, *Crelle*, 97; Voss, *Math. Ann.*, 23; R. Sturm, ib., 28.

Mehr Einzelheiten und Beispiele findet man in § 56 des 1ten Bds. des Sturm'schen Werks.

Jeder Strahl der Congruenz wird von zwei anderen unendlich nahen Strahlen geschnitten; die beiden Schnittpunkte heissen *Brennpunkte, Focalpunkte* und die beiden durch diese Gerade und je eine der beiden anderen gehenden Ebenen *Focalebenen.*

Die Focalpunkte beschreiben dieselbe Fläche (Brennfläche), die von den Focalebenen umhüllt wird. Sie ist von der Ordnung

$$n_1 = 2m(n-1) - 2r$$

und der Classe

$$m_1 = 2n(m-1) - 2r.$$

Daraus ergibt sich:

Die Differenz zwischen der Ordnung und der Classe der Brennfläche einer algebraischen Congruenz ist das Doppelte der Differenz zwischen der Ordnung und der Classe der Congruenz. Theorem von Klein; siehe Lie, *Gött. Nachr.*, 1870.

Jeder Strahl der Congruenz berührt die Brennfläche in seinen eigenen Focalpunkten und die Berührungsebenen in diesen Punkten sind die Focalebenen.

Singuläre Punkte und Ebenen der Congruenz werden die Punkte und Ebenen genannt, denen unendlich viele Gerade der Congruenz angehören; die von den letzteren gebildeten Kegel

und die von ihnen umhüllten Curven heissen *singuläre Kege und Curven der Congruenz.*

Sind diese Kegel von der h^{ten} Ordnung, so sagt man, de singuläre Punkt sei vom *Grad h*; sind die Curven von de h^{ten} Classe, so heisst die singuläre Ebene vom *Grad h.*

Zwei singuläre Punkte oder Ebenen heissen *verbunden (con jugati)*, wenn die Gerade, welche die beiden Punkte verbinde oder der gemeinschaftliche Schnitt der beiden Ebenen ist, *de Congruenz angehört.*

Manchmal scheint es, als ob die Congruenz eine besonde Brennfläche nicht besitze, sondern nur eine *Brennlinie* habe.

Wir wollen z. B. die Congruenz der Geraden betrachte die zwei gegebene Curven treffen; die Punkte dieser Curve treten als Focalpunkte der Strahlen der Congruenz auf, un es könnte daher scheinen, dass es andere Focalpunkte, als d den beiden Curven angehörigen, nicht gebe.

Einige Autoren haben diese Congruenzen *solche ohne Brenn fläche* genannt, R. Sturm jedoch bemerkt in seinem citirten Wer dass diese Annahme nicht zutrifft, wenn die Congruenz ei höhere als die 1te Ordnung hat; denn offenbar ist alsdann jed Punkt der Verbindungsgeraden der beiden Berührungspunk der den zwei Curven gemeinschaftlichen Tangentialebenen a Focalpunkt anzusehen und daher die Brennfläche die aus dies Verbindungsgeraden gebildete Regelfläche, d. h. die Developpab der den beiden Curven gemeinschaftlichen Tangentialebenen.

Die Punkte der beiden Curven sind nach der eben geg benen Definition offenbar auch *singuläre Punkte* der Congruen man sieht daher, dass solche Congruenzen unendlich viele sing läre Punkte haben; diese können eine oder mehrere Linien bilde die wir *singuläre Linien* nennen wollen; *im Allgemeinen* jedo sind die singulären Punkte nur in endlicher Anzahl vorhande

Man kann mithin die Congruenzen von höherer als d 1ten Ordnung in solche unterscheiden, die *keine singulären Lini haben* und in solche *mit singulären Linien.*

Wenn man einen Strahl einer beliebigen (auch nic algebraischen) Congruenz betrachtet und alle ihm unendli nahen, sowie die kleinsten Abstände zwischen ihm und dies anderen, *so sind die auf dem Strahl liegenden Fusspunkte dies kleinsten Abstände im Allgemeinen immer zwischen zwei Punkte* die *Grenzpunkte* heissen, enthalten.

Unter allen unendlich nahen Strahlen gibt es, wie w

en bereits gesagt haben, zwei, die den Strahl schneiden, für lche also der kleinste Abstand Null ist; diese Schnitte sind die *calpunkte.*

Beachtenswerth ist das Theorem:

Die Focalpunkte, die natürlich beide innerhalb des von den renzpunkten eingeschlossenen Segments liegen, stehen gleichweit n den Grenzpunkten ab.

Daraus ergiebt sich: *Der Mittelpunkt des Segments der renzpunkte fällt mit dem Mittelpunkt des Segments der Focalnkte zusammen;* er wird *der Mittelpunkt des Strahls* genannt.

Man betrachte die beiden dem gegebenen Strahl unendlich hen Strahlen, für welche die Fusspunkte der kleinsten Abände von dem gegebenen Strahl mit den Grenzpunkten zummenfallen; man erhält dann das Theorem: *Die Richtungen eser kleinsten von den Grenzpunkten ausgehenden Abstände stehen nkrecht aufeinander;* die durch den Strahl und diese Richtungen henden Ebenen heissen *Hauptebenen.*

Die Ebenen, welche den Winkel zwischen den Hauptebenen lbiren, fallen mit den Halbirungsebenen des Winkels zwischen n Focalebenen zusammen.

Zwischen dem Winkel γ, den die beiden Focalebenen mitnander bilden, dem Abstand $2d$ der Grenzpunkte und dem bstand 2δ der Focalpunkte besteht die Relation: $\sin\gamma = \frac{\delta}{d}$.

Die hier entwickelten Begriffe gehören der Infinitesimalheorie der Congruenzen an, zu welcher Hamilton und Kummer den Grund gelegt haben. Wir werden diese Theorie in Kapitel 16 besprechen und dort auch die sogenannte *Dichtigkeit* es Systems in einem Punkt eines Strahls in dem von Kummer ingeführten Sinn definiren (siehe weiter unten Kap. 16, § 15), ie mit dem Begriff der *Krümmung* einer Fläche in einem Punkt erwandt ist. Von den Congruenzen, die nach Methoden der Initesimalgeometrie studirt wurden, ist die Congruenz der Normalen zu einer Fläche bemerkenswerth; von ihr wird ebenfalls n Kap. 16 die Rede sein. Hier beschränken wir uns darauf, n den folgenden Paragraphen die *algebraischen* Congruenzen 1ter und 2ter Ordnung zu betrachten.

Die erste Species wichtiger Congruenzen, die sich den Geometern bot, war die der Normalen zu einer Fläche. Im Jahr 1828 begann Hamilton sein Studium der Congruenzen, die

auch *Strahlensysteme* genannt wurden, *Irish Trans.*, 15, 182
16, 1830; 17, 1837 und im Jahr 1860 veröffentlichte Kum
mer seinen schon erwähnten Aufsatz, *Crelle*, 57, der einen wich
tigen Fortschritt in der Entwickelung der Theorie bedeutete.

Den Anfang mit dem systematischen Studium der alg
braischen Congruenzen 1ter und 2ter Ordnung machte Kumm
im Jahr 1866 in einem anderen Aufsatz *Berl. Abh.*, 1866 u
ein grosser Theil der *neuen Geometrie* Plücker's wurde d
Theorie der Congruenzen und speciell derjenigen gewidmet, d
sich aus dem Schnitt zweier linearer Complexe ergeben.

Andere Arbeiten über die Congruenzen sind von Möbiu
Leipz. Ber., 14, 1862; Matthiessen, *Zeitschr. f. Math.*, 2
Acta math., 4; Weingarten, *Crelle*, 98; Bianchi, *Ann.*
mat., 15; Voss, *Math. Ann.*, 9; R. Sturm, *Gött. Nachr.*, 188
Math. Ann., 36; Schumacher, ib., 37, 38; Montesano, *A*
Acc. Torino, 1892; *Rend. Lincei*, 1892; *Rend. Palermo*, 1893; e

Eine alles Wesentliche umfassende Darstellung der Co
gruenzentheorie findet man bei Sturm l. c. Bd. 2. Die Einfü
rung des *Rangs* geschah durch Schumacher, der ihn, w
wir oben bereits bemerkt haben, *Art* nannte.

§ 11. Congruenzen 1ter Ordnung.

Alle Congruenzen 1ter Ordnung sind vom Rang Null; können keine eigentliche Brennfläche als Ort der Focalpun haben; ihre Brennfläche ist vielmehr nur die Enveloppe der Foc ebenen.

Unter die Congruenzen 1ter Ordnung ist *das Strahlenbün* zu rechnen, *welches von der Classe Null ist und für welc nur ein einziger singulärer Punkt existirt.*

Jede andere Congruenz 1ter Ordnung hat immer wenigst eine singuläre Linie. Wenn eine singuläre Linie der linea Congruenz die Ordnung γ_h hat und so beschaffen ist, dass unendlich vielen Strahlen, die von einem ihrer Punkte ausgeh einen Kegel h^{ter} Ordnung bilden, so besteht die Relation

$$\sum \gamma_h h(h-1) = m(m-1),$$

worin m die Classe der Congruenz angibt und die Summir sich über alle singulären Linien erstreckt.

Man erhält ferner noch zwei Beziehungen, von denen letzte aus den beiden früheren folgt:

$$\sum \gamma_h h^2 = m(m+1),$$
$$\sum \gamma_h h = 2m.$$

Die Congruenz erster Ordnung kann höchstens zwei sin-
ire Linien (Leitcurven der Congruenz) haben.

Wenn sie nur eine Leitcurve hat und auf jedem ihrer
ahlen die Focalpunkte im Allgemeinen verschieden sind, so
t eine Congruenz der Sehnen einer gewissen Curve vor.

Die einzige aus Sehnen einer Curve gebildete Congruenz
Ordnung ist die Congruenz der Sehnen einer Raumcurve
Ordnung; sie ist von der 3ten Classe.

Wenn die Congruenz zwei Leitcurven hat, so muss die eine
ihnen eine Gerade sein; die Ordnung der anderen Curve ist
n die Classe m der Congruenz; diese Directrix mter Ordnung
ss die Gerade in

$$m(m-1)$$

kten treffen.

Wenn die beiden Brennpunkte auf jedem Strahl der Con-
enz zusammenfallen, so hat diese eine einzige Focalcurve
l Directrix, welche nur eine Gerade sein kann.

Diese Congruenz lässt sich auf eine einzige Art, wie folgt,
eugen: man ordnet die Punkte einer Geraden in einer Cor-
pondenz $[1, m]$ *den Ebenen des Büschels zu, welches diese*
rade zur Axe hat, und betrachtet als Gerade der Congruenz
sämmtlichen (ein Büschel bildenden) Geraden, welche durch
en Punkt der Geraden gehen und in der entsprechenden Ebene
ien.

Der (einzige) Brennpunkt eines jeden Strahls ist der Punkt,
welchem der Strahl die Leitgerade trifft und die Focalebene
die Ebene, die durch den Strahl und die Leitgerade geht.

Kummer hat in seiner Arbeit *Berl. Abh.*, 1866 bei der
ssification der Congruenzen 1ter Ordnung die mit nur einer
callinie nicht zu diesen Congruenzen gerechnet.

12. Congruenzen 2ter Ordnung ohne singuläre Linien.

Die Congruenzen zweiter Ordnung können nur entweder
e endliche Anzahl singulärer Punkte oder *singuläre Linien*
ben.

In dem ersteren Fall kann die Classe m nicht höher als die
sein.

In einer Congruenz 2ter Ordnung ohne singuläre Li können keine singulären Ebenen von einem höheren als 1ten Grad und keine singulären Punkte von höherem als 6ten Grad vorkommen. Siehe § 10.

Jeder singuläre Punkt ersten Grads ist das Centrum e Strahlenbüschels, welches in einer singulären Ebene liegt, ebenfalls ersten Grads ist.

Der Rang einer Congruenz $(2, m)$ ohne singuläre Li ist der $(m-2)^{te}$.

Die Charakteristiken des durch die Congruenz $(2, m)$ stimmten Nullsystems (siehe § 10) *sind:*

$$1,\ \tfrac{1}{2}m(m-1),\ m-2.$$

Die Brennfläche einer Congruenz $(2, m)$ ohne singu Curven ist 4ter Ordnung, $2m^{ter}$ Classe und 12ten Rangs); j singuläre Punkt der Congruenz ist Doppelpunkt für die Br fläche.*

Die Strahlen, deren Focalpunkte und die Strahlen, d Focalebenen zusammenfallen, bilden 2 Regelflächen $2(m+$ Grads.

Wenn α_h die Anzahl der singulären Punkte h^{ten} Grads zeichnet, so gelten die folgenden Relationen:

$$\sum \alpha_h = 18 - m,$$
$$\sum \alpha_h h = 4(m+2),$$
$$\sum \alpha_h h^2 = 2m(m+2),$$
$$\sum \alpha_h h^3 = (m+2)^2(m-1).$$

Jede Congruenz $(2,m)$ ohne singuläre Linien hat $\frac{1}{2}(m-2)(n$ Doppelstrahlen und zu jedem singulären Punkt h^{ten} Grads hören $\frac{1}{2}(h-1)(h-2)$ Doppelstrahlen, welche Doppelerzeug des von diesem Punkt ausgehenden Kegels sind; kein Do strahl liegt in der Brennfläche.

Jede singuläre Ebene enthält 6 auf einem Kegelschnitt lieg singuläre Punkte und jeder (von einem singulären Punkt 2ten G ausgehende) singuläre Kegel 2ten Grads enthält im Ganzen 9 guläre Punkte, die auf einer Raumcurve 4ter Ordnung 1ter Sp liegen, welche einen Doppelpunkt in der Spitze des Kegels Jeder Doppelstrahl enthält zwei singuläre Punkte; die Su

---

*) Unter Rang einer Fläche versteht man die Zahl a. S S. 208.

Zahlen, welche die Grade der beiden letzteren angeben, be-
$m + 2$.

Es gibt zwei Arten von Congruenzen $(2, m)$ *ohne singuläre*
te, nämlich:

I. *die Congruenzen, welche nur singuläre Punkte vom* 1ten, 3ten *und* $(m-1)^{\text{ten}}$ *Grad besitzen* (1te *Art);*

II. *diejenigen, welche nur singuläre Punkte vom* 1ten, 2ten $(\frac{1}{2}m + 1)^{\text{ten}}$ *Grad haben* (2te *Art).*

Die Zahlen α_h bezüglich der verschiedenen Arten von Con-
nzen $(2, m)$ ohne singuläre Linien sind mithin die folgenden:

	Congruenzen 1ter Art					
	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)	(2, 7)
α_1	16	10	6	3	1	0
α_2	—	5	6	6	4	0
α_3	—	—	2	3	6	10
α_4	—	—	—	1	0	0
α_5	—	—	—	—	1	0
α_6	—	—	—	—	—	1

Congruenzen 2ter Art		
	(2, 4)	(2, 6)
α_1	6	0
α_2	6	8
α_3	2	0
α_4	—	4

Für die beiden Congruenzen (2, 6) werden nach dem Vor-
g R. Sturm's in seinem citirten Werk die Bezeichnungen
$6)_{\text{I}}$, $(2, 6)_{\text{II}}$ gebraucht. Es ist zu beachten, dass die Autoren
R. Sturm seine „2te Art" die „1te" nannten und umgekehrt.

Die Congruenz (2, 2) *hat zur Brennfläche eine Kummer-*
Fläche; sie ist der vollständige Schnitt eines Complexes 2ten *Grads*
einem linearen Complex.

Aus den 16 singulären Punkten lassen sich 40 Paare ver-
dener Punkte und 80 Paare nicht verbundener Punkte zusam-
stellen. Jeder Punkt ist mit anderen 5 Punkten verbunden.

Diese Congruenz studirte speciell Kummer, *Berl. Ab* 1866; Reye, *Crelle*, 86; Schur, *Math. Ann.*, 15; Capora *Mem. Lincei*, (3), 2, 1878; Stahl, *Crelle*, 92; Hirst, *Lo math. Soc.*, 14; R. Sturm, *Crelle*, 101. Eine ausführliche handlung dieser und anderer Congruenzen findet man p. 117 u. ff. des 2ten Bds. des R. Sturm'schen Werks.

Die Congruenz (2, 3) *hat 5 singuläre Punkte* 2ten *Gr* S_2, *10 ersten Grads* S_1 *und mithin 10 singuläre Ebenen; j von diesen geht durch 2 Punkte* S_2 *und einen Punkt* S_1.

Jeder Punkt S_2 *ist mit jedem anderen* S_2 *und mit vier verbunden; jeder Punkt* S_1 *ist mit drei* S_1 *und mit zwei* S_2 *bunden.*

Durch jede Congruenz (2, 3) *gehen 10 tetraedrale C plexe; das Fundamentaltetraeder eines jeden von ihnen hat Ecken drei Punkte* S_2 *und den einzigen Punkt* S_1, *der mit kei dieser drei* S_2 *verbunden ist.*

Die Brennfläche ist eine Fläche 4ter *Ordnung und* 6ter *Cla sie hat die 10 singulären Ebenen zu in Kegelschnitten dop berührenden Ebenen,*

Diese Congruenz wurde ausser von Kummer, Reye, Hi die oben citirt wurden, auch von Stahl, *Crelle*, 91; Voss, *M Ann.*, 23, p. 381 u. ff.; Schumacher, *Unters. über Strahlens* 3ter *Ordn. und* 2ter *Classe, Dissertation*, München 1885 stu

---

Die Congruenz (2, 4) *ist vom* 2ten *Rang; sie hat nothw diger Weise einen Doppelstrahl, der die beiden singulären Pu* 3ter *Ordnung verbindet; sie besitzt zwei miteinander verbun singuläre Punkte* S_3 *dritten Grads, 6 zweiten und 6 ersten Gr und mithin 6 singuläre Ebenen. In jeder singulären Ebene l ein Punkt* S_3, *zwei* S_2 *und zwei* S_1. *Jeder Punkt* S_2 *ist mit einem der übrigen* S_2 *nicht verbunden; ein Punkt* S_3 *ein* S_2 *sind immer verbunden; jeder Punkt* S_1 *ist mit drei and* S_1 *nicht verbunden und nur mit einem einzigen* S_3 *verbunden*

Die Brennfläche ist 4ter *Ordnung und* 8ter *Classe mit konischen Punkten und 6 längs Kegelschnitten berührenden Ebe Die Bitangentialebenen umhüllen eine Developpable* 4ter *Cla und die stationären Ebenen eine Developpable* 12ter *Classe, w die Brennfläche längs einer Curve* 12ter *Ordnung berührt.*

Durch die Congruenz (2, 4) *gehen 3 tetraedrale Compl*

Die Ecken des Tetraeders sind die beiden Punkte S_3 und Punkte S_2, welche nicht miteinander verbunden sind.

Die Congruenz wurde ausser von Kummer und den gen oben citirten Autoren speciell auch von Stahl studirt, le, 97.

Die Congruenz (2, 5) hat drei singuläre Ebenen und ist 3ten Rang.

Sie hat einen Punkt S_4, drei Punkte S_3, sechs S_2 und drei ferner drei Doppelstrahlen, die S_4 mit jedem der Punkte S_3 inden.

Es existirt ein einziger singulärer Kegel 4ter Ordnung, wel- die sämmtlichen singulären Punkte bis auf einen S_1 enthält. diesem S_1 entsprechende singuläre Ebene enthält auch die den anderen Punkte S_1.

Die Congruenz (2, 5) gehört zu einem einzigen tetraedralen plex, dessen Tetraeder die Punkte S_4, S_3 zu Ecken hat.

Die Brennfläche ist 4ter Ordnung, 10ter Klasse mit 13 koni- n Punkten und 3 singulären Berührungsebenen. Die doppelt ührenden Ebenen umhüllen eine Developpable 12ter Classe l die stationären Ebenen eine Developpable 18ter Classe.

Diese Brennfläche ist nicht die einzige Fläche 4ter Ord- ng mit 13 konischen Punkten.

Die Congruenz $(2, 6)_{\text{I}}$ hat einen Punkt S_5, sechs S_3, vier S_2, en S_1, eine singuläre Ebene, 6 Doppelstrahlen.

Alle Punkte S_2 und der einzige S_5 liegen in der singulären ene; der Rang von $(2, 6)_{\text{I}}$ ist der 4te.

Die $(2, 6)_{\text{I}}$ gehört einem tetraedralen Complex nicht an.

Die Brennfläche ist 4ter Ordnung, 12ter Classe mit 12 Doppel- nkten; sie ist nicht die einzige von dieser Beschaffenheit); die ppelt berührenden Developpablen und die stationären Ebenen d beide von der 24ten Classe.*

Die Congruenz $(2,6)_{\text{II}}$ hat vier Punkte S_4, acht S_2, sechs ppelstrahlen, welche die 4 Punkte S_4 verbinden; sie ist vom n Rang.

---

*) Rohn hat bewiesen, dass es 4 Arten von Flächen 4ter Ordng mit 12 Doppelpunkten gibt; siehe *Math. Ann.*, 29; vergl. auch Sturm, l. c., p. 271.

Sie unterscheidet sich dadurch von der anderen Congru 6ter Classe, dass sie einem tetraedralen Complex angehört; Ecken des Tetraeders sind die 4 Punkte S_4.

Die sechs in einer Ebene liegenden Strahlen der Congru bilden immer ein Brianchon'sches Sechsseit. Vergl. S. 76.

Die Brennfläche hat 12 Doppelpunkte; sie ist nicht diesel wie die von $(2, 6)_I$, sondern eine andere der 4 von Rohn fundenen Flächen (siehe oben). Vergl. R. Sturm, l. c., p. 271.

Man beachte, dass die Congruenzen (2, 5), (2, 4), (2, (2, 2) *sich sämmtlich als specielle Fälle von $(2, 6)_{II}$ ansel lassen;* Kummer, l. c., p. 102; R. Sturm, l. c., 2, p. 294.

Die Congruenz (2, 7) *hat einen Punkt S_6, 10 Punkte und 10 Doppelstrahlen, welche den einzigen Punkt S_6 mit 10 Punkten S_3 verbinden; sie ist vom 5ten Rang.*

Die Brennfläche ist von der 14ten Classe und hat 11 co sche Punkte; die doppelt berührenden Developpablen und stat nären Ebenen sind von den Classen 40 bez. 30; diese Bre fläche ist nicht die einzige, die 11 conische Punkte hat; es g ausser ihr noch drei andere, wie Rohn, l. c. gefunden hat.

Die Congruenzen 2ter Ordnung mit nur singulären Punk wurden zuerst in der bereits citirten Arbeit von Kumm 1866 studirt; später folgten die oben schon angegebenen A sätze, dann Caporali, *Rend. Acc. Napoli,* 1879; Bertini, *Re Acc. Lincei,* 1879—80; Loria, *Atti Acc. Torino,* 1884—18 Masoni, *Rend. Acc. Napoli,* 1883.

Die Arbeit Caporali's enthält eine sehr elegante Erz gungsart für die Congruenzen (7, 2), (6, 2), (5, 2).

§ 13. Congruenzen 2ter Ordnung mit singulären Lini

Von diesen Congruenzen unterscheidet man drei Kategori

I. Die Congruenz besteht aus den Sehnen einer Raumcu welche nur eine Curve 4ter Ordnung 1ter Species sein kann. Si Kap. 10, S. 254. *Sie ist 6ter Classe und 2ten Rangs.*

Die Brennfläche ist 8ter Ordnung und wird aus den Kegeln 2ten Grads gebildet, die durch die Curve 4ter Ordn gehen.

Die 4 Spitzen der Kegel sind für die Congruenz singuläre ıkte 2ten Grads; die singuläre Linie ist offenbar die Raum- ve 4ter Ordnung.

II. *Die Congruenz besteht aus allen Geraden, die zwei ven treffen; diese Curven sind die singulären Linien und nen sein:*

A) *zwei Kegelschnitte mit zwei gemeinschaftlichen Punkten: Congruenz ist 4ter Classe und 2ten Rangs; die Punkte der len Kegelschnitte sind singulär 2ten Grads mit Ausnahme der len gemeinschaftlichen Punkte, die singulär 3ten Grads sind; Ebenen der beiden Kegelschnitte sind singulär 2ten Grads und zwei Berührungsebenen an beide Kegelschnitte in ihren Schnitt ıkten singuläre Ebenen 1ten Grads.*

Betrachtet man das Büschel von Flächen 2ter Ordnung, che durch die beiden Kegelschnitte gehen, und in diesem Büschel zwei nicht degenerirten Kegel, so sind die Spitzen dieser len Kegel auch singuläre Punkte 2ten Grads für die Congruenz; Brennfläche (4ter Ordnung) besteht dann aus diesen beiden geln.

B) *Eine der singulären Linien ist eine Gerade und die lere eine Curve n^{ter} Ordnung, welche die Gerade in $n - 2$ nkten schneidet. Diese Congruenz ist n^{ter} Classe und nullten ngs.*

Jeder Punkt auf der singulären Geraden ist ein singulärer nkt n^{ten} Grads und jeder Punkt der Curve singulär 1ten Grads. le durch die Gerade gelegte Ebene ist singulär 2ten Grads. Brennfläche besteht aus der Gesammtheit aller durch die ade an die Curve gezogenen Berührungsebenen; sie ist mithin ı der Ordnung

$$m - 2(n - 2),$$

nn m die Classe der Raumcurve angibt.

Die Congruenz hat zu Doppelstrahlen alle Geraden, welche Curve zweimal schneiden und von den Punkten der singu- en Geraden ausgehen; diese Bisecanten bilden eine Regelfläche ı der Ordnung

$$2(n - 1) - \tfrac{1}{2}m.$$

III. *Die Congruenz besteht aus Strahlen, welche eine gewisse guläre Linie nur einmal schneiden. Es können hier die genden Fälle vorkommen:*

A) *die singuläre Linie ist eine Gerade. Die Congruenz t den Rang Null. Sie kann sein:*

(1) *die Congruenz* $(2, 2)$ *aller Geraden, die eine Fläc* 2ter *Ordnung berühren und eine gegebene Gerade schneiden;*

(2) *die Congruenzen* $(2, 2\mu - 2)$ *der Geraden, welc in einem Punkt eine Fläche* μ^{ter} *Ordnung mit einer* $(\mu - 2)$*-fach Geraden berühren und welche diese letztere in einem zweit Punkt treffen;*

(3) *die Congruenzen* $(2, m)$ *der Geraden, die man erh wenn die Punkte einer Geraden den Ebenen eines Büsch dessen Axe die Gerade ist, in der Correspondenz* $(2, m)$ *zugeor net und die Büschel von Geraden construirt werden, deren Centru in einem Punkt der Geraden liegt und deren Ebene die dies Punkt entsprechende Ebene ist.*

Diese Species (3) hat Kummer nicht in Erwägung gezog

B) *Die singuläre Linie ist von der Ordnung* $n > 1$*; v jedem ihrer Punkte geht ein Strahlenbüschel der Congruenz u und ausserdem ein anderer isolirter Strahl. Die Classe der C gruenz ist der Ordnung der singulären Curve, die rational s muss, gleich.*

Die Ebenen der von den Punkten der singulären Cu ausgehenden Strahlenbüschel müssen einen Kegel zweiter Ordnu berühren, dessen Spitze auch ein singulärer Punkt für die C gruenz ist.

Der Rang der Congruenz ist $n - 1$*.*

Die Congruenz besteht aus den Tangenten an einen K 2ter *Ordnung.*

Von dieser Species lassen sich zwei Unterabtheilungen un scheiden:

(1) *die rationale Curve* n^{ter} *Ordnung liegt auf d Kegel* 2ten *Grads und geht* $n - 2$ *mal durch dessen Spitze;*

(2) *die rationale Curve* n^{ter} *Ordnung liegt nicht dem Kegel, ist aber projectiv zu ihm, d. h. ihre Punkte entsprec eindeutig den Berührungsebenen des Kegels und jeder Punkt l in der ihm entsprechenden Berührungsebene.*

C) *Die singuläre Linie ist von der Ordnung* $n >$ *von jedem ihrer Punkte geht ein Kegel* 2ter *Ordnung von Gera der Congruenz aus und irgend ein anderer Strahl. Der R der Congruenz ist* $n - 2$*.*

Man unterscheidet die folgenden Fälle:

(1) *der Kegel* 2ter *Ordnung zerfällt in zwei Ebenen. Congruenz ist* $2n^{\text{ter}}$ *Classe und besteht aus Strahlen, welche e Kegel* 2ter *Ordnung berühren und eine ebene Curve* n^{ter} *Ordn die* $n - 1$ *mal durch die Spitze des Kegels geht, schneiden.*

Die hier folgenden Arten hat Kummer nicht in Erwägung ogen, sie wurden von Sturm gefunden.

(2) *Der von einem Punkt der singulären Linie aus- ende Kegel 2ten Grads ist nicht degenerirt; die singuläre Linie ein Kegelschnitt. Die Congruenz besteht aus allen Geraden, che den Kegelschnitt schneiden und eine Fläche 4ter Ordnung ühren, die den Kegelschnitt zur Doppelcurve und ausserdem h 4 andere conische Punkte hat. Die Congruenz ist 4ter Classe.*

(3) *Der Kegel degenerirt nicht und die singuläre Linie ist e ebene Curve 3ter Ordnung mit einem Doppelpunkt; die Con- uenz ist 6ter Classe; sie entsteht auf die folgende Art: Man mt im Raum 4 Punkte an, deren 6 Verbindungsgerade sich der Curve 3ter Ordnung schneiden; alle Kegel 2ten Grads, en Spitzen auf der Curve liegen, und welche durch die vier ählten Punkte und durch den Doppelpunkt der Curve gehen, eugen die Congruenz* (2, 6).

(4) *Der Kegel degenerirt nicht und die singuläre Linie ist e Raumcurve 3ter Ordnung; die Congruenz ist 6ter Classe; sie steht auf die folgende Art: Auf der Raumcurve 3ter Ordnung mt man 4 Punkte an und zieht durch einen von ihnen P e Sehne, welche die Curve in einem fünften Punkt Q schneidet; Gesammtheit der Kegel 2ten Grads, deren Spitzen auf der rve liegen, und welche durch die 4 Punkte gehen und in die Sehne PQ berühren, erzeugt die Congruenz.*

Die sechs Verbindungsgeraden der 4 Punkte sind Doppel- ahlen der Congruenz und die 4 Punkte sind singulär vom n Grad.

Die Congruenzen 2ter Ordnung mit singulären Linien be- ndelte zuerst Kummer in dem wiederholt citirten Aufsatz m Jahr 1866; er begann sie zu classificiren; es entgingen ihm loch einige Species; vollständig ist die Aufzählung von Sturm, *ath. Ann.*, 36, von Schumacher, ib., 38 und in der schon irten *Dissertation* Schumacher's. Das letzte Kapitel des n Bds. des Sturm'schen Werks gibt eine eingehende Darstel- ng dieser Congruenzen.

Mit ihnen beschäftigte sich auch Montesano, *Atti Acc. rino*, 1892; *Rend. Lincei*, (5), 1; *Rend. Palermo*, 7; *Rend. t. Lomb.*, 1893; er studirte ihre Abbildung auf eine Ebene.

Ueber die Congruenzen höherer als der zweiten Ordnu existiren nur wenige Arbeiten.

Eine der ersten ist von Irmer, *Ueber Strahlensysteme 3ter Or nung mit Brenncurven, Dissertation,* Halle 1870 (siehe die *Fortsch d. Math.,* 1870, p. 611); eine Congruenz (3, 3) wurde v Roccella in einer unter dem Titel: *Sugli enti geometrici de spazio di rette* etc., 1882 separat publicirten Arbeit untersuch in welcher der Verfasser eine specielle, durch drei projecti Büschel linearer Complexe erzeugte Congruenz studirte. Mit Co gruenzen 3ter und höherer Ordnung befassten sich auch Hirs *Proc. London Soc.,* 14, 16, 17; *Rend. Palermo,* 1 und Fan *Atti Acc. Torino,* 1894—1896; 1901; *Mem. Acc. Torino,* (: 50, 1901. In dem letzteren Aufsatz stellt Fano seine sämn lichen früheren Untersuchungen über die Congruenzen 3ter Or nung ohne singuläre Linien systematisch zusammen.

§ 14. Die Kugelgeometrie.

Wenn 5 Kugeln gegeben sind, deren Gleichungen in Car sischen Coordinaten

$$s_i \equiv (x - \alpha_i)^2 + (y - \beta_i)^2 + (z - \gamma_i)^2 - R_i^2 = 0,$$
$$(i = 1, 2, \ldots, 5)$$

lauten, so lässt sich die Gleichung jeder anderen Kugel Raums

$$s \equiv s_1 x_1 + s_2 x_2 + s_3 x_3 + s_4 x_4 + s_5 x_5 = 0$$

schreiben, worin die x Grössen bedeuten, die von der sp ciellen in Betracht gezogenen Kugel abhängen.

Die fünf Grössen x kann man zu *homogenen Coordina* einer Kugel des Raums nehmen; die fünf gegebenen Kug sind dann die *Fundamentalkugeln* des Coordinatensystems.

Betrachtet man *die Kugel* als Element eines Raums, *bildet offenbar die Gesammtheit aller Kugeln einen linear Raum von 4 Dimensionen,* während die Gesammtheit aller Gera des Raums, wie wir schon gesagt haben, einen *quadratisch* Raum von 4 Dimensionen bildet.

Dieses homogene Coordinatensystem wurde von Loria gewendet.

Ein anderes von Reye benutztes System *nicht* homoge Coordinaten ist das folgende:

Wir wollen *Potenz eines Punkts in Bezug auf eine Ku* das Produkt der Abstände des Punkts von zwei mit ihm

rselben Geraden liegenden Punkten der Kugel nennen; (*dieses oduct bleibt beim Variiren der durch den Punkt gehenden Trans-salen constant*); die drei Coordinaten α, β, γ des Mittelpunkts c Kugel und die in Bezug auf die Kugel gebildete Potenz p s Anfangspunkts der Cartesischen Coordinaten (diese Potenz rd durch $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - R^2 = p$ ausgedrückt) können zu ordinaten der Kugel im Raum genommen werden.

Die Coordinaten x_i haben (analog, wie bei den homogenen nkt- oder Ebenencoordinaten) die Eigenschaft, dass eine jede er linearen Transformationen geometrisch der Umänderung des stems der fünf Fundamentalkugeln in ein System von fünf deren entspricht, welche in Bezug auf die früheren zu Coor-naten die Coefficienten der zu der gegebenen inversen linearen bstitution haben.

Sie haben ausserdem die Eigenschaft, *dass, wenn der Kugel-um mittelst einer Transformation durch reciproke Radienvectoren nsformirt wird, die Coordinaten der transformirten Kugeln in ezug auf die 5 transformirten Fundamentalkugeln dieselben sind, ie die der früheren Kugeln in Bezug auf die früheren 5 Fun-mentalkugeln.* Loria.

Setzt man

$$2R_{ij} = 2R_{ji} = R_i^2 + R_j^2 - \\ - \{(\alpha_i - \alpha_j)^2 + (\beta_i - \beta_j)^2 + (\gamma_i - \gamma_j)^2\},$$

heisst der Ausdruck $2R_{ij}$ *Invariante* der beiden Fundamen-lkugeln (i), (j); *sein Verschwinden ist die nothwendige und isreichende Bedingung dafür, dass die beiden Kugeln einander thogonal (senkrecht) schneiden.*

Wenn alle R_{ij} verschwinden, d. h., wenn die fünf Kugeln je zweien senkrecht auf einander stehen, so gilt die Relation $\sum \frac{1}{R_i^2} = 0$. Darboux, *Sur une classe remarquable des urbes et surfaces*, Paris 1873, p. 135.

Fünf Kugeln, die sich zu je zweien orthogonal schneiden, nnen nicht sämmtlich reell sein.

Wird mit R der Radius einer beliebigen Kugel mit den oordinaten x_i, $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ bezeichnet, so besteht die ormel

$$R^2 = \frac{\sum_{ij} R_{ij} x_i x_j}{(\sum_i x_i)^2},$$

us welcher unmittelbar die Beziehungen vor Augen treten, die wischen den x bestehen müssen, damit die Kugel entweder den

Radius Null habe (sich auf einen Punkt, eine sogenannte *Punk kugel,* reducire) oder einen unendlich grossen Radius habe (si auf eine Ebene, eine *Ebenenkugel,* reducire).

Eine Punktkugel ist als orthogonal zu einer Kugel anz sehen, wenn sie auf ihr liegt; zwei Punktkugeln sind orthogon wenn sie zusammenfallen.

Nennt man R_{xy} die Polare des Pols y in Bezug auf die For

$$R_{xx} = \sum_{ij} R_{ij} x_i x_j ,$$

so ist die gemeinschaftliche Invariante der beiden Kugeln n den Coordinaten (x) *und* (y)

$$- \frac{R_{xy}}{\Sigma_i x_i \Sigma_i y_i} .$$

Die Bedingung dafür, dass die beiden Kugeln (x), (*einander berühren, ist*

$$R_{yy} R_{xx} - (R_{xy})^2 = 0 .$$

Wie in der Liniengeometrie, so lassen sich auch in d Kugelgeometrie die *Kugelcomplexe,* die *Kugelcongruenzen,* ih *Ordnungen,* etc. definiren.

Alle Kugeln eines linearen Kugelcomplexes stehen senkre auf derselben Kugel.

Alle Punktkugeln des Raums bilden offenbar einen Compl 2ten Grads, dessen Gleichung

$$\sum_{ij} R_{ij} x_i x_j = 0$$

lautet; wenn man zwischen den x eine neue quadratische Gl chung aufstellt, so ergibt sich ein anderer Kugelcomplex 2ten Gra die den beiden Complexen gemeinschaftliche Congruenz 4ter O nung wird nur von Punktkugeln gebildet; dabei ist das Theor bemerkenswerth, *dass der Ort dieser* ∞^2 *Punktkugeln eine Cycl ist.* Siehe Kap. 12, § 7.

Ferner gilt im Allgemeinen:

Der Ort der Punktkugeln eines Complexes n^{ter} *Ordnu ist eine Fläche* $2n^{\text{ter}}$ *Ordnung, die den unendlich fernen in ginären Kreis zur n-fachen Linie hat. Der Ort der Pun kugeln einer Congruenz* n^{ter} *Ordnung ist eine Curve* $2n^{\text{ter}}$ *Ordnu*

Von diesem Gesichtspunkt aus studirte und classifici Loria die *Cycliden,* wie wir an der betreffenden Stelle, Kap. angegeben haben.

Die ersten Begriffe einer Kugelgeometrie verdankt man
e, *Compt. Rend.*, 1870; *Math. Ann.*, 5, ferner Darboux in
n schon auf Seite 421 citirten Werk (vergl. auch Darboux,
ons sur la théorie générale des surfaces, Vol. 1: *Les coor-
nées pentasphériques*); auf sie folgten Reye, *Synthetische Geo-
trie der Kugeln und linearen Kugelsysteme mit einer Einleitung
die analytische Geometrie der Kugelsysteme*, Leipzig 1879;
elle, 99; Loria, *Mem. Acc. Torino*, 1884; *Atti Acc. Torino*,
85.

Die Arbeit des letzteren Autors enthält eine systematische
handlung des Gegenstands; wir haben sie zu den wenigen
igen Angaben benutzt.

Mit metrischen Beziehungen in Bezug auf die Kugeln des
ums beschäftigten sich Frobenius, *Crelle*, 79; Darboux,
c. und *Ann. de l'Éc. norm. sup.*, 1872; siehe auch Salmon-
edler, *Anal. Geom. des Raums*, 2. Thl., 3. Aufl. p. 453 u. ff.

Ueber die Bestimmung der durch drei gegebene Punkte
henden *Punktkugel* und die Beziehung dieses Problems zu der
ufgabe, den Kreis zu construiren, der drei gegebene Kreise
rührt, siehe Casey, *Trans. Irish Ac.*, 1866; Cayley, *Ann.
mat.*, (2) 1.

Kapitel XV.

Abzählende Geometrie.

§ 1. Allgemeines. — Princip der Erhaltung der Anza

Die abzählende Geometrie beschäftigt sich mit den Problem die zu ermitteln suchen, *wie viele bestimmte geometrische Gebi existiren, die gegebenen Bedingungen genügen;* z. B. wie vi Kegelschnitte eines Büschels eine Gerade berühren, oder v viele Curven 4ter Ordnung mit einem dreifachen Punkt du zehn gegebene Punkte gehen, etc.

Nachdem das geometrische Gebilde definirt ist, nehmen an, es existiren ∞^c Individuen, die dieser Definition entsprech d. h., wir setzen voraus, bei der analytischen Darstellung Gebildes bleiben c Constante unbestimmt; die Zahl c pflegt dann *die Constantenzahl* des Gebildes genannt zu werden.

1. *Für einen Punkt der Ebene ist* $c = 2$ *und für ei Punkt des Raums* $c = 3$.

2. *Für eine Ebene des Raums ist* $c = 3$.

3. *Für eine Gerade in der Ebene ist* $c = 2$ *und für solche im Raum* $= 4$.

4. *Bei einem Dreieck im Raum wird* $c = 9$ *und in Ebene* $c = 6$.

5. *Die Constantenzahl eines ebenen Polygons von n Se im Raum beträgt:*

$$c = 2n + 3.$$

6. *Für ein Polyeder von k Seiten ist* $c = k + 6$. Hop *Grunert's Arch.*, 55; Schubert, ib., 63.

7. *Die Constantenzahl beträgt für eine in einer gegebe Ebene liegende Curve* n^{ter} *Ordnung,* ν^{ter} *Classe, mit d Dop punkten, r Spitzen,* δ *Doppeltangenten,* ι *Inflexionen:*

$$c = 3 + \tfrac{1}{2}n(n + 3) - d - 2r = 3 + \tfrac{1}{2}\nu(\nu + 3) - \delta -$$

8. *für eine allgemeine Fläche n^{ter} Ordnung:*

$$c = \tfrac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3) - 1,$$

9. *für einen allgemeinen Liniencomplex n^{ter} Ordnung:*

$$c = \tfrac{1}{12}(n+1)(n+2)^2(n+3) - 1;$$

üroth, *Crelle*, 67; Voss, *Math. Ann.*, 9.

Wenn y eine Bedingung ausdrückt, welcher ein geometri-hes Gebilde, dessen Definition gegeben ist, unterworfen wird, id z eine andere solche Bedingung, so wird die aus beiden zu-mmen resultirende Bedingung durch yz dargestellt und das *roduct* der beiden Bedingungen genannt.

Wenn z. B. g die Bedingung bezeichnet, unter welcher eine erade eine bestimmte andere Gerade schneidet und g_p die Be-ingung, die erfüllt sein muss, damit eine Gerade durch einen unkt gehe, so stellt gg_p die Bedingung dar, unter welcher ne Gerade durch einen Punkt geht und eine andere Gerade ifft; g^2 die Bedingung dafür, dass eine Gerade zwei gegebene erade schneide, etc.

Man sagt, eine Bedingung sei von der *Dimension* α für ein estimmtes geometrisches Gebilde, wenn sie zu α Gleichungen wischen den c Constanten des Gebildes führt, d. h. wenn $\infty^{c-\alpha}$ ebilde vorhanden sind (∞^0 = endliche Zahl), die der gegebe-en Bedingung genügen. Die Gesammtheit aller, der Bedingung on der Dimension α genügenden $\infty^{c-\alpha}$ Gebilde heisst *ein System von der $(c-\alpha)^{\text{ten}}$ Stufe;* so ist eine Curve ein System 1ter Stufe; ein Strahlencomplex ein System 3ter Stufe, eine Regelfläche ein Strahlensystem 1ter Stufe etc.

Die Dimension einer Bedingung, welche das Product mehrerer anderer ist, kommt der Summe der Dimensionen der Factoren gleich.

Es sei c die Constantenzahl eines geometrischen Gebildes nd diesem mögen c-fach zusammengesetzte Bedingungen auf-rlegt werden; alsdann existirt im Allgemeinen eine *endliche Anzahl* N von Individuen des Gebildes, welche diesen Bedin-gungen genügen.

Wird die gegenseitige Lage der Elemente des Gebildes geändert, oder wird sie auf geeignete Weise specialisirt, so bleibt die Zahl N entweder ungeändert oder wird unendlich gross. Dieser Satz heisst *das Princip der Erhaltung der Anzahl* oder *das Princip der gleichgültigen oder speciellen Lage.* Schubert. Algebraisch interpretirt, sagt es aus, dass eine Gleichung, wie man auch

die Werthe ihrer Coefficienten ändern möge, entweder dieselbe Anzahl von Wurzeln behält, oder eine Identität wird, in welchem Fall die Anzahl ihrer Wurzeln unendlich gross ist.

Selbstverständlich muss man bei seiner Anwendung die durch die vorgenommenen Aenderungen etwa eingetretene Vervielfachung der Individuen in Rechnung ziehen.

Dieses Princip ist sehr förderlich, weil man durch Specialisirung der Lage der Elemente eines Gebildes die Berechnung der Anzahl von Individuen, die gegebenen Bedingungen genügen, bedeutend vereinfachen kann. Ein Beispiel wird seine Anwendung erläutern:

Man wünscht zu wissen, wie viele Gerade 4 gegebene Gerade treffen.

Man weist den 4 Geraden eine specielle Lage an und nimmt z. B. an, zwei von ihnen gehen durch einen Punkt P und die beiden anderen durch einen anderen Punkt P'; dann gibt es offenbar zwei Gerade, welche die 4 Geraden treffen und zwar die Verbindungslinie der beiden Punkte P, P' und den Schnitt der beiden Ebenen, in denen die beiden gegebenen Paare von Geraden liegen. Vermöge des obigen Princips können wir daher behaupten, *dass immer zwei Gerade existiren, welche vier gegebene Gerade treffen.* Es leuchtet auch ein, dass durch andere Specialisirung der Lage der vier Geraden (z. B. durch die Annahme drei der Geraden liegen in einer Ebene oder gehen durch einen Punkt etc.) die gesuchte Anzahl unendlich gross werden kann.

Die Anwendungen dieses Princips, welches als Postulat anzunehmen ist, sind verschiedenartig; es wurde von Schubert klar formulirt und kann auf vier verschiedene Arten ausgesprochen werden, die sich als Corollare des Princips ansehen lassen. Siehe Schubert, *Calcül der abzählenden Geometrie*, Leipzig 1879, p. 12 u. 334.

§ 2. Symbolischer Calcül der Bedingungen. Incidenz- und Coincidenzformeln. Sätze über die Berührungen.

Für das Thema, welches uns hier beschäftigt, ist die Einführung der folgenden Symbolik von Bedeutung.

Es sei ein Gebilde gegeben, dessen Constantenzahl c beträgt; wenn wir ihm eine Bedingung ν von der Dimension auferlegen, so erhalten wir eine endliche Anzahl von Indi-

en, die ihr genügen; wir wollen diese Zahl mit demselben ıchstaben ν bezeichnen, der auch die Bedingung darstellt.

Man kann dann zwischen den Symbolen, welche die verhiedenen Bedingungen darstellen, die sich einem Gebilde auflegen lassen, damit es auf eine *endliche* Anzahl von Arten stimmt sei, Fundamentalbeziehungen oder -Identitäten festellen.

Es sei z. B. p das Symbol, welches die Bedingung darstellt, ıter welcher ein Punkt in einer Ebene liegt und P das Symol für die Bedingung, dass ein Punkt in einem speciellen rt fest liege; wir können dann offenbar symbolisch schreiben:

$$p^3 = P,$$

eil beide Terme den Zahlenwerth 1 haben.

Auf diese Art würde man nur zu Relationen zwischen Beingungen von der Dimension c kommen; nimmt man aber nen Kunstgriff zu Hülfe, so lässt sich auch Beziehungen vischen solchen von beliebiger Dimension $\alpha < c$ ein Sinn beigen: Es mögen verschiedene Bedingungen von der Dimension vorliegen; sie seien ν, ν', ν'', ... und y sei eine beliebige edingung von der Dimension $c - \alpha$. Multiplicirt man ν, ν', $''$, ... mit y, so ergeben sich lauter Bedingungen von der ›imension c. Nun wollen wir annehmen, es bestehe zwischen en ν eine Relation, wenn die aus der Multiplication eines jeden 'erms dieser Relation mit (dem beliebigen) y sich ergebende ›eziehung (die eine solche zwischen Bedingungen von der Dimenion c darstellt) thatsächlich in dem oben angegebenen Sinn xistirt.

Bezeichnet z. B. p_g die Bedingung, unter welcher ein Punkt uf einer Geraden liegt, so ist offenbar

$$p^2 = p_g.$$

Denn, multiplicirt man z. B. mit p, so folgt $p^3 = pp_g$, nd diese Relation besteht, weil beide Seiten der Gleichung den Verth 1 haben.

Im Allgemeinen gelten für die symbolischen Gleichungen, elche man auf diese Art erhält, alle gewöhnlichen Regeln der lrithmetik über Addition, Subtraction und Multiplication.

Fundamentalrelationen sind:

$p^2 = p_g$
$p^3 = pp_g = P$

p, p_g, bez. P sind die Symbole, welche die Bedingungen darstellen, unter welchen ein Punkt in einer Ebene, auf einer Geraden, oder fest liegt;

$e^2 = e_g$
$e^3 = e\,e_g = E$

e, e_g, bez. E sind die Symbole, welche die Bedi gungen darstellen, die bestehen müssen, d mit eine Ebene durch einen Punkt oder ei Gerade gehe oder fest liege;

$g^2 = g_p + g_e$
$g\,g_p = g_s = g\,g_e$
$g\,g_s = G = \frac{1}{2}g^4$
$G = g_e{}^2 = g_p{}^2$

g, g_e, g_p, g_s, bez. G sind die Symbole für d Bedingungen, die bestehen müssen, dam eine Gerade entweder eine Gerade schnei oder in einer Ebene liege oder durch ein Punkt gehe oder einem Strahlenbüschel a gehöre oder fest liege).*

Punkt und Gerade, Ebene und Gerade, Punkt und Ebe heissen *incident,* wenn *sie sich gegenseitig angehören,* d. h. we der Punkt auf der Geraden liegt, die Gerade in der Ebene od der Punkt in der Ebene; zwei Gerade heissen *incident*, wenn s sich schneiden.

Incidenzformeln werden wir alle Gleichungen zwischen d Bedingungen nennen, welche diese vier Incidenzen darstellen.

Sie lauten, wenn die Symbole die oben angegebene Bede tung haben:

$pg = p_g + g_e = p^2 + g_e,$
$pg_p = p^3 + g_s,$
$pg_s = p^2 g_p = G + p^3 g = G + p^2 g_e,$

Die Gerade g und d Punkt p gehören si an.

$eg = g_p + e_g = g_p + e^2,$
$eg_e = g_s + e^3,$
$e^2 g_e = eg_s = G + e^3 g = G + e^2 g_p,$

Die Ebene e und d Gerade g gehören sich an.

$p^3 - p^2 e + p e^2 - e^3 = 0,$
$p^3 e - p^2 e^2 + p e^3 = 0,$

Der Punkt p und die Ebene e gehör sich an.

$G - g_s h + g_e h_p + g_p h_e - g h_s + H = 0,$
$Gh - g_s(h_p + h_e) + (g_p + g_e)h_s - gH = 0,$
$Gh_e - g_s h_s + g_p H = 0,$
$Gh_p - g_s h_s + g_e H = 0.$

Das Symbol h ist, wie das Symbol einer G raden und die beid Geraden g und schneiden sich.

---

*) Diese Symbole haben Schubert in seinen weiter unt citirten Arbeiten und auch andere deutsche Autoren benutzt; sie l ziehen sich auf die Anfangsbuchstaben der Worte *Gerade, Ebe Punkt, Strahl.*

Diese Formeln kommen auf vielfache Art zur Anwendung; ir können uns dabei aber nicht aufhalten und verweisen auf s Schubert'sche Werk. Wir beschränken uns darauf, einige eispiele anzuführen.

Es liege das einfach unendliche System aller Berührungs-*raden* und der bezüglichen Berührungs*punkte* einer Raumcurve or; wenn man dann ein einfach unendliches System derartiger urven betrachtet, so erhält man in der Gesammtheit ein *ppelt* unendliches System von sich angehörenden Geraden id Punkten. Für ein solches System stellt das Symbol p^2 die edingung dar, unter welcher einer dieser Punkte gleichzeitig zwei gegebenen Ebenen liegt, d. h. in einer gegebenen eraden; es stellt mithin auch die Anzahl der Curven des ystems dar, welche von einer gegebenen Geraden geschnitten erden; ebenso wird das Symbol g_e die Anzahl der *Tangenten* es Systems angeben, welche in einer gegebenen Ebene liegen, aher auch die Anzahl der Curven des Systems, die eine gege-ene Ebene berühren, und pg die Anzahl der Punkte des Systems, ie in einer gegebenen Ebene liegen und zugleich Geraden ent-prechen, die eine andere gegebene Gerade schneiden; aus der ormel $pg = p^2 + g_e$ folgt daher das Theorem:

Es liege ein einfach unendliches System von Raumcurven or; wenn zu der Anzahl der Curven, die eine gegebene Gerade chneiden, die Anzahl der Curven addirt wird, die eine bestimmte Ebene berühren, so erhält man als Summe die Anzahl der urven des Systems, welche eine Ebene derart schneiden, dass ie Tangenten in den Schnittpunkten eine bestimmte Gerade reffen; oder man erhält den Grad der Curve, welche der Ort er Berührungspunkte aller eine gegebene Gerade schneidenden Tangenten an die Curven des Systems ist; Zeuthen, *Compt. Rend.*, 1872.

Es sei n die Ordnung einer ebenen Curve, ν die Bedingung, nter welcher sie eine gegebene Gerade des Raums schneidet, die Bedingung dafür, dass ihre Ebene durch einen gegebenen Punkt gehe, P diejenige, unter welcher sie selbst durch einen Punkt geht. Betrachtet man ein *doppelt* unendliches System olcher Curven, so erhält man ein dreifach unendliches System on Punkten, und die Ebenen der Curven bilden ein doppelt nendliches System von Ebenen.

Die Incidenzformel

$$p^3 - p^2 e + p e^2 - e^3 = 0$$

wird

$$P = \mu\nu - n\mu^2,$$

weil

$$p^3 = P, \quad e = \mu, \quad p^2 = \nu$$

und überdies

$$e^3 = \mu^3 = 0$$

ist, da im Allgemeinen in einem *doppelt* unendlichen Syste von Curven die (*dreifache*) Bedingung nicht erfüllt werden kan dass eine Curve dieses Systems in einer willkürlich vorgeschri benen Ebene liegen, d. h., dass die Ebene der Curve durch *dr* gegebene Punkte gehen soll.

Nun drückt die oben angegebene Relation die Bedingun P durch die beiden anderen ν und μ aus; wenn wir daher ei Tabelle hätten, aus welcher wir den Werth von $\mu\nu$ und entnehmen könnten, so würden wir den Werth von P erhalte So wollen wir z. B. ein doppelt unendliches System von *Kege schnitten* im Raum und zwar speciell das System aller Kege schnitte betrachten, die drei gegebene Ebenen berühren und dr gegebene Gerade schneiden; nennt man ϱ die Bedingung, unt welcher ein Kegelschnitt des Raums eine Ebene berührt, so läs sich die Bedingung, welcher alle diese Kegelschnitte genüge müssen, durch $\nu^3\varrho^3$ ausdrücken. Multiplicirt man daher bei Seiten der Incidenzformel mit $\nu^3\varrho^3$, so erhält man, da im vo liegenden Fall $n = 2$ ist,

$$P\nu^3\varrho^3 = \mu\nu^4\varrho^3 - 2\mu^2\nu^3\varrho^3.$$

Aus der Tabelle, die wir weiter unten in § 4 folgen lasse entnehmen wir:

$$\mu\nu^4\varrho^3 = 72, \quad \mu^2\nu^3\varrho^3 = 24,$$

mithin

$$P\nu^3\varrho^3 = 24,$$

d. h., *in unserem System gibt es 24 Kegelschnitte, die dur einen Punkt gehen.*

Coincident heissen zwei Elemente (zwei Punkte, zwei G rade, zwei Ebenen), die unendlich nahe aneinander liegen.

Die bezüglichen Formeln heissen *Coincidenzformeln.* Ei von ihnen entspricht dem sogenannten *Chasles'schen Coinciden princip.* Siehe Kap. 1, § 2.

Wir wollen annehmen, ein *einfach* unendliches System v *Paaren* von Punkten sei derart gegeben, dass es in ihm p Paa gibt, die den ersten Punkt und q Paare, die den zweiten Pun

meinschaftlich haben, und es stelle g die Gerade dar, welche e beiden Punkte eines Paars verbindet und mithin auch e Anzahl der Geraden, welche Paare von Punkten verbinden d von einer *beliebigen* Geraden des Raums getroffen werden. ezeichnet man dann mit ε die *Anzahl der Coincidenzen, d. h.* e *Zahl, welche angibt, wie oft die beiden Punkte eines Paars* ncidiren, *so ergibt sich die Formel*

$$\varepsilon = p + q - g. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Wenn die Verbindungsgerade der beiden Punkte eines Paars ne *feste Lage hat, so wird* $g = 0$ *und man erhält*

$$\varepsilon = p + q.$$

iese *letztere Beziehung entspricht der Chasles'schen Correspon-*nzformel.

Aus der Formel (1) lassen sich verschiedene andere ableiten, B. die beiden folgenden:

$$\varepsilon g_p = p^3 + q^3 + g_s,$$

$$\varepsilon p = p q - g_e,$$

ie auf die nachstehende Art zu interpretiren sind:

*Ist ein dreifach unendliches System von Punktepaaren ge-*ben und man addirt die Anzahl der Paare, deren erstes Ele-ent fest liegt, die Anzahl derjenigen, deren zweites Element st liegt, und den Grad des Liniencomplexes, welcher aus den ie entsprechenden Punkte eines Paars verbindenden Geraden steht, so ist die Summe derjenigen Zahl gleich, welche angibt, wie ft sich zwei entsprechende Punkte unbegrenzt in einer Richtung inander nähern, die durch einen beliebigen festen Punkt geht.

Bei einem doppelt unendlichen System von Punktepaaren st die Differenz zwischen der Anzahl der Paare, deren Punkte ez. in zwei voraus bestimmten Ebenen liegen und der Anzahl er Paare, für welche die Verbindungsgerade der beiden Punkte in iner im Voraus festgesetzten Ebene liegt, der Ordnung der Raum-urve gleich, welche der Ort der Coincidenzen ist.

Es lassen sich nun die Formeln für die Ausdehnung des Chasles'schen Correspondenzprincips auf die Ebene und den Raum ableiten. Sie sind von Salmon, *Geom. of three dim.*, 2. ed., 1865, p. 511 (siehe Fiedler's Bearbeitung, 2. Thl. 2. Aufl., p. 556); Zeuthen, *Compt. Rend.*, 1874; Schubert, *Math. Ann.*, 10 angegeben worden. Siehe auch des letzteren *Calcül der abzählenden Geometrie*, Leipzig 1879, p. 45.

Aus denselben Principien ergeben sich die folgenden wich tigen Theoreme:

Es liege ein einfach unendliches System ebener Curven un ausserdem eine Curve n^{ter} Ordnung und m^{ter} Classe vor. Wen ν und ϱ die sogenannten beiden Charakteristiken des Systen ebener Curven sind, d. h. angeben, wie viele Curven des Systen durch einen Punkt gehen bez. eine Gerade berühren, so gibt es

$$n\varrho + m\nu$$

Curven des Systems, welche die gegebene Curve berühren.

Und ähnlich: *In einem einfach unendlichen System vo Raumcurven gibt es*

$$n\varrho + m\nu$$

Curven, die eine Fläche n^{ter} Ordnung und m^{ter} Classe berühre wenn mit ϱ die Anzahl der eine Ebene berührenden und m ν die Anzahl der eine Gerade schneidenden Curven bezeichn wird.

Die Berührungspunkte zweier einfach unendlicher Systen von ebenen Curven, deren Charakteristiken bez.

$$\nu_1,\ \varrho_1;\quad \nu_2,\ \varrho_2$$

sind, bilden eine Curve von der Ordnung

$$\nu_1\varrho_2 + \varrho_1\nu_2 + \nu_1\nu_2,$$

und die Tangenten in diesen Berührungspunkten umhüllen ei Curve von der Classe

$$\nu_1\varrho_2 + \varrho_1\nu_2 + \varrho_1\varrho_2 .$$

Eine Verallgemeinerung des 1ten Theorems lautet:

Es sei in der Ebene eine Zuordnung zwischen Punkten u Geraden von der Art festgestellt, dass jeder Geraden eine Anza ϱ von auf ihr liegenden Punkten und jedem Punkt eine Anza ν von durch ihn gehenden Geraden entspricht; es wird dann

$$n\varrho + m\nu$$

mal vorkommen, dass eine dieser Geraden in einem der ihr en sprechenden Punkte eine ebene Curve n^{ter} Ordnung und m^{ter} Clas berührt.

Dieser Satz kann zur Ableitung des Correspondenzprinci von Brill-Cayley benutzt werden (siehe Kap. 5, § 4), welch die Erweiterung des für die Correspondenzen auf der Gerad geltenden Chasles'schen Princips auf diejenigen Correspondenz ist, die auf Curven beliebigen Geschlechts bestehen. Siehe § 1 des citirten Schubert'schen Werks.

Um die Fruchtbarkeit dieser Theoreme darzuthun und ihre ıwendung zu zeigen, wollen wir das folgende Beispiel einhender ausführen:

Es soll zu ermitteln sein, wie viele in einer Ebene liegende ·gelschnitte 5 gegebene Kegelschnitte berühren. Bezeichnet ın mit S die Bedingung, unter welcher ein Kegelschnitt eines ·stems *einen anderen* festen Kegelschnitt berührt und mit μ ᵉ Bedingung, unter welcher seine Ebene durch einen Punkt ht, so ist die Bedingung dafür, dass ein Kegelschnitt des *enen* Systems 5 Kegelschnitte berühre, durch

$$\mu^3 S^5$$

geben.

Nun ist aber nach einem der vorstehenden Theoreme

$$S = n\varrho + m\nu = 2\varrho + 2\nu,$$

eil in dem vorliegenden Fall $m = n = 2$ ist; die Bedingung utet daher:

$$\mu^3 S^5 = \mu^3(2\varrho + 2\nu)^5 = 2^5\mu^3(\varrho^5 + 5\varrho^4\nu + \\ + 10\varrho^3\nu^2 + 10\varrho^2\nu^3 + 5\varrho\nu^4 + \nu^5).$$

Aus den Tabellen in § 4 entnehmen wir dann die Werthe ɔn $\mu^3\varrho^5$, $\mu^3\varrho^4\nu$, etc. und erhalten schliesslich

$$\mu^3 S^5 = 2^5 \cdot 102 = 3264$$

.s die Anzahl der Kegelschnitte eines ebenen Systems, die 5 ɐgebene Kegelschnitte berühren.

§ 3. Die Charakteristikentheorie.

Man habe in einer Ebene ein einfach unendliches System on Kegelschnitten; es sei z eine Bedingung 1ter Dimension ine einfache), und ν bez. ϱ mögen die Bedingungen darstellen, nter denen ein Kegelschnitt des Systems durch einen Punkt eht bez. eine Gerade berührt.

Die Charakteristikentheorie beruht auf dem nachstehenden atz von Chasles, der zwar von Chasles als allgemein giltig ingestellt wurde, der aber, wie man später in Folge der Unteruchungen von Halphen einsah, nicht für alle Fälle gilt.

Die Bedingung z lässt sich (wie Halphen zeigte, nicht llgemein, sondern nur in vielen Fällen) linear durch ν und ϱ nittelst der Formel

$$z = \alpha\nu + \beta\varrho$$

ausdrücken, worin α, β nur von der Bedingung z abhängi Zahlen sind. Die Zahlen ν, ϱ heissen Charakteristiken d Kegelschnittsystems.

Dieses Theorem, welches eine wichtige Formel der abzä lenden Geometrie der Kegelschnitte enthält, wurde durch Ve suche von Chasles, *Compt. Rend.*, 1864 aufgefunden, oh Beweis formulirt und zu verschiedenen Anwendungen benutzt.

Bewiesen wurde es von Clebsch, *Math. Ann.*, 6; Ha phen, *Bull. Soc. math.*, 1; Schubert und Hurwitz, *Gö Nachr.*, 1876; Schubert, *Abz. Geom.*, § 38; Brill, *Ma Ann.*, 10; etc.

Das Chasles'sche Theorem gilt jedoch nicht für jede B dingung z, wie Halphen nachwies, *Compt. Rend.*, 83, p. 5 und 886; *Proc. Lond. math. Soc.*, 9, 10; *Math. Ann.*, 15; *Jou de l'Éc. pol.*, 45; er machte zu dem Theorem den Zusatz:

Damit das Chasles'sche Theorem giltig sei, d. h., da sich z durch die Formel

$$z = \alpha\nu + \beta\varrho$$

ausdrücken lasse, worin α und β nur von z abhängen, ist nöthig und ausreichend, dass die Anzahl der Kegelschnitte, wel der Bedingung z genügen und eine Berührung 3ter Ordnung einer gegebenen Curve haben, $\alpha + \beta$ sei.

Andererseits hat Study in seiner Habilitationsschrift (Leip 1885, *Math. Ann.*, 26) nachgewiesen, dass, von einem gewiss Standpunkt aus betrachtet, der Chasles'sche Satz als allgem giltig angesehen werden kann.

Aus dem Chasles'schen Theorem folgt ein Corollar einem von uns schon in § 2 mitgetheilten Satz über die Anz der Berührungscurven an gegebene Curven:

Wenn man die Anzahl der Kegelschnitte eines Systems kennen wünscht, welche eine Curve n^{ter} Ordnung und m^{ter} Cla berühren, so genügt dazu, in der Chasles'schen Formel

$$\alpha = m, \quad \beta = n$$

zu setzen.

Man kann auch ein allgemeineres Problem, als das Ch les'sche, aufstellen:

Wenn ein System von beliebigen Gebilden (nicht von Keg schnitten allein) gegeben ist, das nicht nur einfach unendlich. s dern k-fach unendlich ist, existirt dann eine *endliche* Anzahl k-fachen Bedingungen der Art, dass jede andere k-fache dingung z sich linear und mit nur von der Bedingung z

ngigen Coefficienten durch sie ausdrücken lässt? Diese fachen Bedingungen, *deren Anzahl endlich ist,* kann man dann *Charakteristiken* des Systems nennen.

An diesem Problem hat man sich vielfach versucht; Chasles einte einmal, die beiden Charakteristiken ν und ϱ könnten ht nur für die Kegelschnitte, sondern für jede Plancurve lten. Halphen dehnte die Betrachtungen dieser Art auch f die Kegelschnitte des Raums und die Flächen zweiter Ordng aus; *Bull. Soc. math.,* 2. Cremona bemerkte, dass sich r ein doppelt unendliches System von Kegelschnitten *drei* arakteristiken aufstellen lassen; nämlich die Anzahl der durch Punkte gehenden Kegelschnitte, die Anzahl derjenigen, die rch einen Punkt gehen und eine Gerade berühren, und die nzahl der Kegelschnitte, die zwei Gerade berühren, *Compt. end.,* 69, p. 776. Schubert widmete diesem Problem ein nzes Kapitel seiner citirten Arbeit und machte den Versuch, für gewisse einfache Systeme von Gebilden zu lösen.

Die ersten Arbeiten über die Charakteristikentheorie sind die hr zahlreichen Aufsätze von Chasles (z. B. *Compt. Rend.,* 1864; eciell der vom 27. Juni 1864), welche zum Theil Veranlassung i einer Polemik mit De Jonquières gaben; ein Verzeichniss er sich hierauf beziehenden Schriften findet man bei Loria, *passato e il presente delle principali teorie geom.,* Torino 96, p. 263, 264, deutsche Ausg., p. 65 u. ff.

Andere Arbeiten sind von Cayley, namentlich in den *hil. Trans.,* 1868; Salmon, *An. Geom. der höheren ebenen urven*, deutsch von Fiedler, 2. Aufl., Leipzig 1882; Crena, *Compt. Rend.,* 1864 (siehe auch seine *Introd. ad una oria geom. delle curve piane*, Bologna 1862, auch in den *Mem. cc. Bologna,* 12, 1861, deutsch von M. Curtze, 1865); Zeuen, unter Anderem *Bull. des sciences math.,* 7. Eine kurze arstellung findet man in der Clebsch-Lindemann'schen *cometrie* und viele Literaturnachweise, die sich jedoch nur is 1872 erstrecken, bei Painvin, *Bull. des sciences math.,* 3.

Ueber die neueste Literatur sehe man Loria, l. c. nach, o auch die lange Reihe der übrigen Aufsätze von Chasles, *ompt. Rend.,* 1871—1877 über die zahlreichen Anwendungen es nach ihm benannten Correspondenzprincips auf die abzähnde Geometrie aufgezählt wird. Die Geschichte dieses Princips, elches seiner Natur nach so eng mit den Theorien der abzäh-

lenden Geometrie verbunden ist, findet man in einem histo schen Aufsatz von Segre, *Bibl. math.*, 1892.

Man kann sagen, dass die abzählende Geometrie als Lel körper mit der Charakteristikentheorie von Chasles entst den sei.

Es war Halphen, der, von der Charakteristikentheo ausgehend, den symbolischen Calcül der Bedingungen einfüh welcher dann hauptsächlich von Schubert fortgesetzt wur Der letztere legte systematisch die Grundlagen dazu in sei *Beiträgen zur abzählenden Geometrie, Math. Ann.*, 10 und ande darauf folgenden Arbeiten, ib., 11, 12, etc.

Viele Resultate und Bestimmungen in Bezug auf die zählende Geometrie wurden schon früher von verschiede Autoren insbesondere auf geometrischem Weg gefunden, z. B. von Steiner, *Crelle*, 32, 37, 45, 55; Bischoff, ib., De Jonquières, *Journ. de Liouville*, 6, 1861; 10, 18 ein Theil der Resultate, zu denen sie kamen, ist jedoch fehl haft. Der Zweck der Autoren, die sich später mit der abzähl den Geometrie beschäftigt haben, bestand hauptsächlich da derartige Bestimmungen auf feste Gesetze zurückzuführen, e Rechnung für sie einzurichten und mit deren Hülfe diesen Th der Geometrie zu einem systematischen Ganzen zu machen.

Ein wichtiges Buch, in welchem man alle Methoden Resultate der abzählenden Geometrie zusammengestellt und klärt findet, ist von Schubert, *Kalkül der abzählenden G metrie*, Leipzig 1879, das wir bei der Bearbeitung dieses Kapi vielfach benutzt haben.

Neuere Forschungen sind insbesondere von demselben Au Schubert, *Math. Ann.*, 26, 38, 45; *Acta math.*, 8; *Hambu Mitth.*, 1, 2, 3, etc. und von Pieri, *Rend. Palermo*, 5; *R Ist. Lomb.*, 1893—1895.

§ 4. Methode zur Ermittelung der charakteristische Zahlen eines Systems von Gebilden. Uebersicht über v schiedene wichtige Resultate der abzählenden Geomet

Aus unseren obigen Betrachtungen geht hervor, dass du das Rechnen mit Bedingungssymbolen sich der Calcül einer Bedingung auf den mit anderen reduciren lässt; die C rakteristikentheorie hat z. B. gerade den Zweck, zu ermitt

gewisse elementare Bedingungen bestehen, mit deren Hülfe h alle übrigen ausdrücken lassen.

Man kann nun fragen, ob es nicht möglich sei, Zahlen fzufinden, die diese elementaren Bedingungen oder Charaktetiken darstellen würden und mit deren Hülfe sich vielleicht übrigen oder doch ein Theil von ihnen ausdrücken lassen. ese Ermittelung geschieht mittelst einer von Chasles einführten und von Zeuthen, Schubert und Anderen vielfach gewendeten und weiter entwickelten Methode:

Man betrachtet specielle invariante Ausartungen des gegenen Gebildes, sucht die Relationen auf, welche die Bedingungen für, dass das Gebilde auf die gegebene Art degenerire, mit n übrigen elementaren Bedingungen (unter denen es durch ien Punkt geht, eine Ebene, oder eine Gerade berührt) verden, leitet daraus die charakteristischen Zahlen für die ausarteten Gebilde ab und erhält schliesslich mit Hülfe der gedenen Relationen die Zahlen für die allgemeinen Gebilde.

Ein Beispiel wird genügen, die Anwendung dieser Methode erläutern.

Das gegebene Gebilde sei ein Kegelschnitt. Man betrachte ei invariante Ausartungen desselben, nämlich

— einen Kegelschnitt, dessen Punkte eine Doppelgerade und dessen Tangenten zwei verschiedene Strahlenbüschel bilden, deren Centren in zwei Punkten der Doppelgeraden liegen;

— einen Kegelschnitt, dessen Punkte zwei verschiedene Gerade und dessen Tangenten zwei zusammenfallende Strahlenbüschel bilden, deren Centrum in dem Schnittpunkt der beiden Geraden liegt.

Bezeichnet man mit η bez. δ die Bedingungen, unter welchen n Kegelschnitt auf diese beiden Arten degenerirt, und mit ν, ϱ die Bedingungen dafür, dass die Ebene eines Kegelhnitts durch einen Punkt gehe, der Kegelschnitt eine Gerade hneide, bez. eine gegebene Ebene berühre, so findet man mitlst des Princips der Coincidenzen die Relationen:

$$2\nu - \varrho - 2\mu = \eta,$$

$$2\varrho - \nu = \delta,$$

oraus

$$\nu = \tfrac{2}{3}\eta + \tfrac{1}{3}\delta + \tfrac{4}{3}\mu,$$

$$\varrho = \tfrac{1}{3}\eta + \tfrac{2}{3}\delta + \tfrac{2}{3}\mu$$

lgt.

Es soll nun die Zahl

$$\mu^3 \nu \varrho^4$$

zu ermitteln sein, d. h., die Anzahl der Kegelschnitte ein Ebene, welche durch einen Punkt gehen, also eine Gerade d Raums schneiden, und vier Gerade der Ebene, mithin vi Ebenen des Raums berühren; aus den vorstehenden Forme ergibt sich:

$$\mu^3\nu\varrho^4 = \tfrac{2}{3}\eta\mu^3\varrho^4 + \tfrac{1}{3}\delta\mu^3\varrho^4 + \tfrac{4}{3}\mu^4\varrho^4.$$

Nun ist das Glied, welches den Factor μ^4 enthält, Nu weil man eine Ebene durch 4 beliebige Punkte des Rau nicht legen kann; würde man daher die beiden anderen Glie der rechten Seite kennen, so wäre auch der Werth der link Seite bekannt. Offenbar gibt es nun in einer Ebene (μ^3) d Kegelschnitte η, die vier gegebene Gerade zu Tangenten hab die Anzahl der Kegelschnitte δ aber, die vier gegebene Gera berühren, ist Null; man erhält also:

$$\mu^3\nu\varrho^4 = 2.$$

Um einen Begriff von den Resultaten zu geben, wel sich aus den bisher entwickelten Methoden und Principien a leiten lassen, wollen wir hier einige Hauptergebnisse zusamm stellen, auch der Bedeutung wegen, die sie an sich und unabhän von den Methoden haben, mit deren Hülfe sie gefunden wurd

Die wichtigsten in dem 4ten Kap. des citirten Werks v Schubert enthaltenen Sätze lauten:

1. *Es gibt zwei Gerade, die 4 gegebene Gerade treffen.*

2. *Es gibt drei windschiefe Polygone von n Seiten, de n Ecken in gegebenen Ebenen liegen und deren n Seiten du gegebene Punkte gehen.*

3. *Wenn im Raum fünf Paare von Geraden gegeben si so lassen sich auf 20 verschiedene Arten fünf in einer Eb liegende und in einem Punkt zusammenlaufende Strahlen de ziehen, dass jeder der Strahlen die 2 Geraden eines der gegebe Paare trifft.*

4. *Ein Kegelschnitt liege vor; μ sei die Bedingung da dass seine Ebene durch einen gegebenen Punkt gehe, ν, dass eine gegebene Gerade schneide, ϱ die Bedingung, unter wel er eine gegebene Ebene berührt. Benutzt man nun dieselben zeichnungen, wie in den vorigen Paragraphen, so erhält man folgende Tabelle für die Anzahl der Kegelschnitte des Rau die acht Bedingungen genügen**):

---

*) Der leichteren Uebersicht wegen wollen wir hier noch die Bedeutung der Symbole in dieser Tabelle angeben:

$\mu^3\nu^5 = 1$	$\mu^2\nu^6 = 8$	$\mu\nu^7 = 34$	$\nu^8 = 92$
$\mu^3\nu^4\varrho = 2$	$\mu^2\nu^5\varrho = 14$	$\mu\nu^6\varrho = 52$	$\nu^7\varrho = 116$
$\mu^3\nu^3\varrho^2 = 4$	$\mu^2\nu^4\varrho^2 = 24$	$\mu\nu^5\varrho^2 = 76$	$\nu^6\varrho^2 = 128$
$\mu^3\nu^2\varrho^3 = 4$	$\mu^2\nu^3\varrho^3 = 24$	$\mu\nu^4\varrho^3 = 72$	$\nu^5\varrho^3 = 104$
$\mu^3\nu\varrho^4 = 2$	$\mu^2\nu^2\varrho^4 = 16$	$\mu\nu^3\varrho^4 = 48$	$\nu^4\varrho^4 = 64$
$\mu^3\varrho^5 = 1$	$\mu^2\nu\varrho^5 = 8$	$\mu\nu^2\varrho^5 = 24$	$\nu^3\varrho^5 = 32$
	$\mu^2\varrho^6 = 4$	$\mu\nu\varrho^6 = 12$	$\nu^2\varrho^6 = 16$
		$\mu\varrho^7 = 6$	$\nu\varrho^7 = 8$
			$\varrho^8 = 4$

5. *Es existiren in jeder gegebenen Ebene 3264 Kegelschnitte, welche fünf andere gegebene Kegelschnitte berühren.*

Bei der Berechnung dieser Zahl machte Steiner Fehler; er fand den Werth 6^5; genau ermittelten die Zahl zuerst Chasles und Th. Berent.

6. *Es stelle μ die Bedingung dafür dar, dass eine Fläche n^{en} Grads durch einen gegebenen Punkt gehe, ϱ, dass sie eine gegebene berühre, und ν, dass sie eine Gerade berühre; man erhält dann die folgende Tabelle für die Anzahl der Flächen 2ten Grads des Raums, die neun Bedingungen erfüllen:*

$\mu^9 = \varrho^9 = 1$	$\nu^2\mu^7 = \nu^2\varrho^7 = 4$	$\nu^4\mu^3\varrho^2 = \nu^4\mu^2\varrho^3 = 112$
$\mu^8\varrho = \mu\varrho^8 = 3$	$\nu^2\mu^6\varrho = \nu^2\mu\varrho^6 = 12$	$\nu^5\mu^4 = \nu^5\varrho^4 = 32$
$\mu^7\varrho^2 = \mu^2\varrho^7 = 9$	$\nu^2\mu^5\varrho^2 = \nu^2\mu^2\varrho^5 = 36$	$\nu^5\mu^3\varrho = \nu^5\mu\varrho^3 = 80$
$\mu^6\varrho^3 = \mu^3\varrho^6 = 17$	$\nu^2\mu^4\varrho^3 = \nu^2\mu^3\varrho^4 = 68$	$\nu^5\mu^2\varrho^2 = 128$
$\mu^5\varrho^4 = \mu^4\varrho^5 = 21$	$\nu^3\mu^6 = \nu^3\varrho^6 = 8$	$\nu^6\mu^3 = \nu^6\varrho^3 = 56$
$\nu\mu^8 = \nu\varrho^8 = 2$	$\nu^3\mu^5\varrho = \nu^3\mu\varrho^5 = 24$	$\nu^6\mu^2\varrho = \nu^6\mu\varrho^2 = 104$
$\nu\mu^7\varrho = \nu\mu\varrho^7 = 6$	$\nu^3\mu^4\varrho^2 = \nu^3\mu^2\varrho^4 = 72$	$\nu^7\mu^2 = \nu^7\varrho^2 = 80$
$\nu\mu^6\varrho^2 = \nu\mu^2\varrho^6 = 18$	$\nu^3\mu^3\varrho^3 = 104$	$\nu^7\mu\varrho = 104$
$\nu\mu^5\varrho^3 = \nu\mu^3\varrho^5 = 34$	$\nu^4\mu^5 = \nu^4\varrho^5 = 16$	$\nu^8\mu = \nu^8\varrho = 92$
$\nu\mu^4\varrho^4 = 42$	$\nu^4\mu^4\varrho = \nu^4\mu\varrho^4 = 48$	$\nu^9 = 92$

Das Symbol $\mu^3\nu^5$ zeigt an, dass die Ebene des Kegelschnitts durch drei gegebene Punkte gehen soll (mithin gegeben ist) und der Kegelschnitt fünf (im Raum) gegebene Gerade schneiden soll; das Symbol $\mu^3\nu^4\varrho$ bedeutet, dass der Kegelschnitt in einer gegebenen Ebene liegen, vier gegebene Gerade schneiden (mithin durch vier in einer Ebene liegende gegebene Punkte gehen) und eine gegebene Ebene (mithin eine in seiner Ebene liegende gegebene Gerade) berühren soll.

Diese Tafeln lassen sich auch zur Ableitung von Zahl benutzen, die anderen Bedingungen für die Kegelschnitte od Flächen 2ten Grads entsprechen; zu diesem Zweck drückt man m Hülfe der symbolischen Gleichungen zwischen den Bedingung (vergl. § 2) die neuen Bedingungen durch μ, ν, ϱ aus und en nimmt diesen Tafeln den Zahlenwerth eines jeden Terms 9' Grads. Siehe das in § 2 ausgeführte Beispiel.

7. *Es gibt* 666841088 *Flächen* 2ten *Grads, die ne gegebene Flächen* 2ten *Grads berühren.*

8. *Eine cubische Plancurve in einer gegebenen Ebene liege vo es sei* ν *die Bedingung dafür, dass sie durch einen Punkt ge und* ϱ*, dass sie eine Gerade berühre; man erhält dann die f genden Zahlen:*

Wenn die Curve 3ter *Ordnung allgemein, d. h.* 6ter *Classe, i*

$$\nu^9 = 1, \quad \nu^8\varrho = 4, \quad \nu^7\varrho^2 = 16, \quad \nu^6\varrho^3 = 64,$$
$$\nu^5\varrho^4 = 256, \quad \nu^4\varrho^5 = 976, \quad \nu^3\varrho^6 = 3424, \quad \nu^2\varrho^7 = 9766,$$
$$\nu\varrho^8 = 21004, \quad \varrho^9 = 33616.$$

Wenn die Curve 3ter *Ordnung einen Doppelpunkt hab d. h.* 4ter *Classe sein soll:*

$$\nu^8 = 12, \quad \nu^7\varrho = 36, \quad \nu^6\varrho^2 = 100,$$
$$\nu^5\varrho^3 = 240, \quad \nu^4\varrho^4 = 480, \quad \nu^3\varrho^5 = 712,$$
$$\nu^2\varrho^6 = 756, \quad \nu\varrho^7 = 600, \quad \varrho^8 = 400.$$

Soll schliesslich die Curve eine Spitze haben, also 3ter *Classe sei*

$$\nu^7 = 24, \quad \nu^6\varrho = 60, \quad \nu^5\varrho^2 = 114,$$
$$\nu^4\varrho^3 = 168, \quad \nu^3\varrho^4 = 168, \quad \nu^2\varrho^5 = 114,$$
$$\nu\varrho^6 = 60, \quad \varrho^7 = 24.$$

Die Zahlen für die cubischen Plancurven wurden von Mai lard de la Gournerie berechnet, *Rech. des caractéristiques d systèmes elém. de courbes planes du* 3me *ordre, Thèse,* Paris 187 dessen Resultate in dem *Bull. de Darboux,* 3, 1872, p. 1 wieder abgedruckt sind, später von Zeuthen, *Compt. Rend.,* 18 und von Schubert, *Gött. Nachr.,* 1874, 1875; *Math. Ann.* 1

9. *Für eine Plancurve* 4ter *Ordnung,* 12ter *Classe in ei gegebenen Ebene gilt, wenn* ν *und* ϱ *dieselben Bedingungen, w vorher, bezeichnen, die Tabelle:*

$\nu = 1$, $\nu^{13}\varrho = 6$, $\nu^{12}\varrho^2 = 36$,
$\nu^{11} = 216$, $\nu^{10}\varrho^4 = 1296$, $\nu^9\varrho^5 = 7776$,
$\nu^8 = 46656$, $\nu^7\varrho^7 = 279600$, $\nu^6\varrho^8 = 1668096$,
$\nu^5 = 9840040$ $\nu^4\varrho^{10} = 56481396$, $\nu^3\varrho^{11} = 308389896$,
$\nu^2 = 1530345504$, $\nu\varrho^{13} = 6533946576$, $\varrho^{14} = 23011191144$.

Diese Zahlen, sowie viele andere, die sich auf specielle ächen 4ter Ordnung (mit doppelten, dreifachen Punkten, mit pitzen etc.) beziehen, berechnete Zeuthen, *Compt. Rend.*, 1872; *openhagener Acad.*, 1873. In dem Schubert'schen Werk nd die Resultate Zeuthen's angegeben.

10. *Für eine cubische Raumcurve sei P die Bedingung, ass sie durch einen Punkt gehe, T, dass sie eine Gerade berühre, eine Gerade schneide, ϱ, eine Ebene berühre, B die Bedingung afür, dass sie eine gegebene Gerade in zwei Punkten schneide. Man erhält dann die Tabelle:*

$$\nu^{12} = 80160, \quad \varrho^{12} = 56960,$$

$$\begin{array}{llllllll}
{}^5\nu^2 = 5, & P^5\nu\varrho = 10, & P^5\varrho^2 = 20, & & & & & \\
{}^4\nu^4 = 30, & P^4\nu^3\varrho = 60, & P^4\nu\varrho^3 = 240, & & & & & \\
{}^4T\nu = 4, & P^4T\varrho = 8, & & & & & & \\
{}^3T^3\nu = 12, & PT^3\varrho = 12, & & & & & & \\
{}^2\varrho^6 = 608, & T^3\nu^3 = 120, & T^3\nu^2\varrho = 120, & & & & & \\
{}^3B^3 = 1, & P^2B^4 = 1, & PB^5 = 1, & B^6 = 6, & & & & \\
{}^3B^2\nu^2 = 4, & P^2B^3\nu^2 = 6, & PB^4\nu^2 = 9, & B^5\nu^2 = 20, & & & & \\
{}^3B^2\nu\varrho = 8, & P^2B^3\nu\varrho = 12, & PB^4\nu\varrho = 18, & B^5\nu\varrho = 40. & & & &
\end{array}$$

Zu vielen anderen ähnlichen Zahlenbestimmungen kommt nan durch Einführung anderer Bedingungen. Schubert, l. c., § 25 hat eine grosse Anzahl zusammengestellt. Solche Berechnungen für cubische Raumcurven wurden von Cremona, *Crelle*, 60, Bestimmungen auf geometrischem Weg von R. Sturm, *Crelle*. 79, 80 und auch von Schubert ausgeführt.

Weitere Zahlenangaben in Bezug auf die linearen Strahlencongruenzen, die projectiven Strahlen- und Ebenenbüschel etc. indet man in dem wiederholt citirten Werk von Schubert.

Kapitel XVI.

Infinitesimaltheorie der Curven und Flächen.

§ 1. Tangenten und Normalen an Curven und Flächen.

Die *Tangente an eine (Plan- oder Raum-)Curve* in einem Punkt P der Curve (dem Berührungspunkt) ist die Grenzlage einer variabelen Geraden, die durch den Punkt P und einen anderen demselben Zweig der Curve angehörigen Punkt P' geht, wenn P' mit P zusammenzufallen strebt.

Die *Normale zu einer Plancurve* in einem Punkt P ist die Gerade, welche in P senkrecht auf der Tangente in P steht.

Die Gleichungen für die Tangente und die Normale an eine Plancurve lauten,

wenn die Gleichung der Curve

$$y = f(x) \quad \textit{ist:}$$

für die Tangente: $$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x),$$

für die Normale: $$\frac{dy}{dx}(Y - y) = -(X - x),$$

wobei x, y die Coordinaten des Berührungspunkts und X, Y die laufenden Coordinaten sind;

ist dagegen die Gleichung der Curve

$$\varphi(x, y) = 0,$$

für die Tangente: $$(X - x)\frac{\partial \varphi}{\partial x} + (Y - y)\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0,$$

für die Normale: $$(X - x)\frac{\partial \varphi}{\partial y} - (Y - y)\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0;$$

ist schliesslich die Curve durch die beiden Gleichungen

$$x = \psi(t), \quad y = \chi(t)$$

gegeben, so lauten die Gleichungen

ür die Tangente: $(Y-y)\frac{d\psi}{dt} - (X-x)\frac{d\chi}{dt} = 0$

nd die Normale: $(Y-y)\frac{d\chi}{dt} + (X-x)\frac{d\psi}{dt} = 0.$

Bezeichnet man mit θ, θ' die Winkel, welche die Tangente und die Normale mit der x-Axe bilden, *so erhält man,* wenn $y' = \frac{dy}{dx}$ gesetzt wird:

$$\cos\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}, \quad \cos\theta' = \pm\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}},$$

$$\sin\theta = \pm\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}, \quad \sin\theta' = \pm\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}.$$

Das Vorzeichen dieser Formeln hängt von dem Uebereinkommen ab, das man in Bezug auf die positive Richtung der Tangenten und Normalen trifft.

Die Länge der Tangente und *die Länge der Normalen* heissen die Längen der von dem Punkt P der Curve und der x-Axe begrenzten Segmente der Tangente bez. der Normalen.

Subtangente und *Subnormale* werden die Längen der auf der x-Axe liegenden Segmente genannt, die von dem Fusspunkt des von dem Curvenpunkt P auf die x-Axe gefällten Loths und den Punkten begrenzt werden, in denen die Tangente bez. die Normale die x-Axe treffen.

Es gelten nun die Formeln:

T = Länge der Tangente $= \frac{y\sqrt{1+y'^2}}{y'}$,

N = Länge der Normalen $= y\sqrt{1+y'^2}$,

S_t = Subtangente $= \frac{y}{y'}$,

S_n = Subnormale $= yy'$.

Polarsubtangente bez. *Polarsubnormale* heissen die Theile der Tangente bez. Normalen, die zwischen dem Curvenpunkt und dem Punkt liegen, in welchem sie von dem im Pol auf den Radiusvector errichteten Loth getroffen werden.

Asymptote einer Plancurve ist die Gerade, welche die Grenzlage der Tangente an die Curve darstellt, wenn der Berührungspunkt sich unbegrenzt auf einem Zweig der Curve in das Unendliche entfernt.

Die Gleichung der Asymptote ist

$$Y - AX - B = 0,$$

worin

$$A = \lim \frac{dy}{dx},$$

$$B = \lim \left(y - \frac{dy}{dx} x \right)$$

ist, und diese Grenzen in dem Sinn zu nehmen sind, dass di Coordinaten x, y des Curvenpunkts den Coordinaten des unend lich fernen Punkts der Curve zustreben sollen.

Die Gleichungen der Tangente an eine Raumcurve lauter *wenn die Raumcurve durch*

$$y = \varphi(x)$$
$$z = \psi(x),$$

gegeben ist:

$$(Y - y) = \frac{dy}{dx}(X - x),$$

$$(Z - z) = \frac{dz}{dx}(X - x),$$

oder symmetrischer:

$$\frac{X - x}{dx} = \frac{Y - y}{dy} = \frac{Z - z}{dz}$$

und, wenn die Curve durch die Gleichungen

$$f(x, y, z) = 0, \quad F(x, y, z) = 0$$

gegeben ist:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial f}{\partial y}(Y - y) + \frac{\partial f}{\partial z}(Z - z) = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial F}{\partial y}(Y - y) + \frac{\partial F}{\partial z}(Z - z) = 0.$$

Normalebene einer Raumcurve in einem Punkt P heiss die Ebene, welche auf der in P an die Curve gelegten Tan gente senkrecht steht und durch den Berührungspunkt geht.

Die Gleichung der Normalebene hat eine der beiden folgen den Formen:

$$(X - x)dx + (Y - y)dy + (Z - z)dz = 0,$$

$$\begin{vmatrix} X-x, & Y-y, & Z-z \\ \frac{\partial f}{\partial x}, & \frac{\partial f}{\partial y}, & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial F}{\partial x}, & \frac{\partial F}{\partial y}, & \frac{\partial F}{\partial z} \end{vmatrix} = 0.$$

Die Richtungscosinus der Tangente sind:

$$\cos\alpha = \cos(t,x) = \frac{dx}{ds}, \quad \left(ds = \sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}\right),$$

$$\cos\beta = \cos(t,y) = \frac{dy}{ds},$$

$$\cos\gamma = \cos(t,z) = \frac{dz}{ds},$$

wenn mit (t,x), (t,y), (t,z) die Winkel zwischen der Tangente und den Axen x, y, z bezeichnet werden.

Wenn P ein Punkt einer Fläche ist und alle möglichen auf dieser Fläche liegenden Raumcurven durch ihn gezogen werden, so liegen die in P an alle diese Curven gezogenen Tangenten sämmtlich in einer Ebene, der Tangentialebene an die Fläche.

Die Gleichung der Tangentialebene an die Fläche $f(x,y,z)=0$ lautet:

$$(X-x)\frac{\partial f}{\partial x} + (Y-y)\frac{\partial f}{\partial y} + (Z-z)\frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Die durch P gehende Gerade, welche senkrecht auf der Tangentialebene an die Fläche in P steht, heisst *die Flächennormale.*

Die Gleichungen der Flächennormalen sind:

$$\frac{X-x}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{Y-y}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{Z-z}{\frac{\partial f}{\partial z}},$$

und die Richtungscosinus der Flächennormalen:

$$\cos(n,x) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}},$$

$$\cos(n,y) = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}},$$

$$\cos(n, z) = \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}.$$

Wenn die Gleichung der Fläche in der Form

$$z = \varphi(x, y)$$

gegeben ist, und wenn

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

gesetzt wird, so lauten die Gleichungen der Flächennormalen:

$$\frac{X - x}{p} = \frac{Y - y}{q} = \frac{Z - z}{-1},$$

und die Richtungscosinus sind:

$$\cos(n, x) = \pm \frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

$$\cos(n, y) = \pm \frac{q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

$$\cos(n, z) = \mp \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

§ 2. Concavität und Convexität der ebenen Curven. Inflexion.

Es sei P ein Punkt einer Plancurve, deren Gleichu $y = f(x)$ lautet, und x_0 sei seine Abscisse; wenn eine Zahl von der Beschaffenheit existirt, dass alle Punkte mit der A scisse $x_0 \pm h$ (worin $h < k$ ist), einen Bogen bilden, der a einer und derselben Seite der Tangente an die Curve in P lie so sagt man, die Curve sei in P *convex* oder *concav*; exist keine solche Zahl k, so ist die Curve in P weder convex no concav, sondern besitzt daselbst einen *Inflexionspunkt* oder *Wen punkt.*

Die Curve heisst ferner in P *convex* bez. *concav in Bez auf die x-Axe*, wenn alle Punkte mit der Abscisse $x_0 \pm h$ dem stumpfen bez. spitzen Winkel liegen, welchen die Tange an die Curve in P mit der x-Axe bildet.

Damit eine Curve in einem Punkt convex oder concav s ist es nöthig und ausreichend, dass, wenn y', y'', y''', ..., y *die Derivirten von* y *nach* x *sind, die in dem Punkt* x_0 N

rden, und wenn $y^{(m+1)}$ die erste der Derivirten ist, welche in nicht verschwinden, die Ordnung m eine ungerade Zahl sei.

In diesem Fall ist die Curve convex oder concav in Bezug f die x-Axe, je nachdem das Product

$$f(x_0)f^{(m+1)}(x_0)$$

sitiv oder negativ ist.

Damit der Punkt P mit der Abscisse x_0 ein Inflexionsnkt der Curve sei, ist es nöthig, dass für $x = x_0$ die zweite erivirte $f''(x)$ verschwinde, d. h. die Inflexionspunkte sind in der hl derjenigen Punkte enthalten, deren Abscissen die zweite Derirte von y nach x annulliren.

§ 3. Inhalt ebener Flächen, Länge der Curvenbogen, olumina von Körpern und Inhalt beliebiger Flächen.

Es sei eine ebene Curve gegeben, deren auf rechtwinklige ordinaten bezogene Gleichung $y = f(x)$ lautet, und man beachte einen Theil der Curve von $x = \alpha$ bis $x = \beta$, der von n betreffenden Parallelen zur y-Axe *nur einmal* getroffen wird.

Man ziehe die beiden Ordinaten in den Endpunkten, deren bscissen α und β sind; der Inhalt des von dem Curvenbogen, r x-Axe und den beiden Endordinaten begrenzten Ebenenücks wird auf die folgende Art bestimmt:

Man zerlege das Intervall von α bis β in eine beliebige nzahl von Theilen

$$\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$$

nd ziehe von den Theilungspunkten aus die Ordinaten bis zur urve; zwischen zwei aufeinanderfolgenden Ordinaten wird ein einer Curvenbogen enthalten sein, auf dem ein beliebiger Punkt P ngenommen wird; es sei x_r die Abscisse des Punktes P, der auf em kleinen dem Intervall δ_r entsprechenden Bogen gewählt urde. Das Product $\delta_r f(x_r)$ ist der Inhalt des Rechtecks, dessen Basis δ_r und dessen Höhe die Ordinate des Punktes P ist.

Die Grenze der Summirung

$$\sum_{r=1}^{n} \delta_r f(x_r)$$

estimmt, wenn man die Theilintervalle δ_r an Grösse unbegrenzt bnehmen und mithin ihre Anzahl n ins Unendliche wachsen

lässt, den Inhalt der ebenen zwischen der Curve und Abscisse axe enthaltenen Fläche.

Analytisch wird dieser Flächeninhalt durch die Formel

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$$

ausgedrückt. Siehe Bd. 1, Kap. 7.

Jede beliebige von ebenen Curven eingeschlossene ebene Fläc lässt sich immer aus ebenen Flächen der angegebenen Art zusa mensetzen, d. h. solchen, die von Curvenbogen und der x-Axe l grenzt sind.

Man führe die Zerlegung des Intervalls, wie oben, a ziehe die Tangente an die Curve in dem Punkt der Cur dessen Abscisse x_r ist, und ebenso in allen analogen Punkt und betrachte das Segment der Tangente, welches von den beid durch die Endpunkte des Intervalls δ_r gehenden Ordinaten b stimmt wird.

Die *Länge des Curvenbogens* oder einfach der *Curvenbog* wird als *die Grenze der Summe aller dieser Tangentensegme für* $n = \infty$ definirt.

Der analytische Ausdruck für den ebenen Curvenbogen laut

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx.$$

Nennt man den Curvenbogen s, so gilt die Differenti beziehung:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

Bezeichnet θ den Winkel, welchen die Tangente in ein Punkt der Curve mit der x-Axe bildet, so ist:

$$\cos\theta = \frac{dx}{ds},$$

$$\sin\theta = \frac{dy}{ds}.$$

Wir definiren nun die Länge des Bogens einer Raumcur

Es seien $y = \varphi(x)$ und $z = \psi(x)$ die Gleichungen Raumcurve; wir wollen den Theil der Curve betrachten, von einem Punkt mit der Abscisse $x = \alpha$ bis zu einem Pu

it der Abscisse $x = \beta$ reicht, und annehmen, dieser Theil sei beschaffen, dass jede Ebene, deren Abscisse zwischen α und β egt, und welche auf der x-Axe senkrecht steht, ihn nur in nem Punkt treffe.

Wir theilen das Stück der x-Axe von $x = \alpha$ bis $x = \beta$, wie über, in Theilintervalle $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ und legen durch die heilpunkte auf der x-Axe senkrechte Ebenen, welche den totalen ogen der Curve in ebensoviele Theilbogen zerlegen; in jedem ieser Theilbogen, z. B. in demjenigen, der sich in δ_r projicirt, ählen wir einen Punkt, ziehen in ihm die Tangente an die urve und betrachten das Stück dieser Tangente, welches von en durch die Endpunkte des Segments δ_r gehenden Ebenen egrenzt wird.

Die Grenze der Summe aller dieser Tangentenstücke, wenn die ntervalle δ_r an Grösse unbegrenzt abnehmen, ist die Länge es Raumcurvenbogens.

Der analytische Ausdruck für den Curvenbogen ist:

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\, dx,$$

orin

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

st: *bezeichnet man mit (t, x), (t, y), (t, z) die Richtungswinkel er Tangente, so erhält man die Formeln* (vergl. § 1):

$$\cos(t, x) = \frac{dx}{ds},$$

$$\cos(t, y) = \frac{dy}{ds},$$

$$\cos(t, z) = \frac{dz}{ds}.$$

Wir gehen nun zu der Bestimmung der Volumina und des nhalts beliebiger Flächen über.

Wir wollen den endlichen Theil einer von einer geschlossenen Linie (dem Rand) begrenzten Fläche betrachten; dieser Rand projicire sich auf die xy-Ebene in eine ebene geschlossene Linie φ und es werde angenommen, die sämmtlichen Geraden, welche durch die Punkte der von φ eingeschlossenen ebenen Fläche gehen, treffen die Fläche im Raum *höchstens in einem einzigen Punkt.*

Man ziehe in der Ebene xy ein Rechteck, dessen Seit den beiden Axen x und y parallel laufen und die Curve φ h rühren, die vollständig im Inneren dieses Rechtecks liege, u α, β seien die Abscissen, α', β' die Ordinaten der Ecken d Rechtecks.

Wir theilen das Intervall der x-Axe von α bis β in The intervalle $\delta_1, \ldots, \delta_n$ und das Intervall der y-Axe von α' bis in Theilintervalle $\delta_1', \delta_2', \ldots, \delta_n'$ und ziehen durch die The punkte die Parallelen zu den Axen x bez. y.

Auf diese Art wird das der Curve φ umschriebene Rec eck in eine Anzahl kleiner Rechtecke geteilt, von denen jed den Flächeninhalt $\delta_r \delta_s'$ hat; wir betrachten von ihnen nur d welche entweder ganz im Innern des von φ begrenzten Ebene stücks liegen, oder von φ durchschnitten werden und lassen übrigen kleinen Rechtecke, die ganz ausserhalb des von φ grenzten Ebenenstücks liegen, weg.

Durch einen im Rechteck vom Flächeninhalt $\delta_r \delta_s'$ (d Umfang nicht ausgeschlossen) liegenden Punkt $(x_r\, y_s)$ ziehen die Parallele zur z-Axe bis zu ihrem Schnitt mit der Fläc dieser Schnittpunkt wird über der xy-Ebene in einer Höhe

$$z_{rs} = f(x_r, y_s)$$

liegen, wenn $z = f(x, y)$ die Gleichung der Fläche ist.

Die Grenze der Summe der Volumina aller rechtwinkli Parallelepipeda von einer Basis, wie $\delta_r \delta_s'$, und Höhe, wie ist, wenn die Intervalle δ, δ' an Grösse unbegrenzt abnehm dasjenige, was das zwischen der Fläche und der xy-Eb gelegene Volumen genannt wird.

Dieses Volumen hat den analytischen Ausdruck

$$V = \iint f(x, y)\, dx\, dy,$$

worin das Doppelintegral über das ganze von der Curve φ grenzte Ebenenstück zu erstrecken ist. Vergl. *Repertorium*, S. 160.

Ein beliebiges von Flächen eingeschlossenes Volumen k immer aus derartigen Volumina zusammengesetzt werden, d solchen, die von Theilen der Flächen und der xy-Ebene begr werden.

Wir wollen das in der einen Richtung unbegrenzte re winklige Parallelepipedon construiren, welches das Rechteck δ zur Basis hat; seine Seitenflächen werden auf der Fläche

ummliniges Vierseit ausschneiden, innerhalb dessen sich der nkt von der Höhe z_{r_s} befindet.

Wir legen durch diesen Punkt die Tangentialebene und sen sie durch die Seitenflächen des Parallelepipedons begrenzt n; *die Grenze der Summe der Flächeninhalte aller auf diese t in den verschiedenen Tangentialebenen gebildeten Parallelo- mme ist, wenn die δ_r, δ_s' unbegrenzt kleiner werden, der halt der Fläche.*

Ihr analytischer Ausdruck lautet

$$I = \iint \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy;$$

bei ist das Doppelintegral, wie oben, über das ganze von der urve φ begrenzte Ebenenstück zu erstrecken.

Bis vor Kurzem wurde der Inhalt der Flächen in den an- sehensten Lehrbüchern (siehe z. B. Serret, *Diff.- u. Integr.-Rechn.*) f andere Art definirt, nämlich als die Grenze der Summe der itenflächen von Polyedern, die dreieckige Seitenflächen haben d in die Fläche eingeschrieben sind. H. A. Schwarz zeigte, dass ese Definition in gewissen Fällen illusorisch oder ungenau erden kann; *Werke*, Bd. 2, p. 309; siehe auch die 2. Ausg. s *Cours d'analyse* von Hermite, Paris 1883, p. 35, 36, in elchem die Bemerkung von Schwarz zuerst veröffentlicht wurde.

Ist z Rotationsaxe der gegebenen Fläche, deren Gleichung sdann

$$z = F\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

utet, so ist das Volumen zwischen zwei zur Rotationsaxe senk- chten Ebenen, welche die Fläche in zwei Parallelkreisen mit n Radien r_1, r_2 schneiden:

$$V = \pi \int_{r_1}^{r_2} r^2 F'(r)\, dr$$

nd der Flächeninhalt des zwischen den beiden Parallelkreisen it den Radien r_1, r_2 enthaltenen Flächenstücks wird durch die ormel

$$2\pi \int_{r_1}^{r_2} r \sqrt{1 + F'^2(r)}\, dr$$

usgedrückt.

Der Flächeninhalt der Kugelcalotte, d. h. des kleineren d beiden Theile der Kugeloberfläche, die von einem beliebigen a der Kugel gezogenen Kreis vom Radius r bestimmt werden, is

$$2\pi R\left(R - \sqrt{R^2 - r^2}\right),$$

worin R den Radius der Kugel bezeichnet.

Lässt man eine Ellipse mit den Halbaxen a und b, $(a >$ um die grössere Axe rotiren, so entsteht ein Rotationsellipso

Der Flächeninhalt des Theils eines solchen Ellipsoids, welch von zwei Ebenen bestimmt wird, die auf der Rotationsaxe senkre stehen und von denen die eine durch das Centrum geht und v der anderen um die Grösse r absteht, ist

$$\pi \frac{b}{a}\left\{r\sqrt{a^2 - e^2 r^2} + \tfrac{1}{2}\frac{a^2}{e}\arcsin\frac{e}{a}r\right\},$$

worin

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \text{ ist.}$$

Der Flächeninhalt des halben Ellipsoids ist

$$\pi b^2 + \frac{\pi a b}{e}\arcsin e.$$

Das von einem Ellipsoid mit drei ungleichen Axen u schlossene Volumen ist

$$\tfrac{4}{3}\pi a b c,$$

wenn a, b, c die drei Halbaxen bezeichnen.

Das von einem einschaligen Hyperboloid und zwei Kehlellipse parallelen Ebenen begrenzte Volumen ist, wenn di Ebenen um die Grössen $\pm c$ von der Kehlellipse abstehen:

$$\tfrac{8}{3}\pi a b c,$$

wobei a, b die Halbaxen der Kehlellipse sind.

Das von einem elliptischen Paraboloid und einer auf Axe senkrechten Ebene eingeschlossene Volumen ist der Hä des Volumens des Cylinders gleich, der dieselbe Basis und Höhe l

Der Flächeninhalt eines Torus (vergl. Kap. 12, § 7), *welc durch einen Kreis erzeugt wird, dessen Radius R ist, und der eine in seiner Ebene liegende und von seinem Mittelpunkt die Grösse a abstehende Gerade rotirt, ist*

$$4\pi^2 a R,$$

und das von derselben Fläche eingeschlossene Volumen:

$$2\pi^2 a R^2.$$

Flächeninhalte und Volumina für Polarcoordinaten.
seien ϱ (der Radiusvector) und θ (die Amplitude) die
larcoordinaten (vergl. S. 20) eines Punkts einer gegebenen
ancurve, P_1, P_2 zwei Punkte der Curve und O der Pol des
ordinatensystems; der zwischen P_1 und P_2 gelegene Theil der
rve sei derart, dass jede beliebige durch O gehende und
nerhalb des Winkels P_1OP_2 liegende Gerade ihn nur in einem
nkt trifft. Man zerlege den Winkel P_1OP_2 in n Theile
$, \omega_2, \ldots, \omega_n$; der Curvenbogen von P_1 bis P_2 wird alsdann
rch die Schenkel der Theilwinkel in n Theile zerlegt; in
dem dieser n Theile (z. B. in dem Theil, der dem Winkel ω_r
tspricht) wähle man einen beliebigen Punkt, dessen Radius-
ctor ϱ_r sei und beschreibe den Kreisbogen vom Centrum O
d Radius ϱ_r, der von den Schenkeln des Winkels ω_r be-
enzt wird. *Die Grenze der Summe der Flächeninhalte aller*
reisausschnitte, wie desjenigen, dessen Flächeninhalt $\frac{1}{2}\varrho_r^2\omega_r$ *ist**), *stimmt den Inhalt der zwischen der Curve und den beiden*
rch P_1, P_2 *gehenden Endradienvectoren enthaltenen Fläche.*

Der analytische Ausdruck für diesen Flächeninhalt ist:

$$\frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\varrho^2 d\theta,$$

rin θ_1, θ_2 *die Amplituden der Punkte* P_1, P_2 *bedeuten und*
genommen ist, dass ϱ *mittelst der Gleichung der Curve als Func-*
n von θ *ausgedrückt sei.*

Diese Definition des Flächeninhalts stimmt mit der früher
gebenen in der Art überein, dass, wenn der Inhalt einer
äche erst auf die eben erläuterte Weise aus Flächeninhalten für
olarcoordinaten und dann aus solchen zusammengesetzt wird,
ie sie im Anfang des Paragraphen besprochen wurden, die mit
ülfe der beiden entsprechenden Formeln gefundenen Resultate
entisch sind.

Auf analoge Art kann man bei den Volumina verfahren.
ir wollen einen Theil einer Fläche betrachten, deren Punkte
e Grössen ϱ, θ, φ zu Polarcoordinaten haben. Vergl. S. 35.

Man betrachte den Kegel mit *nicht ebener* Basis, dessen
itze in dem Pol O liegt und dessen Basis der gegebene
heil der Fläche ist, und nehme an, dieser Theil sei so be-

*) Hier, wie in allen ähnlichen Fällen, verstehen wir unter ω_r
ch die Zahl, welche die Länge des zu dem Centriwinkel ω_r gehöri-
n Kreisbogens auf einem Kreis mit dem Radius 1 misst.

schaffen, dass jede durch O gehende und im Innern des Kege liegende Gerade ihn immer nur in *einem* Punkt treffe. Wir woll nun den an der Spitze des Kegels von dem Kegelmantel u schlossenen Raum den körperlichen Winkel oder kurz den Wink an der Spitze des Kegels nennen. Diesen Winkel zerlegen w in eine Anzahl körperlicher Theilwinkel, von denen jeder aus d Fläche ein Stück ausschneiden wird, und nehmen auf diesem Stü einen Punkt P_{rs} an, dessen Radiusvector ϱ_{rs} sei. Wir bilden n den Kegel, der zum Winkel an der Spitze den körperlich Theilwinkel hat, innerhalb dessen sich der Punkt P_{rs} befindet, u zur Basis einen Theil der Kugeloberfläche, die aus dem Centr O mit dem Radius ϱ_{rs} beschrieben wird. *Die Grenze der Sum der Volumina aller dieser Kegel definirt, wenn die körperlich Theilwinkel, in welche der totale, der Fläche zugehörige, an d Pol O liegende körperliche Winkel zerlegt wurde, unbegrenzt a nehmen, das zwischen der Fläche und dem Punkt O enthalte Volumen.* Es möge *Polarvolumen* heissen.

Der analytische Ausdruck für dieses Volumen ist:

$$V = \tfrac{1}{3}\iint \varrho^3 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi ;$$

dabei ist das Doppelintegral auf die Gesammtheit aller Wer θ, φ auszudehnen, welche Punkten des betrachteten Theils d Fläche entsprechen.

Selbstverständlich gilt auch hier die Bemerkung, dass di neue Definition des Volumens mit der früheren nicht in Wid spruch steht, und dass, wenn man das Polarvolumen mitte der früheren Formeln berechnet, indem man es in Summ und Differenzen von Volumina der früher betrachteten Art z legt und dann die dieser letzteren Art von Volumina e sprechenden Formeln anwendet, die beiden Resultate identis sein müssen.

Wir geben schliesslich die Formeln an, welche für d Bogenlänge von Plan- und Raumcurven und für die Inha beliebiger Flächen bei Polarcoordinaten gelten. *Sie lauten:*

$$\textit{Bogenlänge der Plancurve} = \int_{\varrho_1}^{\varrho_2} d\varrho \sqrt{1 + \varrho^2 \left(\frac{d\theta}{d\varrho}\right)^2},$$

$$\textit{Bogenlänge der Raumcurve} =$$

$$= \int_{\varrho_1}^{\varrho_2} d\varrho \sqrt{1 + \varrho^2 \left(\frac{d\theta}{d\varrho}\right)^2 + \varrho^2 \sin^2\theta \left(\frac{d\varphi}{d\varrho}\right)^2},$$

halt von Flächen =

$$= \iint \varrho \, d\theta \, d\varphi \sqrt{\left\{\varrho^2 + \left(\frac{\partial \varrho}{\partial \theta}\right)^2\right\} \sin^2 \theta + \left(\frac{\partial \varrho}{\partial \varphi}\right)^2}.$$

4. Krümmung von Plan- und Raumcurven. Torsion. Natürliche Gleichungen.

Der Winkel, den die Tangenten in zwei benachbarten unkten P, P' einer Plan- oder Raumcurve miteinander bilden nd welcher der Null zustrebt, wenn die beiden Berührungsunkte sich einander nähern, heisst *Contingenzwinkel*. Wir ehmen an, dieser Winkel werde durch den mit dem Radius 1 eschriebenen Kreisbogen gemessen, der zu einem dem Continenzwinkel gleichen Centriwinkel gehört. Das Mass dieses Kreisogens werde mit θ bezeichnet.

Wenn die Länge des von zwei benachbarten Punkten berenzten Bogens s genannt wird, so versteht man unter *Krümmung der Plan- oder Raumcurve in einem Punkt P die Grenze les Verhältnisses*

$$\frac{\theta}{s},$$

falls P' dem Punkt P zustrebt; das Verhältniss selbst pflegt nan *die mittlere Krümmung des Bogens s* zu nennen.

Betrachtet man θ als Function von s, *so kann man die Krümmung auch als Derivirte von* θ *nach* s *ausdrücken.*

Der reciproke Werth der Krümmung heisst der *Krümmungsradius.*

Handelt es sich um eine Plancurve, deren Gleichung

$$y = f(x)$$

ist. so wird die Krümmung durch die Formel

$$C = \frac{1}{R} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

ausgedrückt; lauten dagegen die Gleichungen der Plancurve

$$x = \varphi(t),$$
$$y = \psi(t),$$

so ist

$$C = \frac{1}{R} = \frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}.$$

Wenn $t = s$ (dem Curvenbogen) ist, so erhält man

$$\frac{1}{R} = \frac{\frac{d^2y}{ds^2}}{\frac{dx}{ds}} = -\frac{\frac{d^2x}{ds^2}}{\frac{dy}{ds}},$$

$$\frac{1}{R} = \sqrt{\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2}.$$

In Polarcordinaten ϱ, θ ist, wenn die Gleichung der Curv $\varrho = \varphi(\theta)$ lautet und ϱ', ϱ'' die erste bez. zweite Derivirte vo ϱ nach θ sind:

$$\frac{1}{R} = \frac{\varrho^2 + 2\varrho'^2 - \varrho\varrho''}{(\varrho^2 + \varrho'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

In dem Fall einer Raumcurve wird die Krümmung durc

$$C = \frac{1}{R} =$$

$$= \frac{1}{ds^3}\sqrt{(dy\,d^2z - dz\,d^2y)^2 + (dz\,d^2x - dx\,d^2z)^2 + (dx\,d^2y - dy\,d^2x)}$$

ausgedrückt, oder, wenn s die unabhängige Variable ist, durch

$$C = \frac{1}{R} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}.$$

Wenn von einem Punkt im Raum die Parallelen zu alle Tangenten an eine gegebene *Raum*curve gezogen werden un diese Parallelen durch eine Kugel begrenzt werden, deren Cen trum der feste Punkt des Raums ist, so wird auf diese Ar auf der Kugel eine *sphärische Curve* entstehen, die *das sphäri sche Bild der gegebenen Raumcurve* heisst.

Zieht man von einem Punkt der gegebenen Curve au die Parallele zu der in dem entsprechenden Punkt an das sphä rische Bild gelegten Tangente, so erhält man *die Hauptnormal zu der gegebenen Raumcurve.*

Die Gleichungen der Hauptnormalen lauten:

$$\frac{X - x}{d\frac{dx}{ds}} = \frac{Y - y}{d\frac{dy}{ds}} = \frac{Z - z}{d\frac{dz}{ds}},$$

und ihre Richtungscosinus sind:

$$\cos\xi = R\frac{d\frac{dx}{ds}}{ds},$$

$$\cos\eta = R\frac{d\frac{dy}{ds}}{ds},$$

$$\cos\zeta = R\frac{d\frac{dz}{ds}}{ds},$$

enn R den Krümmungsradius bezeichnet.

Wir werden unter *positiver Richtung der Normalen* einer *enen* Curve in P oder der Hauptnormalen einer *Raum*curve P diejenige der beiden Richtungen der Normalen verstehen, elche so beschaffen ist, dass man, von P in ihrem Sinn aushend, Punkte trifft, die auf derselben Seite der Tangente in ', oder auf derselben Seite der senkrecht zur Hauptnormalen urch P gelegten Ebene liegen, wie die dem Punkt P unendch nahen Punkte der Curve.

Unter der *positiven Richtung der Tangente* an die ebene urve in P verstehen wir ferner diejenige der beiden Richtungen er Tangente, welche mit der positiven Richtung der y-Axe usammenfällt, wenn man die Curve in ihrer eigenen Ebene so erschiebt, dass sich die positive Richtung der x-Axe mit der ositiven Richtung der Normalen deckt.

Der Punkt auf der positiven Richtung der Normalen zur lancurve oder der Hauptnormalen zur Raumcurve, der von P m eine Grösse gleich R (dem Krümmungsradius) absteht, eisst *der dem Punkt P entsprechende Krümmungsmittelpunkt.*

Bei einer Raumcurve heisst die durch den Krümmungsittelpunkt senkrecht zur Tangente und Hauptnormalen gezogene erade *Krümmungsaxe, Polarlinie* und die ihr parallele durch en Punkt P der Curve gehende Gerade *Binormale* (nach Saint-enant, *Mém. sur les lignes courbes non planes, Journ. de l'Éc. ol.*, 18, p. 17).

Der Krümmungsmittelpunkt ist bei Plancurven die Grenzge des Schnittpunkts der Normalen in P mit der Normalen in inem dem Punkt P unendlich nahen Punkt.

Die Krümmungsaxe (Polare) ist bei Raumcurven die Grenzge der Schnittgeraden der Normalebene zur Curve in P mit der Normalebene in einem dem Punkt P unendlich nahen Punkt.

Die Coordinaten des Krümmungsmittelpunkts sind im Fal einer ebenen Curve

$$x_1 = x + R\frac{dy}{ds},$$

$$y_1 = y - R\frac{dx}{ds};$$

diese Formeln gelten jedoch nur dann, wenn die obigen Verein barungen über die positiven Richtungen der Tangente und Nor malen vorher getroffen worden sind, und wenn man sich R al eine ihrem Wesen nach positive Grösse denkt.

Die Coordinaten des Krümmungsmittelpunkts im Fall eine gewundenen Curve sind

$$x_1 = x \pm R^2 \frac{d\frac{dx}{ds}}{ds},$$

$$y_1 = y \pm R^2 \frac{d\frac{dy}{ds}}{ds},$$

$$z_1 = z \pm R^2 \frac{d\frac{dz}{ds}}{ds},$$

wobei das Vorzeichen durch die Vereinbarungen bestimmt wir die über die *positive Richtung* der Tangente an die gewunden Curve noch zu treffen sind.

Die Gleichungen der Krümmungsaxe lauten:

$$\frac{X - x_1}{\cos\lambda} = \frac{Y - y_1}{\cos\mu} = \frac{Z - z_1}{\cos\nu},$$

worin λ, μ, ν die Richtungswinkel der Krümmungsaxe bezeichn und durch

$$\cos\lambda = R\frac{dy\,d^2z - dz\,d^2y}{ds^3},$$

$$\cos\mu = R\frac{dz\,d^2x - dx\,d^2z}{ds^3},$$

$$\cos\nu = R\frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{ds^3}$$

bestimmt werden.

Die durch die Tangente und die Hauptnormale einer Cur doppelter Krümmung gehende Ebene heisst *Schmiegungsebe (Krümmungsebene, Osculationsebene); ihre Gleichung lautet:*

$$\begin{vmatrix} X-x, & Y-y, & Z-z \\ dx, & dy, & dz \\ d^2x, & d^2y, & d^2z \end{vmatrix} = 0.$$

Die Schmiegungsebene ist die Grenzlage der Ebene, welche durch einen Punkt der Curve und zwei andere Punkte der Curve geht, wenn diese beiden anderen Punkte sich auf beliebige Weise dem ersteren unbegrenzt nähern.

Die zweite Krümmung (Schmiegung, Flexion, Torsion oder *Windung)* steht in Beziehung zu der *Deviation der Krümmungsaxe* bei dem Uebergang von einem Punkt der Curve zu dem folgenden (dem *Schmiegungswinkel, Torsions-, Flexions-* oder *Windungswinkel*), wie die gewöhnliche Krümmung (die auch *die erste Krümmung* genannt wird) in Beziehung zu der *Deviation der Tangente* (dem *Contingenzwinkel*) steht.

Bezeichnet man mit τ den Torsionswinkel, d. h. den Winkel zwischen den beiden Krümmungsaxen, die zweien unendlich nahen Punkten der Curve entsprechen oder besser denjenigen Bogen eines Kreises vom Radius 1, der zu einem diesem Winkel gleichen Centriwinkel gehört, so heisst die Grenze des Verhältnisses

$$\frac{\tau}{s}$$

die *Torsion* oder *Schmiegung in einem Punkt der Raumcurve.*

Ihr analytischer Ausdruck ist

$$\frac{1}{T} = \sqrt{\left(\frac{d\cos\lambda}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\mu}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\nu}{ds}\right)^2},$$

worin λ, μ, ν die Richtungswinkel der Krümmungsaxe bedeuten, und T der Torsionshalbmesser heisst.

In der Theorie der Raumcurven (gewundenen Curven, Curven doppelter Krümmung) sind von grosser Bedeutung die sogenannten *Frenet'schen oder Serret'schen Formeln*, welche Ausdrücke für die Differentiale der neun Cosinus

$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ (die Richtungscosinus der Tangente),
$\cos\xi$, $\cos\eta$, $\cos\zeta$ (die Richtungscosinus der Hauptnormalen),
$\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ (die Richtungscosinus der Krümmungsaxe)

liefern.

Sie lauten:

$$\frac{d\cos\alpha}{ds} = \frac{1}{R}\cos\xi,$$
$$\frac{d\cos\beta}{ds} = \frac{1}{R}\cos\eta,$$
$$\frac{d\cos\gamma}{ds} = \frac{1}{R}\cos\zeta;$$

$$\frac{d\cos\lambda}{ds} = \frac{1}{T}\cos\xi,$$
$$\frac{d\cos\mu}{ds} = \frac{1}{T}\cos\eta,$$
$$\frac{d\cos\nu}{ds} = \frac{1}{T}\cos\zeta;$$

$$\frac{d\cos\xi}{ds} = -\frac{1}{R}\cos\alpha - \frac{1}{T}\cos\lambda,$$
$$\frac{d\cos\eta}{ds} = -\frac{1}{R}\cos\beta - \frac{1}{T}\cos\mu,$$
$$\frac{d\cos\zeta}{ds} = -\frac{1}{R}\cos\gamma - \frac{1}{T}\cos\nu.$$

Die analytischen Beziehungen, welche zwischen der Krümmung und dem Bogen einer Plancurve bez. der Krümmung, Torsion und dem Bogen einer Raumcurve bestehen, werden *die natürlichen Gleichungen* der Curve, *equazioni intrinsiche, intrinsic equations* genannt, weil sie zwar die Form, aber nicht die Lage der Curve in der Ebene bez. im Raum bestimmen.

Sind die natürlichen Gleichungen

$$R = R(s), \quad T = T(s)$$

einer Raumcurve beliebig gegeben, so existirt immer die ihnen entsprechende Curve, und das Problem, die Curve zu bestimmen, reducirt sich auf die Integration einer Gleichung vom Riccati'schen Typus; vergl. *Repert.* Bd. 1, p. 173. (Darboux).

Die Curve, bei welcher das Verhältniss der beiden Krümmungen constant bleibt, ist eine Schraubenlinie, Schneckenlinie oder Helix (Curven, die auf einem Cylinder aufgetragen sind und dessen Erzeugende unter constantem Winkel schneiden); sind im Besonderen die beiden Krümmungen constant, so ist der Cylinder ein Kreiscylinder. Puiseux, *Crelle,* 7; Bertrand, ib., 8.

Die natürliche Gleichung des Kegelschnitts lautet:

$$s = \frac{1}{3}\int \frac{dR}{\sqrt{-1 + AR^{\frac{2}{3}} - BR^{\frac{4}{3}}}},$$

worin A, B zwei Constante bezeichnen.

Die natürlichen Gleichungen der Parabel und der gleichseitigen Hyperbel sind

$$s = \frac{1}{3}\int \frac{dR}{\sqrt{\left(\frac{R}{p}\right)^{\frac{2}{3}} - 1}},$$

$$\text{bez. } s = \frac{1}{3}\int \frac{dR}{\sqrt{\left(\frac{R}{a}\right)^{\frac{4}{3}} - 1}},$$

worin p und a die Parameter der Parabel bez. der gleichseitigen Hyperbel bedeuten.

Eine der natürlichen Gleichungen einer sphärischen (auf einer Kugel liegenden) Curve lautet:

$$\frac{R}{T} + \frac{d}{ds}\left(T\frac{dR}{ds}\right) = 0.$$

Die Curven, für welche eine der *natürlichen* Gleichungen eine *lineare Relation* zwischen den beiden Krümmungen ist, heissen *Bertrand'sche Curven. Crelle,* 15.

Sie haben die bemerkenswerthe Eigenschaft, dass ihre Hauptnormalen auch die Hauptnormalen einer zweiten Curve sind, die der ersten conjugirt genannt wird. Siehe auch Bonnet, *Journ. de l'Éc. pol.,* 32, 1848; Serret, *Crelle,* 16; *Compt. Rend.*, 1877; Cesàro, *Riv. di mat.,* 2; *Mathesis*, 2; etc.

Die Ersten, welche sich ex professo mit der Theorie der gewundenen Curven beschäftigten, waren besonders Clairaut, *Recherches sur les courbes à double courbure,* Paris 1731; Tinseau, *Mém. des Sav. étr.,* 9, 1781; Monge, ib., 10, 1785; *Journ. de l'Éc. pol.,* 2, 1799; Lancret, *Mém. de l'Ac. de Paris,* 1, 1806; 2, 1811; Jacobi, *Crelle,* 14, 16; Saint-Venant, *Journ. de l'Éc. pol.,* 1845.

Die berühmten Formeln von Frenet und Serret wurden

fast gleichzeitig von diesen beiden Autoren entdeckt. *Crelle* 17, 1852 und 16, 1851*).

Mit der sogenannten *natürlichen Geometrie der Curven*, d. h. dem Studium der Curven mittelst der natürlichen Gleichungen befassten sich speciell Hoppe in zahlreichen Arbeiten, *Crelle* 60, 63; *Arch. der Math.*, 1880, 85, 89, etc.; Lie, *Bestimmung aller Raumcurven, deren Krümmungsradius, Torsionsradius und Bogenlängen durch beliebige Relationen verknüpft sind*, Christiania *Vid. Selsk. Forhandl.*, 1882; siehe auch seine *Vorles. über cont. Gruppen, etc.*, Leipzig, 1893; ein neueres Buch ist von Cesàro *Geom. intrinsica*, Napoli, 1896 (die deutsche Uebersetzung von Kowalewski ist bei B. G. Teubner in Leipzig 1901 erschienen), welches ausschliesslich diese Richtung verfolgt.

Die Hauptwerke über die Infinitesimaltheorie der Raumcurven sind von Schell, *Allgemeine Theorie der Curven doppelter Krümmung*, Leipzig, 2. Aufl. 1898; P. Serret, *Théor. nouv. etc.*, Paris 1860; Joachimsthal, *Anw. der Diff. und Int. etc.*, 3. Aufl., bearb. von Natani, Leipzig 1890; Scheffers, G. *Anw. der Diff. und Int. etc.*, Bd. 1, Leipzig 1900 (vergl. das Namenregister); dazu kommen die Arbeiten über *Differentialgeometrie*, die wir in den nächsten Paragraphen citiren werden.

§ 5. Berührungen von Curven und Flächen.

Wenn $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$ die Gleichungen zweier *ebener* Curven sind, so sagt man, die Curven berühren sich in dem Punkt mit der Abscisse $x = x_0$ *in der* i^{ten} *Ordnung oder* $(i+1)$ *punktig*, wenn für $x = x_0$

$$\begin{aligned} f(x_0) &= \varphi(x_0), \\ f'(x_0) &= \varphi'(x_0), \\ f''(x_0) &= \varphi''(x_0), \\ &\cdots\cdots \\ f^i(x_0) &= \varphi^i(x_0) \quad \text{ist.} \end{aligned}$$

Wenn i eine gerade Zahl ist, so berühren sich die beiden Curven in diesem Punkt und schneiden sich zugleich in ihm; ist i dagegen ungerade, so schneiden sich die beiden Curven nicht.

Wenn zwei Curven f, φ in einem Punkt eine Berührung

*) Der in dem *Crelle'schen Journal* später als der Serret'sche zum Abdruck gekommene Frenet'sche Aufsatz war schon im Jahr 1847 der Toulouser Facultät als Doctordissertation präsentirt worden

er Ordnung haben, so berührt eine dritte Curve ψ, welche mit eine Berührung von der Ordnung $k < i$ hat, auch die andere in derselben Ordnung k.

Eine Curve, die in einem Punkt mit einer anderen festen urve eine Berührung i^{ter} Ordnung hat, kann man als die Grenzlage einer beweglichen Curve ansehen, die durch $i + 1$ unkte der festen Curve geht, wenn diese $i + 1$ Punkte sich nbegrenzt einander nähern.

Von einer Curve, deren Gleichung i unbestimmte Constanten enthält, sagt man, sie *osculire* eine andere feste Curve, wenn sie mit ihr in einem Punkt eine Berührung der grössten Ordnung hat, die für sie überhaupt bei Berücksichtigung der zur Verfügung stehenden Constanten möglich ist; *im Allgemeinen ist diese höchste Ordnung die $(i-1)^{te}$; in speciellen Fällen kann sie diese Grenze überschreiten.*

Der eine Curve in einem Punkt *osculirende Kreis* ist der Kreis, welcher mit der Curve in diesem Punkt eine Berührung von wenigstens der 2ten Ordnung hat.

Der eine Curve in einem Punkt osculirende Kreis ist der durch diesen Punkt gehende Kreis, dessen Centrum im Krümmungsmittelpunkt liegt (der Krümmungskreis).

Wenn der osculirende Kreis mit der Curve in einem Punkt eine Berührung ungerader Ordnung (also von höherer als der zweiten Ordnung) hat, so ist der Krümmungshalbmesser in diesem Punkt ein Maximum oder Minimum.

Es sei eine Fläche und ihre Normale in einem Punkt P gegeben; es sei ferner eine durch den Punkt P der Fläche gehende Raumcurve gegeben; man stelle die Projection der Curve auf die Fläche her, indem man die projicirenden Geraden parallel zur Normalen auf die Fläche zieht. Man sagt dann, *die Curve und die Fläche haben in dem Punkt P eine Berührung i^{ter} Ordnung,* wenn die Curve und ihre so gebildete Projection sich in P in der i^{ten} Ordnung berühren.

Von einer Fläche, deren Gleichung i willkürliche Parameter enthält, sagt man, sie *osculire* eine gegebene Curve in einem Punkt, wenn sie mit ihr eine Berührung der grössten, mit der Anzahl der willkürlichen Parameter verträglichen Ordnung hat. *Diese Ordnung ist wenigstens die $(i-1)^{te}$.*

Eine durch einen Punkt P der Raumcurve gehende Ebene *osculirt* die Curve in P, wenn sie mit ihr in P eine Berührung von wenigstens der 2ten Ordnung hat. Siehe § 4.

Die *osculirende Kugel* ist die Kugel, welche eine Raun curve in einem Punkt wenigstens in der *dritten* Ordnung berüh

§ 6. Enveloppen von Curven und Flächen. Abwickelbare Flächen.

Wenn die Gleichung $f = 0$ einer Curve (oder einer Fläch einen unbestimmten Parameter a enthält und man diesen stet variiren lässt, so entsteht auf diese Art ein einfach unendlich System von Curven (oder Flächen). Betrachtet man nun ein bestimmten Werth von a und dann einen variirten Werth

$$a + \Delta a,$$

so kann der Schnitt der entsprechenden beiden Curven (od Flächen), wenn Δa sich der Null nähert, im Allgemeinen ein Grenzlage zustreben. Die Gesammtheit aller dieser Grenzlag kann eine Curve (oder Fläche) bilden, welche dann *die Ei hüllende* oder *Enveloppe des gegebenen Systems von Curven (od Flächen)* heisst, während jede einzelne Curve (oder Fläche) d Systems *Eingehüllte* oder *Umhüllte* genannt wird. In dem Fa von Flächen wird die Grenzlage der Schnittcurve zweier Nac barflächen des Systems *Charakteristik* genannt. Monge.

Um die Gleichung der Enveloppe zu erhalten, hat man d Parameter a aus der gegebenen Gleichung und aus derjenigen eliminiren, die sich ergiebt, wenn ihre Derivirte nach a glei Null gesetzt wird $\left(f = 0,\ \frac{\partial f}{\partial a} = 0\right)$.

Die Einhüllende berührt alle Eingehüllten längs den en sprechenden Charakteristiken.

Die auf einer Eingehüllten liegende Charakteristik schneid die benachbarte Eingehüllte in gewissen Punkten, die Gren lagen zustreben können, wenn die beiden Eingehüllten sich ei ander unbegrenzt nähern; die Gesammtheit dieser Grenzlag bildet im Allgemeinen eine der Enveloppe angehörige Curv welche *die Rückkehrkante (Cuspidalcurve) der Enveloppe* g nannt wird.

Jede Charakteristik berührt die Rückkehrkante.

Die Gleichungen der Rückkehrkante erhält man durch E mination von a aus

$$f = 0,\quad \frac{\partial f}{\partial a} = 0,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial a^2} = 0.$$

Die Enveloppe eines einfach unendlichen Systems von *benen* ist eine Fläche, die *Developpable oder abwickelbare Fläche* nannt wird.

Die abwickelbare Fläche ist *Osculationsdeveloppable* ihrer ickkehrkante.

Bezeichnet man mit r, s, t die aus der Gleichung der äche abgeleiteten zweiten Derivirten von z nach x und y, *so für jede developpable Fläche*

$$rt - s^2 = 0.$$

Die *abwickelbaren* Flächen haben ihren Namen von der genschaft, dass man sie auf eine Ebene ohne Falten und üche ausbreiten (abwickeln) kann.

Die Developpable ist der Ort der Tangenten an eine Raumrve, die Rückkehrkante der Fläche ist, und diese Tangenten sind e Charakteristiken der Developpablen.

Die Berührungsebenen der Developpablen sind Osculationsenen der Rückkehrkante.

Die Enveloppe der Normalebenen einer Raumcurve wird larddeveloppable (Fläche der Normalebenen oder der Krümmungsen) der gewundenen Curve genannt.

Die Charakteristiken der Polardeveloppablen sind die Krümngsaxen (Polarlinien) der gegebenen Curve.

Die Coordinaten eines Punkts der Rückkehrkante der Polarveloppablen sind

$$x_0 = x + R\cos\xi - T\frac{dR}{ds}\cos\lambda,$$

$$y_0 = y + R\cos\eta - T\frac{dR}{ds}\cos\mu,$$

$$z_0 = z + R\cos\zeta - T\frac{dR}{ds}\cos\nu.$$

Die Rückkehrkante der Polardeveloppablen einer gewundenen rve ist der Ort der Mittelpunkte der in den Punkten der rve die Fläche osculirenden Kugeln, der Schmiegungskugeln.

Die Enveloppe der auf der Hauptnormalen senkrecht stehenn Berührungsebenen an eine Raumcurve (nach Lancret, ém. *sur les courbes à double courbure, Mém. prés. par div. v. à l'Ac. de Paris*, 1, p. 420: der *rectificirenden Ebenen*) ist e sogenannte *rectificirende developpable Fläche der Raumcurve.*

Breitet man die rectificirende Developpable einer gegebenen aumcurve auf eine Ebene aus, so transformirt sich diese Curve ie auf der Fläche liegt) in eine Gerade.

§ 7. Evoluten und Evolventen.

Wenn wir uns denken, es sei um eine gegebene ebe oder gewundene Curve ein biegsamer aber nicht dehnbar Faden gelegt, und wenn wir diesen von der Curve so abwickel dass er immer gespannt bleibt und daher die Curve immer b rührt, so beschreibt ein beliebiger Punkt des Fadens eine Cur welche *Evolvente* (auch zum Unterschied von einer anderen A von Abwickelungscurven *Filarevolvente*) der gegebenen Cur genannt wird, während die letztere die *Evolute (Filarevolu* der Evolvente heisst.

Die Tangente an die Evolute steht immer auf der Tange an die Evolvente senkrecht, insbesondere ist die Tangente an Evolvente parallel zur Hauptnormalen der Evolute.

Ist eine beliebige gewundene oder ebene Curve als Ev vente gegeben, so sind die Coordinaten eines Punkts der Evolu

$$x' = x + R\cos\xi + R\,\mathrm{tg}\,(\tau + k)\cos\lambda,$$
$$y' = y + R\cos\eta + R\,\mathrm{tg}\,(\tau + k)\cos\mu,$$
$$z' = z + R\cos\zeta + R\,\mathrm{tg}\,(\tau + k)\cos\nu,$$

worin

$$\tau = \int \frac{ds}{T}$$

ist und k eine willkürliche Constante bedeutet. Es existiren n hin unendlich viele Evoluten einer gegebenen ebenen oder wundenen Curve. Ist die Curve eben, so wird $\tau = Const.$ I Winkel, den die Tangente an die Evolute mit der Hauptn malen der Evolvente bildet, ist gleich $\tau + k$.

Wenn die Curve eben ist und $\tau + k = 0$ gesetzt wi erhält man von den unendlich vielen Evoluten die ebene Evol

Die unendlich vielen Evoluten einer Curve liegen sämmtl auf der Polardeveloppablen der Evolvente und sind insbesond sämmtlich geodätische Linien (siehe weiter unten) *die Fläche.*

Wenn die Evolvente eine Raumcurve ist, so sind alle i Evoluten Raumcurven.

Ist dagegen die Evolvente eine Plancurve, so ist eine E lute eben, die übrigen sind gewunden. In diesem Fall ist di einzige ebene Evolute der Ort der Krümmungsmittelpunkte

volvente und die übrigen sind Schraubenlinien des Cylinders, r diesen Ort zur Basis hat.

Die von demselben Punkt der Evolvente ausgehenden Tanten an zwei verschiedene Evoluten bilden einen constanten Winkel miteinander.

Von *den Evolutenflächen einer gegebenen Fläche* wird weiter ten in § 13 die Rede sein.

Aus der oben angegebenen Construction der Evolvente giebt sich sofort:

Es giebt unendlich viele Evolventen einer gegebenen Curve.

Die Evolute einer ebenen Curve untersuchte zuerst Huyghens, *orologium oscillatorium*, Paris 1673; er kam bei dem Versuch, n isochrones Pendel zu construiren, auf den Gedanken, den ochronismus der Cycloide (vergl. Kap. 17, § 12) zu benutzen und n Faden des Pendels über zwei Halbevoluten dieser Curve zu gen; daraus entsprang dann die Idee, die Evoluten im Allmeinen zu studiren. Später hat sich mit ihnen auch Newton seiner *Method of fluxions etc.*, London, 1736 beschäftigt.

§ 8. Krummlinige Coordinaten. Linienelement der Flächen. Fundamentaldifferentialformen der Flächen. Conforme Abbildung. Sphärische Abbildung.

Wenn eine Fläche durch die drei Gleichungen

$$x = \varphi(u, v),$$
$$y = \psi(u, v),$$
$$z = \chi(u, v)$$

finirt ist, in welchen u, v zwei willkürliche Parameter bedeun, so stellen die Linien, für welche $u =$ Const. oder $v =$ Const. t, zwei Systeme von auf der Fläche liegenden Linien dar, die an *Parameterlinien* nennt. Die Grössen u und v heissen e *krummlinigen Coordinaten* des Schnittpunkts der beiden arameterlinien u, v. Der unendlich kleine Abstand zweier er Fläche angehöriger Punkte mit den Coordinaten

$$u, v,$$
bez. $u + du, v + dv$

heisst *Linienelement der Fläche. Sein Quadrat ist*

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

worin

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2$$

$$\text{und} \quad EG - F^2 > 0$$

ist.

Bezeichnet man mit (ux), (uy), ... die Richtungswink der Tangenten an die Parameterlinien $v = \text{Const.}$, $u = \text{Const.}$, gelten die Formeln

$$\cos(ux) = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial u}, \quad \cos(vx) = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial v},$$

$$\cos(uy) = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial y}{\partial u}, \quad \cos(vy) = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial y}{\partial v},$$

$$\cos(uz) = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial z}{\partial u}, \quad \cos(vz) = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial z}{\partial v},$$

und der Winkel Ω, den die Parameterlinien miteinander bilde ergibt sich aus:

$$\cos\Omega = \frac{F}{\sqrt{EG}},$$

$$\sin\Omega = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{EG}}.$$

Die nothwendige und ausreichende Bedingung, damit d beiden Linien $u = \text{Const.}$ und $v = \text{Const.}$ senkrecht aufeinand stehen, ist $F = 0$.

Der Inhalt des von den vier Parameterlinien u, $u + du$, $v + dv$ auf der Fläche gebildeten unendlich kleinen Vierecks, d Flächenelements, ist

$$\sqrt{EG - F^2}\,du\,dv.$$

Bezeichnet man mit X, Y, Z die Richtungscosinus d Flächennormalen, so erhält man die Formeln:

$$X = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u}, & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v}, & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix},$$

$$Y = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u}, & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v}, & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix},$$

$$Z = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}, & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v}, & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Die Differentialform

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

eisst *die erste Fundamentaldifferentialform der Fläche* und die Differentialform

$$\varphi = -\sum dx\,dX = D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2$$

ie zweite Fundamentaldifferentialform der Fläche.

Die D haben die Werthe

$$D = \sum X\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}, \quad D' = \sum X\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}, \quad D'' = \sum X\frac{\partial^2 x}{\partial v^2},$$

vobei das Symbol $\sum$ angibt, dass man die Summe der drei Verthe bilden soll, welche sich durch Vertauschung von x, X mit y, Y bez. z, Z ergeben.

Zwischen den Coefficienten E, F, G, D, D', D'' bestehen rei Relationen, die in dem Fall, in welchem die Parameterlinien senkrecht auf einander stehen, also $F = 0$ ist, olgendermassen lauten:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{D''}{\sqrt{G}}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{D'}{\sqrt{G}}\right) - \frac{D'}{\sqrt{EG}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} - \frac{D}{E}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{D}{\sqrt{E}}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{D'}{\sqrt{E}}\right) - \frac{D'}{\sqrt{EG}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} - \frac{D''}{G}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} = 0,$$

$$\frac{D'^2 - DD''}{\sqrt{EG}} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right).$$

Ueber die Form dieser Relationen *in dem allgemeinen Fall* und in *Christoffel'schen* Symbolen siehe Bianchi, *Geom. diff.*,

p. 90, 91, deutsch von Lukat, *Vorlesungen über Differentia geometrie,* Leipzig, 1899 p. 66 u. ff.

Die letzte Gleichung entspricht einer Formel von Gaus *Disqu. circa superficies curvas* etc., *Comment. Gott.,* 6, 18 = *Werke,* 4; die beiden anderen wurden in ähnlicher Gesta zuerst von Mainardi, *Giorn. dell' Ist. Lomb.,* 9, 1857, p. 3 entdeckt und später von Codazzi, *Ann. di mat.,* (2), 2, 18 wieder aufgefunden. Sie führen den Namen *Codazzi'sc Formeln.*

Sind zwei quadratische Differentialformen

$$f = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$
$$\varphi = D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2$$

gegeben, von denen die erste definit sei, d. h. ein constantes Vo zeichen habe (in welchem Fall $EG - F^2 > 0$ sein muss), so es, damit eine Fläche existire, für welche sie die erste und zwe Differentialform sind, nothwendig und ausreichend, dass die d obigen (selbstverständlich die für den allgemeinen Fall geltende Formeln erfüllt seien; in diesem Fall existirt nur eine einzi solche Fläche, die ihrer Gestalt nach, aber nicht ihrer Lage Raum nach bestimmt ist; um die Gleichung der Fläche zu erh ten, muss eine Gleichung vom Riccati'schen Typus (Repert., Bd. p. 173) *integrirt werden.*

Wenn speciell in der ersten Fundamentaldifferentialfo einer Fläche

$$E = G, \quad F = 0$$

ist, so wird das System von Parameterlinien *orthogonal i therm* genannt und u, v heissen *isometrische Parameter.*

Die isothermen Systeme theilen die Fläche in unendl. kleine Quadrate.

Die Linien u, v mögen ein *isothermes System mit ison trischen Parametern* bilden, d. h. die erste Differentialform ha die Gestalt

$$ds^2 = E(du^2 + dv^2).$$

Nun ist es klar, dass, wenn

$$u = \Phi(u')$$
$$v = \Psi(v')$$

gesetzt wird, worin Φ, Ψ zwei willkürliche Functionen si die Parameterlinien $u = \text{Const.}$, $v = \text{Const.}$ nicht wesentl

ändert werden, d. h., die $u' = \text{Const.}$, $v' = \text{Const.}$ sind die mlichen, wie $u = \text{Const.}$, $v = \text{Const.}$; alsdann tritt jedoch die fferentialform in den Coordinaten u', v' nicht mehr unter der *ometrischen Form* auf; sie erhält die Gestalt:

$$ds^2 = E\left\{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u'}\right)^2 du'^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial v'}\right)^2 dv'^2\right\},$$

orin die Coefficienten von du'^2 und dv'^2 nicht, wie früher, einnder gleich sind, wenn auch das Coordinatensystem, da es sich icht geändert hat, als *isotherm* anzusehen ist.

Wir sind daher genöthigt, einen Unterschied in Bezug auf en oben definirten Begriff zu machen.

Ein System (u, v) soll einfach *isotherm* heissen, wenn die ledingungen

$$F = 0, \quad \frac{E}{G} = \frac{U}{V}$$

rfüllt sind, worin U und V Functionen von u allein, bez. von allein sind; es soll dagegen *isotherm mit isometrischen Parametern* genannt werden, wenn überdies $E = G$ ist.

Jedem einfach isothermen System lässt sich stets eine isometrische Form geben.

Man kann immer auf unendlich viele Arten eine solche Vertauschung der Variablen (u, v) mit Variablen (u', v') vornehmen, dass das neue System isotherm wird.

Ist auf der Fläche ein isothermes System (u, v) gegeben, so erhält man jedes andere isotherme System (u', v'), wenn man annimmt, die complexe Variable $u' + iv'$ sei eine beliebige Function der complexen Variablen $u + iv$, d. h.

$$u' + iv' = \Phi(u + iv)$$

setzt, worin Φ das Symbol für eine willkürliche Function ist.

Die nothwendige und ausreichende Bedingung, damit die Linien $\varphi = \text{Const.}$ mit ihren orthogonalen Trajectorien ein isothermes System bilden, besteht darin, dass das Verhältniss zwischen dem ersten und zweiten Differentialparameter von φ) eine Function von φ allein sei.*

---

*) Die allgemeine Definition des ersten und zweiten Differentialparameters einer Function φ ist im *Repert.* 1, p. 218, 219 gegeben. Sie werden mit den Symbolen $\Delta_1 \varphi$ und $\Delta_2 \varphi$ bezeichnet und sind in unserem Fall

Auf jeder Rotationsfläche bilden die Meridiane und c Parallelkreise ein isothermes System.

Wenn das Linienelement einer Fläche sich auf die Fo $(U + V)(du^2 + dv^2)$ reduciren lässt, worin U und V Fu tion von u allein bez. von v allein sind, so sagt man, *Fläche sei vom Liouville'schen Typus.*

Zu den Liouville'schen Flächen gehören die Flächen 2 Grads und die Rotationsflächen.

Neuere Arbeiten über die Liouville'schen Flächen sind v Königs, *Compt. Rend.*, 1889; Stäckel, *Math. Ann.*, 35; Ric *Rend. Acc. Lincei*, 1893.

Wir wollen annehmen, es sei ein *isothermes* Coordinat system (u, v) auf der Fläche gegeben und dieses sei auf isometrische Form reducirt, so dass also

$$ds^2 = \lambda(du^2 + dv^2)$$

ist, und wollen u, v als die orthogonalen Cartesischen Coor naten eines Punkts einer Ebene interpretiren. Jedem Punkt d Fläche wird dann ein Punkt der Ebene entsprechen; *wir halten somit die Abbildung eines Theils der Fläche auf die Ebe*

Eine solche Abbildung ist conform (isogonal, winke treu), d. h. die sich entsprechenden Winkel sind gleich. Ver *Repert.* 1, p. 350.

Im Allgemeinen seien u, v *isometrische* Coordinaten a der Fläche oder einem Theil der Fläche; *um die allgemein conforme Abbildung dieser Fläche auf eine Ebene mit den C tesischen Coordinaten x, y zu erhalten, braucht man nur an nehmen, die complexe Variable $u + iv$ sei eine willkürlic Function der complexen Variablen $x + iy$ oder auch der V riablen $x - iy$; in dem ersten Fall sind die sich entsprechend Winkel gleich und gleichgerichtet, in dem zweiten Fall gleich u entgegengesetzt gerichtet.*

$$\Delta_1 \varphi = \frac{E\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} + G\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2}{EG - F^2},$$

$$\Delta_2 \varphi = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\frac{G\frac{\partial \varphi}{\partial u} - F\frac{\partial \varphi}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{E\frac{\partial \varphi}{\partial v} - F\frac{\partial \varphi}{\partial u}}{\sqrt{EG - F^2}}\right\}.$$

Wenn man dann eine zweite Fläche oder einen zweiten Theil der Fläche hat, auf welchem u', v' die *isometrischen* Coordinaten sind, *so genügt, um die allgemeinste conforme Abbildung der einen Fläche auf die andere zu erhalten, die Annahme, die complexe Variable $u + iv$ sei eine willkürliche Function einer der beiden Variablen $u' + iv'$ oder $u' - iv'$.* Vergl. darüber auch *Repert.* 1, p. 396, 397.

Eine Abbildung eines Flächengebiets auf die Kugel bekommt man, wenn den Punkten der Fläche die Punkte einer Kugel so zugeordnet werden, dass die beiden Flächen in den entsprechenden Punkten *parallele Normalen* haben; ins Besondere, wenn von dem Mittelpunkt einer Kugel Halbmesser parallel zur positiven Richtung der Normalen in den verschiedenen Punkten der Fläche gezogen werden. Die Endpunkte dieser Halbmesser sind alsdann die den Punkten der Fläche entsprechenden Punkte der Kugel. Diese Abbildung pflegt *die Gauss'sche sphärische Abbildung* genannt zu werden.

Eine solche Abbildung ist im Allgemeinen nicht conform; sie ist es nur für die Flächen, deren mittlere Krümmung Null ist (die Minimalflächen, siehe weiter unten, § 12), *und für die Kugel.*

Die Coefficienten e, f, g der (in Coordinaten u, v ausgedrückten) Differentialform, welche das Quadrat des Linienelements der abbildenden Kugel angibt, sind durch die Formeln

$$e = -(KE + HD),$$
$$f = -(KF + HD'),$$
$$g = -(KG + HD'')$$

gegeben, in welchen

$$K = \frac{DD'' - D'^2}{EG - F^2}, \quad H = \frac{2FD' - ED'' - GD}{EG - F^2}$$

ist*).

Die Differentialform

$$e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2$$

pflegt man *die dritte Differentialform in Bezug auf die Fläche* zu nennen.

Die Eigenschaften der sphärischen Abbildung, welche die

---

*) Ueber die Bedeutung von K und H siehe weiter unten § 10.

Krümmungslinien, die Asymptotenlinien etc. betreffen, werden den folgenden Paragraphen besprochen.

Die ältesten Arbeiten über die Differentialgeometrie Flächen sind Euler und Meusnier zu verdanken, welche ersten Untersuchungen über die Krümmung der Flächen anst ten, *Mém. de Berlin,* 1760; *Mém. Sav. Étr.,* 1785. Grundleg für diese Theorie waren dann die späteren berühmten We von Monge, *Application de l'analyse à la Géométrie,* Pa 1807—1809 (vergl. die von Liouville 1850 mit vortr lichen Zusätzen ausgestattete Ausgabe) und von Gauss, *I quisitiones generales circa superficies curvas, Comment. G* 6, 1826, *Werke,* 4, deutsche von A. Wangerin besorgte A gabe mit Anmerkungen in Ostwald's Klassikern der exac Wissenschaften, N. 57. Wir citiren hier die übrigen Arbei nicht besonders — das wird an der betr. Stelle geschehen wir wollen nur noch angeben, dass als die neuesten und u fangreichsten Bücher über Differentialgeometrie ins Besond die Werke von Darboux, *Théor. générale des surfaces,* 4 Bän Paris 1887—1896 und von Bianchi, *Lezioni di geomet differenziale,* Pisa 1894, deutsch von Max Lukat, *Vorlesun über Differentialgeometrie,* Leipzig 1899 zu erwähnen sind.

In den modernen Werken werden für die Rechnungen sogenannten Christoffel'schen Symbole, *Crelle,* 70 benu die wir zur grösseren Bequemlichkeit für den Leser hier sammenstellen:

a) Symbole 1ter Art:

$$\left[\begin{matrix}1\,1\\1\end{matrix}\right] = \tfrac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u}, \qquad \left[\begin{matrix}1\,2\\1\end{matrix}\right] = \tfrac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v},$$

$$\left[\begin{matrix}1\,1\\2\end{matrix}\right] = \frac{\partial F}{\partial u} - \tfrac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}, \qquad \left[\begin{matrix}2\,2\\1\end{matrix}\right] = \frac{\partial F}{\partial v} - \tfrac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u},$$

$$\left[\begin{matrix}1\,2\\2\end{matrix}\right] = \tfrac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}, \qquad \left[\begin{matrix}2\,2\\2\end{matrix}\right] = \tfrac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial v}.$$

b) Symbole 2ter Art:

$$\left\{\begin{matrix}1\,1\\1\end{matrix}\right\} = \frac{G\frac{\partial E}{\partial u} + F\frac{\partial E}{\partial v} - 2F\frac{\partial F}{\partial u}}{2(EG - F^2)},$$

$$\left\{\begin{matrix}1\,1\\2\end{matrix}\right\} = \frac{-F\frac{\partial E}{\partial u} + 2E\frac{\partial F}{\partial u} - E\frac{\partial E}{\partial v}}{2(EG - F^2)},$$

$$\left\{\begin{matrix}1\,2\\1\end{matrix}\right\} = \frac{G\frac{\partial E}{\partial v} - F\frac{\partial G}{\partial u}}{2(EG - F^2)},$$

$$\left\{\begin{matrix}1\,2\\2\end{matrix}\right\} = \frac{E\frac{\partial G}{\partial u} - F\frac{\partial E}{\partial v}}{2(EG - F^2)},$$

$$\left\{\begin{matrix}2\,2\\1\end{matrix}\right\} = \frac{-F\frac{\partial G}{\partial v} + 2G\frac{\partial F}{\partial v} - G\frac{\partial G}{\partial u}}{2(EG - F^2)},$$

$$\left\{\begin{matrix}2\,2\\2\end{matrix}\right\} = \frac{E\frac{\partial G}{\partial v} + F\frac{\partial G}{\partial u} - 2F\frac{\partial F}{\partial v}}{2(EG - F^2)}.$$

Die Derivirten der Coefficienten D, D', D'' der zweiten ifferentialform werden durch die D selbst und die Christof-l'schen Symbole mit Hülfe von Formeln ausgedrückt, die eingarten aufgefunden hat. Siehe Bianchi, *Differential-om.*, deutsche Ausg. p. 123.

Aus dem, was wir in diesem Paragraphen ausgeführt haben, ht hervor, dass die Studien über das Linienelement der Flächen id über die krummlinigen Coordinaten in enger Beziehung zu n Untersuchungen über die quadratischen Differentialformen, e Differentialparameter etc. stehen. Wir verweisen deshalb in ezug auf die betreffende Literatur auf *Repert.*, 1, Kap. 9, § 4. ir wollen hier nur noch hervorheben, dass die Aufsätze Bel-rami's, *Giorn. di Batt.*, 2; *Ann. di mat.*, (1), 1, 1867; *Mem. Acc. Bologna*, 1869; *Math. Ann.*, 1 grundlegend für diese Studien ewesen sind. Siehe auch Ricci, *Lezioni sulla teoria delle uperficie*, Verona-Padova 1898.

§ 9. Auf den Flächen gezogene Linien. Krümmungslinien. Conjugirte Tangenten. Geodätische Linien. Asymptotenlinien.

Eine auf einer Fläche gezogene Curve heisst *Krümmungs-inie*, wenn die durch die Punkte der Curve gehenden Flächen-ormalen eine Curve doppelter Krümmung berühren, d. h. eine bwickelbare Fläche bilden.

Die Krümmungslinien bilden ein doppeltes Orthogonalsystem, l. h.:

durch jeden Punkt einer Fläche gehen immer zwei aufein-nder senkrechte Krümmungslinien.

Längs jeder Krümmungslinie muss die Proportion

$$dx : dy : dz = dX : dY : dZ$$

bestehen, wenn mit X, Y, Z die Cosinus der Winkel bezeich werden, welche die positive Richtung der Flächennormalen den Axen bildet.

Die Differentialgleichung der Krümmungslinien ist

$$(FD'' - GD')dv^2 + (ED'' - GD)du\,dv + (ED' - FD)du^2 =$$

worin D, D′, D″ die ihnen in § 8 beigelegten Werthe haben.

Sie kann auch geschrieben werden:

$$\begin{vmatrix} E\,du + F\,dv, & F\,du + G\,dv \\ D\,du + D'dv, & D'du + D''dv \end{vmatrix} = 0.$$

Wenn $z = f(x, y)$ die Gleichung der Fläche ist, und p, q die ersten Derivirten, mit r, s, t die zweiten Derivirten von z nach x und y bezeichnet werden, *so lautet die Differentialgleichung der Krümmungslinien:*

$$\{(1+p^2)s - pqr\}dx^2 + \{(1+p^2)t - (1+q^2)r\}\,dx\,dy + \{pqt - (1+q^2)s\}dy^2 = 0.$$

Auf der Kugel und auf der Ebene ist jede Linie Krümmungslinie.

Die Krümmungslinien einer Developpablen sind die Erzeugenden und die auf diesen senkrechten Trajectorien.

Wenn zwei Flächen sich längs einer Linie schneiden, für beide Krümmungslinie ist, so schneiden sie sich unter constantem Winkel.

Wenn umgekehrt zwei Flächen sich unter constantem Winkel schneiden und ihr Schnitt für die eine Fläche eine Krümmungslinie ist, so muss er es auch für die andere sein.

Bei der Gauss'schen sphärischen Abbildung ist das einzige Liniensystem der Fläche, welches orthogonal bleibt, das System der Krümmungslinien.

Man nennt *Gesimsflächen* oder *modanirte Flächen* (nach Monge *„moulures"*, it. *superficie modanate*) Flächen, welche beschaffen sind, dass die Krümmungslinien eines Systems in Ebenen liegen, die auf der Fläche senkrecht stehen.

Die Gesimsfläche wird durch die Bewegung einer ebenen Linie erzeugt, deren Ebene, ohne zu gleiten, auf einer abwickelbaren Fläche rollt.

Wenn man durch einen Punkt einer Fläche die beiden ümmungslinien zieht, in diesem Punkt die Tangenten an sie gt und die Normale auf die Fläche errichtet, so schneidet die rch die Normale und jede der beiden Tangenten gehende ene die Fläche in einer Curve, die *Hauptnormalschnitt in esem Punkt* genannt wird.

Daraus folgt, dass in jedem Punkt einer Fläche zwei auptnormalschnitte existiren, die sich rechtwinklig schneiden.

Die Krümmungsradien (in diesem Punkt) r_1, r_2 dieser iden Hauptnormalschnitte heissen *die Hauptkrümmungsradien r Fläche* und die Krümmungsmittelpunkte dieser Normal- hnitte sind *die beiden Krümmungscentren der Fläche* in diesem nkt. Liegen die letzteren auf entgegengesetzten Seiten be- gl. des Punkts der Fläche, so sind die Hauptkrümmungsradien türlich mit entgegengesetztem Vorzeichen zu nehmen.

Wenn die Liniencoordinaten u, v die Krümmungslinien der läche sind, so gelten die Beziehungen

$$D = -\frac{E}{r_2}, \quad D' = 0, \quad D'' = -\frac{G}{r_1}, \quad F = 0,$$

orin r_1, r_2 die Krümmungsradien der die Linien $v =$ Const. z. $u =$ Const. berührenden Normalschnitte sind.

Die Hauptkrümmungsradien r_1, r_2 sind die Wurzeln der uadratischen Gleichung

$$(DD'' - D'^2)r^2 + (ED'' + GD - 2FD')r_1 + (EG - F^2) = 0.$$

Der Krümmungsradius R eines beliebigen Normalschnitts der läche lässt sich durch r_1, r_2 mit Hülfe der Euler'schen Formel

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2\theta}{r_2} + \frac{\sin^2\theta}{r_1}$$

usdrücken, in der θ den Winkel bezeichnet, den die Ebene des chnitts mit der Ebene des Hauptnormalschnitts bildet, welchem er Krümmungsradius r_2 entspricht.

Mittelst dieser Formel können die Krümmungsradien der ormalschnitte immer durch die Hauptkrümmungsradien aus- edrückt werden.

Das folgende Theorem dient dazu, die Krümmungsradien iner beliebigen auf einer Fläche gezogenen Linie als Function er Krümmungsradien der Normalschnitte darzustellen.

Der Krümmungsradius einer beliebigen auf einer Fläche ezogenen Curve ist gleich dem Krümmungsradius des die Curve

berührenden Normalschnitts, multiplicirt mit dem Cosinus Winkels, den die Ebene des Normalschnitts mit der Osculatio ebene der Curve bildet. Theorem Meusnier's.

Wenn r_1 und r_2 dasselbe Vorzeichen haben, so heisst entsprechende Punkt der Fläche *elliptischer Punkt*; ist $r_1 =$ so wird er *Kreis- oder Nabelpunkt* genannt, haben dage r_1 und r_2 verschiedene Vorzeichen, so heisst er *hyperbolisc* und wenn einer der beiden Radien unendlich gross wird, *pa bolischer Punkt.*

Im Fall des elliptischen Punkts liegt die ganze Fläche der Umgebung des Punkts auf derselben Seite der Berührun ebene; in der Umgebung eines hyperbolischen Punkts dage liegt die Fläche zum Theil auf der einen, zum Theil auf andern Seite der Berührungsebene.

Ist $DD'' - D'^2$ grösser als Null, so ist der Punkt el tisch, ist dieselbe Grösse dagegen kleiner als Null, hyperbolisc

Diese Unterscheidung der Punkte in elliptische, parab sche und hyperbolische entspricht der Eintheilung in Kap. § 1, S. 205 für Punkte algebraischer Flächen. *Als Dupin's Indicatrix* (siehe ebenda) *kann man den Kegelschnitt ansel dessen Gleichung*

$$\frac{\xi^2}{r_1} + \frac{\eta^2}{r_2} = 1$$

lautet, der in der Berührungsebene an die Fläche liegt, dessen Coordinatenaxen ξ und η bez. mit den Richtungen Tangenten an die beiden durch diesen Punkt gehenden Krü mungslinien zusammenfallen.

Das Quadrat eines gegen die η-Axe um den Winkel geneigten Halbmessers ϱ dieser Ellipse ist durch

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{\cos^2\theta}{r_2} + \frac{\sin^2\theta}{r_1}$$

gegeben. Vergleicht man diese Formel mit der Euler'sch so ergibt sich $\varrho^2 = R$, d. h.: *Das Quadrat eines Halbmess der Dupin'schen Indicatrix ist dem Krümmungsradius des du den entsprechenden Durchmesser gelegten Normalschnitts gle* Dieses Theorem ist von Dupin, *Développements de Géo* Paris 1813; es lässt sich als eine geometrische Interpretat der Euler'schen Formel ansehen; daher kommt auch der Na *Dupin'sche Indicatrix.*

Zwei conjugirte Durchmesser (siehe S. 86) der Dup schen Indicatrix werden *zwei conjugirte Tangenten* an die Flä

nannt. Ein doppeltes System von Linien auf der Fläche isst *conjugirt,* wenn in jedem Punkt der Fläche die Tangenten die beiden Linien, die durch ihn gehen, conjugirt sind.

Bezeichnet man mit θ, θ' die Winkel zwischen den beiden njugirten Tangenten und der Krümmungslinie v, so besteht e Relation

$$\operatorname{tg}\theta \cdot \operatorname{tg}\theta' = -\frac{r_1}{r_2}.$$

Bei einem conjugirten System muss immer $D' = 0$ *sein,* d, *ist* $D' = 0$, *so ist das Liniensystem* (u, v) *conjugirt.*

Bei der sphärischen Abbildung von Gauss (vergl. § 8) *ibt der Winkel zweier conjugirter Richtungen entweder erhalten 'er er wird in seinen Supplementwinkel verwandelt, je nachdem r Punkt der Fläche hyperbolisch oder elliptisch ist.*

Der folgende Satz kann auch als eine neue Definition congirter Tangenten gelten.

Zwei Tangenten an eine Fläche in einem Punkt P sind njugirt, wenn sich durch P auf der Fläche eine Berührungsie an eine von ihnen so ziehen lässt, dass die der Fläche längs eser Linie umschriebene Developpable zur Erzeugenden die ndere Tangente hat.

Das System der Krümmungslinien ist das einzige, welches 'eichzeitig orthogonal und conjugirt ist.

Die Asymptotenlinien (Inflexions- oder Haupttangentencurven) nd solche auf der Fläche gezogenen Linien, deren Osculaonsebene in jedem Punkt mit der Berührungsebene an die läche zusammenfällt.

Die Asymptotenlinien bilden ein doppeltes System; durch jeden unkt der Fläche gehen zwei von ihnen, die im Allgemeinen nicht nkrecht aufeinander stehen. In jedem Punkt einer Asymptotenurve fällt die Tangente mit der zu ihr conjugirten zusammen.

Die Tangenten an die beiden Asymptotencurven fallen in dem Punkt mit den Asymptoten der Dupin'schen Indicatrix usammen.

Jede Asymptotencurve muss der Relation genügen:

$$D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2 = 0.$$

Wenn man, wie gewöhnlich, mit p, q; r, s, t die der Gleihung der Fläche entnommenen ersten und zweiten Derivirten

von z nach x und y bezeichnet, *so lautet die Differentialgleichu der Asymptotenlinien*

$$r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 = 0.$$

Die Asymptotenlinien sind nur in den hyperbolischen Pur ten der Fläche reell, in den elliptischen sind sie imaginär.

Auf einer abwickelbaren Fläche fallen die beiden Syste asymptotischer Linien (mit den Erzeugenden der Fläche) z sammen.

In jedem Punkt einer Asymptotenlinie ist das Quadrat d zweiten Krümmung (Torsion) entgegengesetzt gleich der total Krümmung der Fläche (siehe § 10) *in demselben Punkt:*

$$\frac{1}{T^2} = -\frac{1}{r_1 r_2}, \quad \textit{Theorem von Enneper.}$$

Daher auch:

In jedem Punkt der Fläche haben die beiden Asymptot linien, die durch ihn gehen, dem absoluten Werth nach glei 2te Krümmung.

Bei projectiven Transformationen bleiben die conjugirt Systeme und die Asymptotenlinien und bei Transformationen du reciproke Radienvectoren die Krümmungslinien erhalten. Darbou

Bei der sphärischen Abbildung von Gauss werden d Richtungen der Asymptotenlinien um einen rechten Winkel gedr

Wir wollen annehmen, auf der Bildkugel seien u', die Linien, welche die Bilder der *Asymptoten*linien auf ei Fläche sind, und wollen mit $\left\{\begin{smallmatrix}1\,2\\1\end{smallmatrix}\right\}'$, $\left\{\begin{smallmatrix}1\,2\\2\end{smallmatrix}\right\}'$ *die Christoffel'sch Symbole* (vergl. § 8) in Bezug auf das Linienelement der Ku bezeichnen; *man erhält dann die einfache Relation*

$$\frac{\partial}{\partial u'}\left\{\begin{smallmatrix}1\,2\\1\end{smallmatrix}\right\}' = \frac{\partial}{\partial v'}\left\{\begin{smallmatrix}1\,2\\2\end{smallmatrix}\right\}'.$$

Wenn eine Fläche auf das System ihrer Asymptotenlin bezogen wird, so nimmt das Quadrat des Linienelements die Fo

$$\varrho^2(e\,du^2 - 2f\,du\,dv + g\,dv^2)$$

an, worin $\varrho^2 = -r_1 r_2$ ist, und e, f, g die Coefficienten d dritten Fundamentaldifferentialform bedeuten (vergl. § 8).

Bei einer Regelfläche (vergl. Kap. 13, § 6) *sind d Asymptotenlinien eines Systems die Erzeugenden selbst.*

Das anharmonische Verhältniss der vier Punkte, in welch eine veränderliche Erzeugende einer Regelfläche vier feste Asyn

enlinien des anderen Systems schneidet, ist constant. Theorem n Paul Serret, Théorie des courbes, 1860.

Wenn man von einer Linie L, die auf einer Fläche durch n Punkt P gezogen ist, die orthogonale Projection auf die erührungsebene in P herstellt, so wird die Krümmung dieser ojection in P *die geodätische oder Tangential- oder Abwickelungskrümmung* der auf der Fläche gezogenen Linie *in dem nkt* P genannt und der Krümmungsmittelpunkt der Projection n L auf die Berührungsebene heisst *der geodätische Krümungsmittelpunkt der Linie* L *in* P.

Die geodätische Krümmung einer auf einer Fläche gezogenen inie L *ist der gewöhnlichen Krümmung der ebenen Linie eich, in welche* L *sich verwandelt, wenn die der Fläche längs r Linie* L *umschriebene Developpable auf eine Ebene abgewickelt ird.* Daher kommt der Name *Abwickelungskrümmung.*

Wenn ein beliebiges System u, v von Parameterlinien id eine beliebige Linie, deren Gleichung $\varphi(u, v) = 0$ lautet, if der Fläche gegeben sind, so ist die geodätische Krümmung dieser Linie φ in einem Punkt:

$$\frac{1}{\varrho_\varphi} = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \times$$

$$\times \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{F\frac{\partial \varphi}{\partial v} - G\frac{\partial \varphi}{\partial u}}{\sqrt{E\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} + G\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2}} \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{F\frac{\partial \varphi}{\partial u} - E\frac{\partial \varphi}{\partial v}}{\sqrt{E\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} + G\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2}} \right] \right\}.$$

Man pflegt diese Formel *die Bonnet'sche* zu nennen.

Der Radius der geodätischen Krümmung eines Parallelkreises er Rotationsfläche ist demjenigen Theil der Tangente an den Meridian gleich, welcher zwischen dem Berührungspunkt und der Rotationsaxe liegt.

Die auf einer Fläche gezogene Linie, welche die kürzeste Verbindung zweier beliebiger, hinreichend naher Punkte der Fläche ist, heisst *geodätische Linie der Fläche.*

Die Hauptnormale in jedem Punkt einer geodätischen Lin fällt mit der Flächennormalen zusammen. Auch diese Eige schaft kann als Definition der geodätischen Linien angeseh werden.

Geodätische Linien sind diejenigen, für welche die geodätisc Krümmung in jedem Punkt Null ist.

Eine geodätische Linie ist im Allgemeinen individualisi wenn zwei ihrer Punkte bestimmt sind, mithin auch, wenn e Punkt, durch den sie gehen soll, und die Richtung ihrer Ta gente in diesem Punkt gegeben sind.

Die geodätische (oder tangentiale) Krümmung einer Linie in einem Punkt lässt sich auch auf die folgende Art definir (sie führt von dieser Definition ihren Namen):

Man betrachte zwei unendlich nahe Punkte P, P′ auf d Curve L und die geodätischen Tangenten in P, P′; die Grenze d Verhältnisses des Winkels, den diese Tangenten miteinander bilde zu dem Bogen PP′ von L, wenn P′ sich unbegrenzt P nähe ist die geodätische Krümmung der Linie L in P. Auf die Weise ist die Definition der geodätischen Krümmung die natü liche Erweiterung der Definition der Krümmung ebener Linie

Man hat Beltrami, *Giorn. di Batt.*, 2 ein Theorem verdanken, *mit dessen Hülfe sich der geodätische Krümmung mittelpunkt einer Linie in einem Punkt bestimmen lässt:*

Man zeichnet auf der Fläche ein System von ∞^1 geod tischen Linien g und eine Linie l auf, deren Tangenten mit d g conjugirt sind; die Tangenten an die g in den Punkten d Linie l erzeugen eine Developpable mit einer Rückkehrkante Jedem Punkt von l entspricht so ein Punkt von s, indem m einem Punkt P von l den Punkt M zuordnet, in welchem d durch P gehende Erzeugende der Developpablen die Rückkeh kante berührt.

Der Punkt M ist der geodätische Krümmungsmittelpun in P der Linie, welche durch P geht und auf der geodätisch ebenfalls durch P gehenden Linie senkrecht steht.

Die Differentialgleichung der geodätischen Linie lau (Gauss):

$$\sqrt{EG-F^2}\,d\theta = \frac{1}{2}\frac{F}{E}\left\{\frac{\partial E}{\partial u}\,du + \frac{\partial E}{\partial v}\,dv\right\} + \\ + \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}\,du - \frac{\partial F}{\partial u}\,du - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}\,dv,$$

rin θ den Winkel bezeichnet, den die geodätische Linie mit n Linien $u =$ Const. bildet, also

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{E}}\left(E\frac{du}{ds} + F\frac{dv}{ds}\right),$$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{E}}\frac{dv}{ds} \quad \textit{ist.}$$

Wenn die Linien u, v senkrecht aufeinander stehen, so wird

$$d\theta = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}du - \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}dv.$$

In dem Fall, in welchem das System der Linien u, v thogonal isotherm ist, lautet die Differentialgleichung der geodä-chen Linien:

$$\sqrt{E}d\theta = \frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}du - \frac{\partial\sqrt{E}}{\partial u}dv.$$

Für eine Fläche vom Liouville'schen Typus (vergl. § 8), *ren Linienelement sich also auf die Form*

$$[\alpha(u) + \beta(v)](du^2 + dv^2)$$

educiren lässt, ist die Gleichung der geodätischen Linien

$$\int\frac{du}{\sqrt{\alpha(u) - a}} \mp \int\frac{dv}{\sqrt{\beta(v) + a}} = b,$$

orin a und b zwei Integrationsconstante bedeuten. Wie man eht, kann in diesem Fall die Gleichung der geodätischen inien unmittelbar integrirt werden.

Bei den Developpablen lässt sich die Differentialgleichung r geodätischen Linien mittelst zweier Quadraturen integriren.

In jedem Punkt einer auf einer Rotationsfläche) gezogenen odätischen Linie ist das Product aus dem Radius des betreffen-n Parallelkreises mit dem Sinus des Neigungswinkels der geo-ätischen Linie gegen den betreffenden Meridian constant. Theorem m Clairaut.*

Wenn eine Krümmungslinie geodätisch ist, so muss sie en sein, und jede ebene geodätische Linie ist eine Krümmungs-nie.

---

*) Die Rotationsflächen sind, wie schon in § 8 gesagt wurde, lächen vom Liouville'schen Typus.

Die auf den geodätischen Linien durch zwei zu ihnen orth gonale Trajectorien abgeschnittenen Bogen sind von gleicher Län Die orthogonalen Trajectorien einer einfach unendlichen Sch von geodätischen Linien heissen daher *geodätische Parallelen.*

Geodätischer Abstand zweier Punkte heisst die Länge d durch sie gehenden geodätischen Bogens.

Eine auf der Fläche gezogene Linie, deren Punkte d selben geodätischen Abstand von einem festen Punkt der Flä haben, heisst *ein geodätischer Kreis.*

Eine Linie, deren Punkte solche geodätische Abstände v zwei festen Punkten haben, dass entweder ihre Summen o ihre Unterschiede constant sind, heisst *eine geodätische Elli* bez. *Hyperbel.*

Geodätisches Dreieck wird das von drei geodätischen Curv bogen gebildete Dreieck genannt.

Nennt man mit Gauss *totale Krümmung eines du geschlossene Curven begrenzten Theils der Fläche* den Werth über diesen Theil der Fläche erstreckten Doppelintegrals

$$\iint K\, d\sigma,$$

worin K das sogenannte *Krümmungsmass der Fläche* in jed Punkt (vergl. § 10) bezeichnet und $d\sigma$ das Flächenelement so erhält man das Theorem (von Gauss):

Die totale Krümmung eines geodätischen Dreiecks ist d Ueberschuss der Summe seiner drei Winkel über zwei Re gleich. Daher für $K =$ Const.:

Auf einer Fläche von constanter Krümmung ist der Flächi inhalt eines jeden geodätischen Dreiecks dem Ueberschuss Summe seiner drei Winkel über zwei Rechte proportional. Si das analoge Theorem von Albert Girard für die sphärisc Dreiecke weiter oben S. 62.

Dieser Satz wurde von Schering, *Gött. Nachr.*, 18 verallgemeinert.

Ueber die Geometrie der geodätischen Dreiecke vergl. Ch stoffel, *Berl. Abh.*, 1868; Weingarten, *Berl. Ber.*, 18 v. Mangoldt, *Crelle*, 94.

Geodätische Torsion (zweite Krümmung) einer auf Fläche gezogenen Linie L in einem Punkt wird nach Bon die Torsion der geodätischen, die Curve L in diesem Punkt rührenden Linie genannt.

Die geodätische Torsion einer Linie fällt mit der gewi lichen Torsion für alle Linien und nur für die Linien zus

n, deren Hauptnormale unter constantem Winkel gegen die läche geneigt ist, speciell für die geodätischen und Asymptotenien.

Nennt man $\frac{1}{T_u}$, $\frac{1}{T_v}$ die geodätischen Torsionen der Parameterlinien u, v, so ist

$$\frac{1}{T_u} = \frac{GD' - FD''}{G\sqrt{EG - F^2}},$$

$$\frac{1}{T_v} = \frac{FD - ED'}{E\sqrt{EG - F^2}}.$$

Die Relation zwischen der geodätischen Torsion $\frac{1}{T_l}$ *und der bsoluten* $\frac{1}{T}$ *einer beliebigen Linie l ist*

$$\frac{1}{T_l} = \frac{1}{T} + \frac{d\omega}{ds},$$

orin ω *den Winkel zwischen der Hauptnormalen der Linie l nd der Normalen zur Fläche bezeichnet und s der Bogen der inie l ist.*

Krümmungslinien sind diejenigen, deren geodätische Torsion i jedem Punkt Null ist.

Wir haben an einem anderen Ort (Kap. 13, § 6) *die trictionslinien einer Regelfläche* definirt; wir fügen jetzt hinzu:

Für jeden Punkt der Strictionslinie einer Regelfläche ist die eodätische Krümmung der zu den Erzeugenden senkrechten Tractorien Null.

Ueber die geodätischen Linien des Ellipsoids gelten die olgenden Theoreme:

Jede von einem Nabelpunkt des Ellipsoids ausgehende geolätische Linie geht durch den diametral gegenüberliegenden Nabelunkt.

Zwei gegenüberliegende Nabelpunkte lassen sich durch unndlich viele geodätische Bogen verbinden, die sämmtlich dieselbe Länge haben (wie bei der Kugel).

Verbindet man einen Punkt M eines Ellipsoids durch geolätische Linien mit zwei sich nicht gegenüberliegenden Nabelunkten, so halbiren die Richtungen der durch M gehenden Krümmungslinien die Winkel der beiden geodätischen Linien.

Für jede auf einem Ellipsoid gezogene geodätische Linie i das Product constant, welches sich ergibt, wenn der Abstand d Mittelpunkts von der Berührungsebene in einem Punkt der ge dätischen Linie mit der Länge des Durchmessers multiplicirt wir welcher der in demselben Punkt an die geodätische Linie gelegte Tangente parallel ist.

Mit der Untersuchung der Krümmungslinien hat Mong den Anfang gemacht, l. c., siehe oben § 8; Dupin, *Dévelop de géom.*, Paris 1813, verdankt man die Forschungen über d *Asymptotenlinien* und die *conjugirten Richtungen*, wie auch d Einführung der *Indicatrix*, die seinen Namen trägt.

Ueber die Krümmungslinien folgten dann zahlreiche Arbe ten, die von verschiedenem Standpunkt ausgehen: Briosch *Ann. di scienze mat. e fis. di Tortolini*, 4, 1853; Ribaucou *Compt. Rend.*, 1872; Darboux, ib., 1877, 1881; etc.

Von den durch einen Nabelpunkt gehenden Krümmung linien handelten Cayley, *Phil. Mag.*, 1863; *Quart. Journ.*, 1 1870; Frost, ib., 10; Hoppe, *Archiv für Math.*, 70, 188 Zahlreich waren die Studien über die Flächen mit ebenen od sphärischen Krümmungslinien: von Serret, *Crelle*, 18; Bonne *Journ. de l'Éc. pol.*, 33, 1853; Dini, *Ann. di mat.*, (2), 1; *Me Soc. italiana dei XL*, 3, 1869, etc.; Enneper, *Crelle*, 94 un von vielen Anderen.

Mit den geodätischen Linien befasste sich Gauss; Legendr nannte sie *des lignes minimes*; den Namen *geodätische Lini* bekamen sie von Liouville. Die ältesten Arbeiten über die Linien sind ausser von Gauss von Steiner, *Berl. Ber.*, 183 Jacobi, *Crelle*, 19, der die geodätischen Linien auf dem Ellip soid untersuchte; Minding, *Crelle*, 20; Liouville (siehe d *Appl. de l'Analyse à la Géom.* von Monge, Paris 1850, vo Liouville besorgte Ausg.); Brioschi, *Ann. di scienze mat. e fi di Tort.*, 4; Beltrami, *Rend. Ist. Lomb.* 1868; etc. Neuere Arbe ten sind von Weingarten, *Berl. Ber.*, 1882; Brill, *Münch. Abh* 1883; Ricci, *Atti Ist. Veneto*, 1893, 1894. Ueber die Geschich der geodätischen Linien siehe Stäckel, *Leipz. Ber.*, 1893. D geodätischen Linien auf dem Ellipsoid werden auch in Bd. Kap. 6 der *Fonct. ellipt.*, Paris 1888 von Halphen b handelt.

§ 10. Krümmungen der Flächen. Aufeinander abwickelbare Flächen.

Die Ausdrücke

$$K = \frac{1}{r_1 r_2},$$

$$H = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$$

eissen *die totale Krümmung (curvatura integra) von Gauss* bez. *ie mittlere Krümmung* der Fläche in dem betrachteten Punkt.

Es gelten die Formeln

$$K = \frac{DD'' - D'^2}{EG - F^2},$$

$$H = \frac{2FD' - ED'' - GD}{EG - F^2}.$$

Ein anderes Krümmungsmass für Flächen wurde von Casorati, *Acta math.*, 14 (siehe auch Catalan, ib., 15) eingeführt und wird durch

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2}\right) \quad \text{dargestellt.}$$

Das Krümmungsmass K lässt sich durch eine Formel ausdrücken, in welche nur die Coefficienten der ersten Differentialform eingehen:

$$K = \frac{1}{2(EG - F^2)} \times$$

$$\times \left\{ \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{F}{E\sqrt{EG - F^2}} \frac{\partial E}{\partial v} - \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \frac{\partial G}{\partial u} \right] + \right.$$

$$+ \frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{2}{\sqrt{EG - F^2}} \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \frac{\partial E}{\partial v} - \right.$$

$$\left. \left. - \frac{F}{E\sqrt{EG - F^2}} \frac{\partial E}{\partial u} \right] \right\} \text{(Gauss).}$$

Wenn die Gleichung der Fläche in der Form

$$z = f(x, y)$$

gegeben ist und

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = s, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t$$

gesetzt wird, so erhält man die Formeln:

$$K = \frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2},$$

$$H = \frac{2pqs - (1 + p^2)t - (1 + q^2)r}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Das Krümmungsmass K ist positiv in den elliptischen, negat in den hyperbolischen, Null in den parabolischen Punkten.

Für eine Regelfläche ist K immer entweder negativ od Null.

Wenn das Krümmungsmass längs einer Erzeugenden nic Null ist, so ist es seinem absoluten Werth nach im Centralpun (siehe Kap. 13, § 6) *am grössten und nimmt ab, je weiter ma sich auf der Erzeugenden von diesem Punkt entfernt.*

Eine Fläche, deren Krümmung K in allen Punkten Nu ist, muss eine Developpable sein und umgekehrt.

Die Krümmung K von Gauss lässt sich durch die geod tischen Krümmungen $\frac{1}{\varrho_u}$, $\frac{1}{\varrho_v}$ *der beiden Parameterlinien m Hülfe der Liouville'schen Formel, Journ. de Liouv., 16, au drücken:*

$$K = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left\{ \frac{\partial^2 \Omega}{\partial u \, \partial v} + \frac{\partial}{\partial u} \frac{\sqrt{G}}{\varrho_u} + \frac{\partial}{\partial v} \frac{\sqrt{E}}{\varrho_v} \right\},$$

worin Ω den Winkel zwischen den beiden Parameterlinien b zeichnet.

Die totale Krümmung einer Fläche lässt sich auch definire als *der reciproke Werth der Grenze des Verhältnisses des w endlich kleinen Flächenelements zu dem diesem Element bei d sphärischen Abbildung entsprechenden sphärischen Element.*

Wenn sich zwischen den Punkten zweier Flächen ein solche Correspondenz feststellen lässt, dass die einander ent sprechenden Linienelemente gleich werden, so heissen die beide Flächen *aufeinander abwickelbar.*

Wenn zwei Flächen aufeinander abwickelbar sind, so kan man eine von ihnen (oder einen Theil einer von ihnen) durc Biegung allein ohne Faltung und ohne Dehnung auf die ander ausbreiten.

Die totale Krümmung einer Fläche in jedem Punkt ände sich nicht, wenn die Fläche beliebig verbogen wird; oder, wa

sselbe ist, *zwei aufeinander abwickelbare Flächen haben in n entsprechenden Punkten gleiche totale Krümmungen.* Man egt daher zu sagen, die Krümmung K sei eine *Biegungs-ariante.*

Durch Biegung der Fläche ändert sich die geodätische rümmung einer beliebigen auf der Fläche gezogenen Linie cht; speciell werden daher die geodätischen Linien der Fläche die geodätischen Linien der transformirten Fläche verwandelt.

Die Gleichheit der totalen Krümmung der beiden Flächen jedem Paar sich entsprechender Punkte *reicht nicht hin, damit e beiden Flächen aufeinander abwickelbar seien;* sie reicht er dann hin, wenn in jedem Punkt der beiden Flächen die rümmung constant ist; d. h.:

Zwei Flächen mit derselben constanten totalen Krümmung nd immer auf unendlich viele Arten aufeinander abwickelbar. araus folgt:

Eine developpable Fläche (deren Krümmung also Null ist) sst sich immer auf die Ebene und eine Fläche mit constanter sitiver Krümmung stets auf eine Kugel abwickeln.

Jede Fläche mit constanter Krümmung lässt ∞^3 Verbie-ngen in sich zu.

Jede Fläche, die ∞^1 stetige Verbiegungen in sich zulässt, nn auf eine Rotationsfläche abgewickelt werden.

Helicoide heissen Flächen, die durch eine ebene oder ge-undene Linie erzeugt werden, wenn diese um eine Axe rotirt, e ihrerseits gleichzeitig in sich selbst derart fortgleitet, dass is Verhältniss der beiden Geschwindigkeiten, der Rotations-nd Translationsgeschwindigkeit, constant bleibt.

Jedes Helicoid lässt sich immer auf eine Rotationsfläche wickeln; die Schraubenlinien (Helixe) breiten sich dabei auf e Parallelkreise aus. Theorem von Bour.

Wenn man auf einer biegsamen Fläche eine Curve festhält, kann die Fläche nur dann deformirt werden, wenn diese urve eine asymptotische Linie ist.

Es ist möglich, eine Fläche auf zwei verschiedene Arten so deformiren, dass eine ihrer Curven C eine willkürliche Form annimmt, wenn nur die erste Krümmung von Γ in jedem unkt grösser als die geodätische Krümmung von C in dem ent-rechenden Punkt ist.

Eine Fläche lässt sich auf unendlich viele Arten so ver-egen, dass eine beliebige auf ihr gezogene Linie Krümmungs-ie der deformirten Fläche wird.

Es ist unmöglich, eine Fläche F derart zu deformiren, d die asymptotischen Linien auch asymptotisch auf der deformir Fläche bleiben, es sei denn, dass F eine Regelfläche ist und in Betracht kommenden Asymptotenlinien nicht ihre geradlini Erzeugenden sind. Vergl. § 9.

Wenn zwei Regelflächen, welche nicht durch Deformat derselben Fläche 2ten Grads entstanden sind, sich aufeinan abwickeln lassen, so müssen sich die Erzeugenden der einen der Deformation auf die der anderen legen. Theorem Bonnet.

Leitungskegel einer Regelfläche wird der Kegel genannt, welc durch die von einem Punkt aus parallel zu den Erzeugend der Fläche gezogenen Geraden gebildet wird.

Jede Regelfläche lässt sich immer so deformiren, dass Leitungskegel eine beliebige Form annimmt.

Eine Regelfläche kann immer so verbogen werden, dass e beliebig auf ihr gezogene Linie Asymptotenlinie wird.

Bei der Deformation der Regelfläche lässt es sich immer einrichten, dass eine ihrer geodätischen Linien sich in eine Ger verwandelt.

Es ist auf ∞^1 Arten möglich, eine Regelfläche derart deformiren, dass eine beliebige auf ihr gelegene Curve eine eb Linie wird.

Die einzigen Regelflächen, die auf Rotationsflächen abgewic werden können, sind die Deformirten des Regelhelicoids Minimalflächeninhalt)* (siehe weiter unten) *und des Rotati hyperboloids.*

Mit der Krümmung der Flächen hatten sich schon Eu und Meusnier beschäftigt; die Lösung des Problems gel aber erst Gauss in § 8 der citirten *Disquisitiones* etc. Ga ist auch die Entdeckung zu verdanken, dass sich die Krümm K bei dem Verbiegen der Flächen nicht ändert. Zu den er wichtigen Arbeiten über die Applicabilität der Flächen gehö Minding, *Crelle*, 19; Bour, *Ann. de l'Éc. pol.*, 59, 18 Bonnet, ib., 61, 62; Codazzi, *Mém. prés. par divers sav à l'Ac. de Paris*, 27; etc.

---

*) Dieses Helicoid kann durch eine Gerade erzeugt wer welche gleichförmig um eine zu ihr senkrechte Axe rotirt, wäh diese Axe gleichförmig in sich selbst fortgleitet.

Andere Arbeiten sind von Weingarten, *Crelle,* 59, 100; ibaucour, *Compt. Rend.,* 70; Dini, *Giorn. di Batt.,* 2; etc.

Einer der ersten Versuche über die Biegung der Regelflächen von Minding, *Crelle,* 18; grundlegend ist der Aufsatz von eltrami, *Ann. di mat.,* (1), 7, 1865.

Modernere, auf einer neuen Methode beruhende Forschungen n Weingarten über die Applicabilität der Flächen sind in n *Compt. Rend.,* 112, p. 607, 706 und *Acta math.,* 20 entlten; eine Darlegung dieser neuen Methode Weingarten's idet man bei Darboux, *Théorie des surfaces,* Paris 1887—896, 4, p. 308.

§ 11. Flächen von constanter totaler Krümmung. Pseudosphärische Flächen.

Eine Fläche mit constanter negativer Krümmung $K = -\frac{1}{R^2}$ legt man *eine pseudosphärische Fläche vom Radius R* zu nnen. *Oricyclus* heisst eine auf einer pseudosphärischen Fläche zogene Curve, deren geodätische Krümmung constant und eich $\frac{1}{R}$ ist.

Das Linienelement einer jeden Fläche von constanter positer Krümmung $K = \frac{1}{R^2}$ *lässt sich auf die Form*

$$ds^2 = du^2 + \cos^2 \frac{u}{R}\, dv^2$$

duciren.

Das Linienelement einer jeden Fläche von constanter negativer rümmung $K = -\frac{1}{R^2}$ lässt sich auf eine der folgenden drei ormen zurückführen:

$$ds^2 = du^2 + \cosh^2 \frac{u}{R}\, dv^2, \qquad \text{(der hyperbolische Typus)},$$

$$ds^2 = du^2 + e^{\frac{2u}{R}}\, dv^2, \qquad \text{(parabolischer Typus)},$$

$$ds^2 = du^2 + R^2 \sinh^2 \frac{u}{R}\, dv^2, \qquad \text{(elliptischer Typus)}.$$

Bei der ersten Form sind die auf einer bestimmten geoätischen Linie L senkrecht stehenden geodätischen Linien

($v =$ Const.) und ihre orthogonalen Trajectorien ($u =$ Const die krummlinigen Coordinaten *).

Bei der zweiten Form sind die Linien $v =$ Const. die ge dätischen auf einer Linie L (Oricyclus) von constanter geod tischer Krümmung $\frac{1}{R}$ senkrecht stehenden Linien und ihre orth gonalen Trajectorien die Linien $u =$ Const.

Für die dritte Form endlich sind die Linien $v =$ Con die von einem Punkt ausgehenden geodätischen Linien u ihre orthogonalen Trajectorien die Linien $u =$ Const.

Dem Linienelement einer jeden auf ihre Krümmungslini bezogenen Fläche von constanter positiver Krümmung gleich kann man die Form geben:

$$ds^2 = \sinh^2 \omega \, du^2 + \cosh^2 \omega \, dv^2,$$

worin ω der Relation

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2} = - \sinh \omega \cosh \omega$$

genügen muss.

Das Linienelement einer jeden auf ihre Krümmungslin bezogenen pseudosphärischen Fläche lässt sich in die Form

$$ds^2 = \cos^2 \omega \, du^2 + \sin^2 \omega \, dv^2$$

bringen, worin ω durch

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2} = \sin \omega \cos \omega$$

gegeben ist.

Auf einer Fläche von constanter Krümmung existirt imm ein Coordinatensystem von der Beschaffenheit, dass die geod schen Linien sich durch lineare Gleichungen zwischen den Co dinaten ausdrücken lassen und umgekehrt hat eine Fläche c stante Krümmung, wenn die geodätischen Linien auf ihr s durch lineare Gleichungen darstellen. Theorem von B trami. Dieses Theorem lässt sich auf die mehrdimensiona Räume ausdehnen. Vergl. Kap. 20, § 3.

Wir wollen nun *die pseudosphärischen Rotationsflächen* trachten. Ihr auf die Meridiane und Parallelkreise bezoge Linienelement ergibt sich aus:

---

*) Ein ähnliches Coordinatensystem wird auch zu Grund gel um das Linienelement der Flächen mit constanter *positiver* Kr mung auf die weiter oben angegebene Form zu reduciren.

$$ds^2 = du^2 + \left\{ c e^{\frac{u}{R}} + c' e^{-\frac{u}{R}} \right\}^2 dv^2.$$

Je nachdem die Constanten c, c' dasselbe oder verschiedene orzeichen haben, oder eine von ihnen Null ist, *erhält man drei ypen von pseudosphärischen Rotationsflächen.* Diese drei Typen erden nach dem Typus der Form benannt, welche das auf e Meridiane und Parallelkreise als Coordinaten bezogene Linienement annimmt.

1. *Der hyperbolische Typus. Die Constanten c, c' iben dasselbe Vorzeichen; das auf die Meridiane und Parallelreise bezogene Linienelement ist durch*

$$ds^2 = du^2 + \lambda^2 \cosh^2 \frac{u}{R}\, dv^2 \quad \textit{gegeben.}$$

Diese Fläche wird durch die Curve

$$x = \lambda \cosh \frac{u}{R}, \quad y = \int \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{R^2} \sinh^2 \frac{u}{R}}\, du$$

ei ihrer Rotation um die y-Axe erzeugt.

2. *Der parabolische Typus. Eine der Constanten c, c' t Null. Das auf die Meridiane und Parallelkreise bezogene inienelement ergibt sich aus:*

$$ds^2 = du^2 + e^{\frac{2u}{R}} dv^2.$$

Die Fläche entsteht durch Rotation der Curve (der Tractrix)

$$x = e^{\frac{u}{R}}, \quad y = \int \sqrt{1 - \frac{1}{R^2} e^{\frac{2u}{R}}}\, du$$

m die y-Axe.

Diese Tractrix besitzt die Eigenschaft, dass der Theil ihrer angente, der zwischen dem Berührungspunkt und der y-Axe die eine Asymptote ist) liegt, constant (gleich R) bleibt. Siehe ap. 17, § 14.

Die Fläche von diesem Typus heisst *Pseudosphäre.*

3. *Der elliptische Typus. Die beiden Constanten c, c' aben verschiedene Vorzeichen. Das auf die Meridiane und arallelkreise bezogene Linienelement ist durch*

$$ds^2 = du^2 + \lambda^2 \sinh^2 \frac{u}{R}\, dv^2 \quad \textit{gegeben.}$$

Die Fläche wird durch die Rotation der Curve

$$x = \lambda \sinh \frac{u}{R}, \quad y = \int \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{R^2} \cosh^2 \frac{u}{R}}\, du$$

um die y-Axe erzeugt.

Die Asymptotenlinien einer pseudosphärischen Fläche hab in jedem Punkt constante Torsion. Enneper.

In jedem krummlinigen Vierseit, das von vier Asymptote linien einer pseudosphärischen Fläche begrenzt wird, sind d gegenüberliegenden Winkel einander gleich. Dini.

Von pseudosphärischen Flächen sind bemerkenswerth d Dini'schen, *Compt. Rend.*, 1865 und die Enneper'schen, *Gö Nachr.*, 1868; von den letzteren ist die von Bianchi, *Dis* Pisa 1879; *Math. Ann.*, 16 studirte Fläche ein specieller Fa

Unter den Flächen constanter *positiver* Krümmung ist d ebenfalls von Enneper untersuchte Fläche hervorzuheben, v welcher die Kuen'sche, *Münch. Ber.*, 1884 ein besonder Fall ist.

Alle diese Flächen von constanter negativer oder positiv Krümmung haben die Eigenschaft gemeinschaftlich, dass sie e System ebener Krümmungslinien besitzen.

Die Coordinaten eines Punkts der Enneper'schen Fläch lassen sich durch elliptische Functionen zweier Parameter au drücken; für die übrigen ebenerwähnten Flächen genügen dageg die Kreisfunctionen.

Die pseudosphärische Fläche von Dini wird durch ei Tractrix erzeugt, die sich schraubenförmig um ihre Asymptote l wegt; siehe oben. *Sie ist daher ein Helicoid.*

Das eine System ihrer Krümmungslinien wird durch d Meridiane (die Tractrix) gebildet; das andere besteht aus Curv die auf Kugeln beschrieben sind, deren Centrum auf der A liegt; diese Kugeln schneiden das Helicoid rechtwinklig.

Gegeben sei eine pseudosphärische Fläche vom Radius R betrachtet man auf ihr ein System geodätischer Parallelen u schneidet auf jeder Tangente an diese geodätischen Linien vo Berührungspunkt aus ein Segment von der Länge = R ab, ist der Ort der Endpunkte aller dieser Segmente eine neue pse dosphärische Fläche mit demselben Radius. Die gegebene u die neue Fläche bilden die beiden Schalen der Evolute ein Fläche, deren Normalen die eben beschriebenen Tangenten sin Bianchi

Mit Hülfe dieses Theorems lassen sich aus einer pseudo-ıärischen Fläche unendlich viele andere ableiten; die in dem tz enthaltene Transformation pflegt man *complementär* zu nnen (Bianchi); sie ist der specielle Fall einer allgemei-ren, die Baecklund*'sche Transformation* genannt wird, *Lunds iv. Årsskrift,* 19, 1883; *Math. Ann.,* 9, 19.

Wenn man die vorstehend besprochene Transformation auf ıe Pseudosphäre (die von einer Tractrix erzeugte Rotations-che) anwendet, so ergibt sich die von Bianchi untersuchte äche; diese ist, wie schon gesagt wurde, der specielle Fall derer von Enneper untersuchter Flächen, *welche dadurch aus-zeichnet sind, dass sie, wie das Dini'sche Helicoid, ein System ener Krümmungslinien besitzen.*

Die Coordinaten eines Punkts der in Rede stehenden Fläche ssen sich als Funktionen zweier Parameter u, v mittelst der rmeln

$$x = 2R\,\frac{\sin u}{1 + v^2 \sin^2 u}\,(\cos v + v \sin v),$$

$$y = 2R\,\frac{\sin u}{1 + v^2 \sin^2 u}\,(\sin v + v \cos v),$$

$$z = R\left\{\log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} u + \frac{2 \cos u}{1 + v^2 \sin^2 u}\right\} \quad \textit{ausdrücken.}$$

Die Fläche hat eine Doppelcurve.

Gipsmodelle dieser Fläche, wie auch des Dini'schen Heli-ids befinden sich in der von L. Brill in Darmstadt heraus-gebenen Sammlung, die jetzt, wie schon oben erwähnt wurde, den Besitz der Firma Schilling in Halle übergegangen ist. us dieser Sammlung kann man auch Modelle der eben be-rochenen Enneper'schen und Kuen'schen Flächen mit con-anter positiver Krümmung beziehen.

Wie man eine sphärische Trigonometrie hat, so lässt sich ıch eine *pseudosphärische* aufstellen, indem man *geodätische ogen* an Stelle der *grössten Kreise* betrachtet.

Im Allgemeinen lässt sich sagen:

Die trigonometrischen Formeln in Bezug auf ein pseudo-härisches geodätisches Dreieck werden aus den Formeln der wöhnlichen sphärischen Trigonometrie auf die Art abgeleitet, ss man den Radius R der Kugel mit $R\sqrt{-1}$ *vertauscht.* iese Bemerkung machte zuerst Minding, *Crelle,* 19, 20.

Ferner:

Die Theoreme der Lobatschewsky'schen, nicht-euklidisch Geometrie (vergl. Kap. 21, § 2) *finden thatsächlich ihre Int pretation auf den pseudosphärischen Flächen.* Siehe darüber Be trami, *Saggio di interpretazione della geometria non-euclid Giorn. di Batt.,* 6, 1868. Vergl. auch die Darstellung in Klein autographirten Vorlesungen über nicht-euklidische Geometrie.

Ueber die Flächen mit constanter Krümmung geben v ausser den schon citirten Arbeiten noch an: Beltrami, *A di mat.,* (1), 7; Dini, *Giorn. di Batt.,* 3; Bianchi, *Ma Ann.,* 16; *Giorn. di Batt.,* 20; *Rend. Acc. Lincei,* 1892, 189 Lie, *Archiv for Math.,* Kristiania 1879—81; Hazzidak *Crelle,* 88; Weingarten, ib., 94, 95; Darboux, *Compt. Re* 1883; *Ann. de l'Éc. norm.,* 1890; Guichard, ib., id.; Eine erst kürzlich erschienene Arbeit über die Theorie Flächen mit constanter Krümmung, die von der neuen Wei garten'schen Methode der Applicabilitätstheorie (siehe das Ci in § 10) ausgeht, ist von Bianchi, *Ann. di mat.,* (3), 2.

Ueber die *Transformationen* der Flächen von constan *positiver* Krümmung sehe man ausser dem Aufsatz von Haz dakis l. c. auch die neueren Forschungen von Bianchi, *Re Lincei,* 1899 nach.

§ 12. Flächen von constanter mittlerer Krümmung. Minimalflächen.

Die beiden einer Fläche S von constanter positiver Kri mung $K = \frac{1}{R^2}$ *parallelen Flächen, die von S um die Grös* $\pm R$ *abstehen, sind von constanter mittlerer Krümmung* $H = \pm$ Bonnet.

Umgekehrt gibt es zu jeder Fläche von constanter mittl Krümmung $\pm \frac{1}{R}$ *eine ihr parallele im Abstand R von ihr liege Fläche von constanter absoluter Krümmung* $\frac{1}{R^2}$.

Betrachtet man die auf derselben Normalen liegen Punkte der drei Flächen als einander zugeordnet, *so ist Abbildung einer der beiden Flächen von constanter mittl Krümmung auf die andere winkeltreu, und die Abbildung e*

eser beiden Flächen auf S derart, dass zweien auf dieser einen läche senkrechten Richtungen jedesmal zwei conjugirte Richtungen f S entsprechen. Siehe Chini, *Giorn. di Batt.*, 27, 1889.

Das Linienelement jeder Fläche von constanter mittlerer rümmung $\pm\frac{1}{R}$ *nimmt, wenn es auf die Krümmungslinien u, v r Fläche bezogen wird, die Gestalt*

$$ds^2 = R^2 e^{\pm 2\theta}(du^2 + dv^2)$$

, worin θ *der Relation*

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = -\sinh\theta\cosh\theta \text{ genügt.}$$

Daher:

Die Krümmungslinien einer jeden Fläche constanter mittrer Krümmung bilden ein isothermes System.

Jede Fläche constanter mittlerer Krümmung lässt sich unter ribehaltung derselben mittleren Krümmung derart deformiren, ss die neuen Krümmungslinien die Trajectorien der früheren nd und einen constanten Winkel mit ihnen bilden. Bonnet.

Die Rotationsflächen von constanter mittlerer Krümmung hält man nach dem Theorem Bonnet's (S. 496) aus der zu ner Rotationsfläche deformirten Kugel vom Radius R, indem an auf den Normalen auf der einen und der anderen Seite ängen gleich R abschneidet.

Man erhält so zwei Typen von Rotationsflächen constanter ittlerer Krümmung, welche *Unduloid* bez. *Nodoid* genannt erden.

Zur Definition der *Meridiancurve* dieser Flächen dient der lgende elegante Satz Delaunay's:

Die Meridiancurven des Unduloids und Nodoids sind Plancrven, welche von dem Brennpunkt einer Ellipse oder einer yperbel beschrieben werden, die auf einer Geraden rollen ohne gleiten. Diese Gerade ist dann die Rotationsaxe.

Lässt man dagegen eine Plancurve, welche von dem Brennnkt einer Parabel beschrieben wird, die auf einer Geraden rollt ne zu gleiten, um diese Gerade rotiren, so hat die so erzeugte otationsfläche eine mittlere Krümmung, die auch constant, aber ull ist. Sie ist mithin, wie aus dem Folgenden hervorgeht, ne Minimalfläche und heisst Catenoid.

Minimalflächen oder *Elassoide* heissen solche Fläche die unter allen durch dieselbe Begrenzung umschlossenen u unendlich wenig von ihnen verschiedenen Flächen den kleinst Flächeninhalt haben.

Bezeichnet man mit p, q, r, s, t die der Gleichung $z = f(x,$ der Fläche entnommenen partiellen Derivirten und setzt

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y},$$
$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

so lautet die partielle Differentialgleichung der Minimalflächen

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = 0$$

oder

$$(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t = 0. \quad \text{(Lagrang}$$

Bei den Minimalflächen sind die Hauptkrümmungsradien jedem Punkt einander gleich und von verschiedenem Vorzeich d. h. also, die mittlere Krümmung H ist Null. Umgeke ist jede Fläche, deren mittlere Krümmung Null ist, e Minimalfläche.

Die sphärische Abbildung einer Minimalfläche ist winl treu. Bonnet.

Die einzige reelle abwickelbare Minimalfläche ist die Eb

Auf jeder Minimalfläche bilden die Asymptotenlinien doppeltes orthogonales System und die Krümmungslinien ein d peltes orthogonales isothermes System.

Die Coordinaten der Punkte einer Minimalfläche lassen s aus den Formeln von Weierstrass

$$x = \text{dem reellen Theil von } \int (1 - \tau^2) F(\tau) d\tau,$$
$$y = \text{„ „ „ „ } \int i(1 + \tau^2) F(\tau) d\tau,$$
$$z = \text{„ „ „ „ } \int 2\tau F(\tau) d\tau \text{ berechnen,}$$

worin $F(\tau)$ eine beliebige Function der complexen Variable bedeutet; jedem F entspricht eine bestimmte Minimalfläche u umgekehrt.

Werden mit τ_1, $F_1(\tau_1)$ die in Bezug auf die Variable bez. $F(\tau)$ conjugirt complexen Variablen bezeichnet, so ergibt s das Linienelement der Minimalfläche aus

$$ds^2 = (1 + \tau\tau_1)^2 F(\tau) F_1(\tau_1) d\tau d\tau_1$$

d der positive Hauptkrümmungsradius ist

$$r_2 = \tfrac{1}{2}(1 + \tau\tau_1)^2 \sqrt{F(\tau)\,F_1(\tau_1)}\,.$$

Den Weierstrass'schen Formeln kann man auch die Ge-lt geben:

= dem reellen Theil von $\{(1-\tau^2)\varphi''(\tau) + 2\tau\varphi'(\tau) - 2\varphi(\tau)\}$,
= „ „ „ „ $\{i(1+\tau^2)\varphi''(\tau) - 2i\tau\varphi'(\tau) - 2i\varphi(\tau)\}$,
= „ „ „ „ $\{2\tau\varphi''(\tau) - 2\varphi'(\tau)\}$,

rin die Function $\varphi(\tau)$ ihrerseits wieder eine willkürliche nction ist.

Alle algebraischen Minimalflächen ergeben sich aus diesen rmeln, wenn man voraussetzt, $\varphi(\tau)$ sei eine algebraische Func-n von τ.

Wenn zwei Minimalflächen aufeinander abwickelbar sind, muss die der einen Fläche entsprechende Function F der t der Exponentialgrösse $e^{i\alpha}$ multiplicirten Funktion F in Bezug f die andere Fläche gleich sein, wobei unter α eine willkürliche lle Constante verstanden wird. Auf diese Art erhält man die gemeinsten Deformationen einer Minimalfläche, bei welchen sie en Charakter als solche beibehält.

Zwei so erhaltene Minimalflächen heissen *associirt.*

Setzt man $\alpha = \frac{\pi}{2}$, so werden die beiden Minimalflächen *Bezug auf die Applicabilität conjugirt genannt.* Bonnet.

Die auf Rotationsflächen abwickelbaren Minimalflächen, die thin auf unendlich viele Arten auf sich selbst abwickelbar sind, ält man aus den Weierstrass'schen Formeln, wenn

$$F(\tau) = C\tau^k$$

etzt wird; darin ist k eine reelle und C eine beliebige Con-nte.

Für $k = -2$ sind die Flächen Helicoide.

Die einzige Minimalregelfläche ist das durch die Gleichung

$$z = m \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$$

rgestellte Helicoid, das *Minimalregelhelicoid* genannt wird. *Theo-n von Meusnier.*

Die Fläche, deren Gleichung

$$\sqrt{x^2 + y^2} = m \cosh \frac{z}{m}$$

lautet, ist eine Minimalfläche, welche Catenoid (alisseide)) heis sie ist die Rotationsfläche, auf welche das Regelhelicoid des vori Theorems sich abwickeln lässt; sie ist die einzige Minimalro tionsfläche.*

Setzt man in den Weierstrass'schen Formeln

$$F(\tau) = 1 - \frac{1}{\tau^4},$$

so ergibt sich eine algebraische Minimalfläche, die *Hennebe sche Minimalfläche* genannt wird; *sie ist eine einseitige Flä* (siehe Kap. 18, § 1) *von der* 5ten *Classe und der* 15ten *Ordnu*

Bezeichnet man mit $F_0(\tau)$ die Function, welche man $F(\tau)$ durch Vertauschung aller Coefficienten mit ihren conju ten erhält und ist $F(\tau)$ eine derartige Function, dass

$$F(\tau) = -\frac{1}{\tau^4} F_0\left(-\frac{1}{\tau}\right)$$

wird, *so sind die so erhaltenen Flächen im Allgemeinen einse*

Wird

$$F(\tau) = 3$$

gesetzt, so erhält man die Fläche, deren Punkte die Coo naten haben:

$$x = 3\alpha + 3\alpha\beta^2 - \alpha^3, \quad (\tau = \alpha + i\beta),$$
$$y = \beta^3 - 3\beta - 3\alpha^2\beta,$$
$$z = 3(\alpha^2 - \beta^2).$$

Diese Minimalfläche heisst *Enneper'sche Fläche. Sie* 9ter *Ordnung; ihre Krümmungslinien sind cubische Plancu vom Geschlecht Null und ihre Asymptotenlinien*

$$\alpha - \beta = \text{Const.}, \quad \alpha + \beta = \text{Const.}$$

sind cubische Raumcurven.

Die Enneper'sche Fläche lässt sich auf eine Rotationsfl abwickeln.

Sie ist die Umhüllende der Ebenen, welche auf den Ver dungsgeraden der Punkte zweier Parabeln, die denselben Br punkt haben, in deren Mittelpunkt senkrecht stehen. Darbo

Alle der Enneper'schen associirten (vergl. S. 499) *Flä haben dieselbe Gestalt, wie die Enneper'sche Fläche.*

Setzt man

---

*) Die Construction der Meridiancurve des Catenoids w weiter oben S. 497 angegeben.

$$F(\tau) = \frac{1}{\sqrt{1 - 14\tau^4 + \tau^8}},$$

ergibt sich die sogenannte *Schwarz'sche Minimalfläche,* die n dem windschiefen aus den beiden Paaren sich gegenüber-gender Kanten eines regelmässigen Tetraeders gebildeten Vier-it begrenzt wird.

Diese Fläche löst für einen speciellen Fall das sogenannte *lateau'sche Problem* auf, das darin besteht, für eine gegebene schlossene Umgrenzung eine von diesem Umfang begrenzte inimalfläche zu construiren, die in ihrem Inneren keine sin-ulären Punkte enthält.

Experimentell löste Plateau das Problem, indem er einen etalldraht von der Form des vorgeschriebenen Umfangs in ne etwas klebrige Flüssigkeit, z. B. in Glycerin, tauchte; die usserst dünne Flüssigkeitsscheibe, die an der Umgrenzung haften eibt, ist nach den Principien der Mechanik genau wie eine inimalfläche geformt.

Von Minimalflächen ist schliesslich noch die sogenannte *herk'sche Translationsfläche* anzuführen, welche sich ergibt, enn man diejenigen Lösungen der Differentialgleichung der linimalflächen aufsucht, welche die Form

$$z = \varphi(x) + \varphi(y)$$

aben.

Ihre Gleichung lautet

$$z = \frac{1}{a}\{\log\cos(ax) - \log\cos(ay)\}, \quad \textit{Crelle,}\ 13,\ 1835.$$

Wenn bei einer Minimalfläche die Krümmungslinien des inen Systems eben sind, so müssen auch die des anderen Systems ben sein.

Jede auf einer Minimalfläche liegende Gerade ist Symmetrie-xe der Fläche.

Wenn eine Ebene die Minimalfläche in jedem ihrer Schnitt-unkte orthogonal schneidet, so ist sie Symmetrieebene für die läche.

Wenn man von einem ganz speciellen von Euler, *Metho-us inveniendi* etc., 1744 behandelten Fall absieht, war La-range, *Misc. Taur.,* 2 der Erste, der die Minimalflächen stu-irte und die Variationsrechnung auf sie anwandte.

Die Differentialgleichung der Minimalflächen wurde dar von Meusnier, Monge, Legendre, Ampère untersucht.

Andere bemerkenswerthe Arbeiten sind von Poisso *Crelle,* 8; Scherk, l. c.; Steiner, *Berl. Ber.,* 1840, der e Theorem über die den Minimalflächen *parallelen* Flächen fan Bonnet, *Compt. Rend.*, 1853; Enneper, *Zeitschr. für Math.*, 1864; Weierstrass, *Berl. Ber.,* 1866; Riemann, *Gött. Abl* 13, 1867; Beltrami, *Mem. Acc. di Bologna*, 1868; H. Schwarz, *Berl. Ber.,* 1872; *Crelle,* 80 und eine grosse Reil weiterer Arbeiten, gesammelte math. Werke, Berlin 1890, Bd. Lie, *Math. Ann.,* 14, 15; etc.

Weitere historische Angaben und eine erschöpfende B handlung des Gegenstands findet man bei Darboux, *Leço sur la théorie des surfaces*, Paris 1889, 1, eine historisch Uebersicht auch in dem citirten Aufsatz von Beltrami.

In der von L. Brill besorgten Sammlung befinden si zahlreiche Gipsmodelle von Minimalflächen.

Mit den Flächen von constanter mittlerer Krümmung b fassten sich speciell Delaunay, *Crelle,* 6; Sturm, ib., i Jellet, ib., 18; Dini, *Ann. di mat.,* (2) 7; etc.

§ 13. Evolutenflächen. Flächen, deren Hauptkrümmung radien durch eine constante Relation verbunden sind

Der Ort der beiden Hauptkrümmungsmittelpunkte für d Punkte einer Fläche, vergl. § 9, heisst *Evolutenfläche* der geg benen und diese selbst *Evolvente.*

Mittlere Evolute wird ferner die Fläche genannt, die v den Ebenen umhüllt wird, welche auf den Normalen zur g gebenen Fläche in den Mittelpunkten des die beiden Krümmung mittelpunkte verbindenden Segments senkrecht stehen. Ribaucou

Jede der beiden Schalen der Evolute lässt sich auch a der Ort der Rückkehrkante derjenigen Developpablen ansehe welche von den Lothen gebildet werden, die längs der Punk einer Krümmungslinie eines jeden der beiden Systeme auf d Fläche errichtet werden.

Diese Rückkehrkanten sind geodätische Linien der Evolut fläche.

Auf der Evolutenfläche bilden die den Krümmungslinien d

gebenen Fläche entsprechenden Linien ein conjugirtes System. ergl. § 9.

Bei einer Fläche, die so beschaffen ist, dass eine constante elation zwischen ihren Hauptkrümmungsradien besteht, ent-rechen sich die Asymptotenlinien auf den beiden Schalen der volute und umgekehrt.

Für solche Flächen) ist das Product der totalen Krüm-ungen in den entsprechenden Punkten der beiden Schalen der volute gleich* $\frac{1}{(r_1 - r_2)^4}$, *worin* r_1, r_2 *die beiden Krümmungs-adien der gegebenen Fläche in jedem Punkt sind.* Halphen.

Speciell: *Bei den Flächen constanter Krümmung K und ur bei ihnen entsprechen die Asymptotenlinien auf den beiden chalen der Evolute nicht nur einander, sondern auch den symptotenlinien der Fläche.*

Auf den beiden Schalen der Evolute von Flächen, für eren Krümmungsradien die Relation $r_1 - r_2 =$ Const. *besteht, nd nur auf ihnen, entsprechen sich die Krümmungslinien.*

Jede Schale der Evolute einer Fläche, deren Krümmungs-adien durch eine Relation verbunden sind, lässt sich auf eine Rotationsfläche abwickeln; und umgekehrt: Mit Ausnahme der auf die Catenoide abwickelbaren) Regelflächen, die der Ort der Hauptnormalen der Curven von constanter Torsion sind, lässt ich jede andere auf eine Rotationsfläche abwickelbare Fläche als ine Schale der Evolute einer Fläche ansehen, zwischen deren Krümmungsradien eine Relation besteht. Theorem von Weingarten.

Jede Schale der Evolute einer pseudosphärischen Fläche ist uf ein Catenoid abwickelbar.

Die Flächen, deren mittlere Evolute sich auf einen Punkt educirt, wurden von Appell, *Amer. Journ.*, 10 studirt und lie Flächen, deren Krümmungsradien der Gleichung

$$r_1 + r_2 = \mu\delta$$

genügen, worin μ eine Constante bezeichnet und δ der Abstand les Coordinatenanfangs von der Berührungsebene ist, wurden von Goursat untersucht, *Amer. Journ.*, 10.

Die mittlere Evolute einer Goursat'schen Fläche ist wieder eine Goursat'sche Fläche.

---

*) Manche Autoren nennen sie die Flächen *W*. Siehe S. 504.

Mit den Flächen, deren Hauptkrümmungsradien an ei constante Relation gebunden sind, beschäftigten sich Weinga ten, *Crelle,* 62, 103, nach welchem sie von einigen Autoren d Flächen W genannt wurden (vergl. S. 503, Anm.), dann Be trami, *Ann. di mat.,* (1), 7; Dini, ib., id.; Halphen, *Bull. S math.,* 4; Lie, *Bull. des sciences math.,* 4; etc.

Beltrami und Dini bewiesen gleichzeitig, dass die einzig windschiefen Regelflächen, zwischen deren Hauptkrümmungsradi eine constante Relation besteht, die Regelhelicoide sind. Uebrige besitzen alle Regelhelicoide diese Eigenschaft.

Lipschitz, *Acta math.,* 10; *Compt. Rend.,* 1887 u Lilienthal, *Acta math.,* 11 behandelten den Fall, in welche die *Differenz* zwischen den beiden Hauptkrümmungsradien co stant ist.

Die *Röhrenflächen* sind als solche, für welche einer d Krümmungsradien constant bleibt, ein specieller Fall der Fläch W. Offenbar sind die Minimalflächen und die Flächen constant (absoluter oder mittlerer) Krümmung weitere specielle Fälle.

§ 14. Dreifache Orthogonalflächensysteme.

Wir wollen annehmen, es liegen drei Systeme von je ∞ Flächen vor von der Beschaffenheit, dass durch jeden Pun eines gewissen Bereichs des Raums eine einzige Fläche v jedem der drei Systeme geht. Ordnet man jede Fläche ein jeden der drei Systeme den Werthen dreier Parameter ϱ_1, ϱ_2, eindeutig zu, so kann man die letzteren als *krummlinige Coo dinaten* der Punkte des Raums auffassen. Die drei Systen von Flächen bilden, was man ein *dreifaches Flächensystem* nen

Sind x, y, z die Cartesischen Coordinaten der Punkte d Raums und

$$\varrho_1 = f_1(x, y, z),$$
$$\varrho_2 = f_2(x, y, z),$$
$$\varrho_3 = f_3(x, y, z)$$

die nach den Parametern ϱ aufgelösten Gleichungen der dr Flächen, so kann man sich die x, y, z durch die ϱ ausgedrüc denken, und eine Relation zwischen den ϱ entspricht der Gl chung einer Fläche in krummlinigen Coordinaten ϱ.

Das in krummlinigen Coordinaten ausgedrückte Quadr des Abstands zweier unendlich naher Punkte des Raums i alsdann:

$$ds^2 = H_1^2 d\varrho_1^2 + H_2^2 d\varrho_2^2 + H_3^2 d\varrho_3^2 + \\ + 2h_{12}\, d\varrho_1\, d\varrho_2 + 2h_{13}\, d\varrho_1\, d\varrho_3 + 2h_{23}\, d\varrho_2\, d\varrho_3,$$

orin

$$H_i^2 = \sum \left(\frac{\partial x}{\partial \varrho_i}\right)^2,$$

$$h_{ij} = \sum \frac{\partial x}{\partial \varrho_i} \frac{\partial x}{\partial \varrho_j}$$

und unter dem Symbol $\sum$ verstanden wird, dass die Summe r drei Terme gebildet werden soll, die man durch Vertauhung von x mit y und z erhält.

Dieser Abstand heisst das *Linienelement des Raums.*

Wenn $h_{12} = h_{23} = h_{13} = 0$ *ist, so steht jede der Flächen es Systems auf jeder Fläche der beiden anderen Systeme krecht und umgekehrt;* in diesem Fall heisst das dreifache stem *dreifaches Orthogonalsystem.*

Grundlegend für die dreifachen orthogonalen Systeme ist s Dupin'sche Theorem:

In jedem dreifachen Orthogonalsystem ist die Schnittlinie eier Flächen von verschiedenen Systemen eine Krümmungslinie ider Flächen.

Ferner, vollständiger:

Die nothwendige und ausreichende Bedingung, damit man eien aufeinander senkrechten Flächensystemen ein drittes zu iden orthogonales System beiordnen könne, besteht darin, dass e beiden ersteren sich längs Krümmungslinien schneiden. Darux, *Ann. de l'Éc. norm.,* 1866.

Jedes System von ∞^1 *Kugeln oder Ebenen gehört zu undlich vielen dreifachen Orthogonalsystemen.*

Jedes System von parallelen Flächen gehört einem dreifachen thogonalsystem an; die Flächen der beiden übrigen Systeme id die Developpablen, die durch die Normalen längs der Krümngslinien der gegebenen Fläche erzeugt werden.

Bei dem dreifachen Orthogonalsystem bestehen zwischen den als Functionen der ϱ*, die sechs sogenannten Lamé'schen ifferentialgleichungen:*

$$\frac{\partial^2 H_i}{\partial \varrho_j \partial \varrho_k} = \frac{1}{H_k} \frac{\partial H_k}{\partial \varrho_j} \frac{\partial H_i}{\partial \varrho_k} + \frac{1}{H_j} \frac{\partial H_j}{\partial \varrho_k} \frac{\partial H_i}{\partial \varrho_j},$$

$$\frac{\partial}{\partial \varrho_i}\left(\frac{1}{H_i} \frac{\partial H_k}{\partial \varrho_i}\right) + \frac{\partial}{\partial \varrho_k}\left(\frac{1}{H_k} \frac{\partial H_i}{\partial \varrho_k}\right) + \frac{1}{H_j^2} \frac{\partial H_i}{\partial \varrho_j} \frac{\partial H_k}{\partial \varrho_j} = 0.$$

Diese Bedingungen, denen die H genügen müssen, si nothwendig und ausreichend, damit man ein dreifaches Ortl gonalsystem erhalte; wenn sie erfüllt sind, so existirt ein u nur ein dreifaches Orthogonalsystem, welches ihnen entspricht.

Bei einer Transformation des Raums durch reciproke R dienvectoren wird jedes dreifache Orthogonalsystem in ein ande dreifaches Orthogonalsystem übergeführt.

Eines der einfachsten und am meisten studirten Syste dieser Art ist das dreifache Orthogonalsystem der *confoca Flächen 2ten Grads.*

Es besteht aus den drei Flächenschaaren $(a^2 > b^2 > c^2)$

$$\frac{x^2}{a^2+\varrho_1}+\frac{y^2}{b^2+\varrho_1}+\frac{z^2}{c^2+\varrho_1}=1, \quad (-c^2<\varrho_1<+\infty),$$

$$\frac{x^2}{a^2+\varrho_2}+\frac{y^2}{b^2+\varrho_2}+\frac{z^2}{c^2+\varrho_2}=1, \quad (-b^2<\varrho_2<-c^2),$$

$$\frac{x^2}{a^2+\varrho_3}+\frac{y^2}{b^2+\varrho_3}+\frac{z^2}{c^2+\varrho_3}=1, \quad (-a^2<\varrho_3<-b^2),$$

von denen die erste lauter Ellipsoide, die zweite einschalige Hyp boloide und die dritte zweischalige Hyperboloide enthält. Si auch S. 120.

Die Coordinaten, welche einem solchen dreifachen Ort gonalsystem entsprechen, pflegt man *elliptische Coordinaten* nennen. Lamé.

Das Quadrat des Linienelements in elliptischen Coordi ten ist:

$$ds^2=\frac{1}{4}\left\{\frac{(\varrho_1-\varrho_2)(\varrho_1-\varrho_3)}{(a^2+\varrho_1)(b^2+\varrho_1)(c^2+\varrho_1)}d\varrho_1^2+\right.$$
$$+\frac{(\varrho_2-\varrho_3)(\varrho_2-\varrho_1)}{(a^2+\varrho_2)(b^2+\varrho_2)(c^2+\varrho_2)}d\varrho_2^2+$$
$$\left.+\frac{(\varrho_3-\varrho_1)(\varrho_3-\varrho_2)}{(a^2+\varrho_3)(b^2+\varrho_3)(c^2+\varrho_3)}d\varrho_3^2\right\}.$$

Die Theorie der krummlinigen Coordinaten im Raum wu zuerst für den speciellen Fall elliptischer Coordinaten von La *Mém. prés. par divers savants à l'Académie de Paris,* 5, 18 *Crelle,* 2 und später von demselben Autor für den allgemei Fall orthogonaler Coordinaten eingeführt, *Crelle,* 5, 16; *Leç sur les coordonnées curvilignes,* Paris 1859. Vergl. auch C.

Jacobi, *Vorlesungen über Dynamik,* herausg. von A. Clebsch, 866.

Andere Arbeiten sind von Aoust, *Crelle,* 58; *Ann. di mat.,*), 6; (2), 2, 3, 5; Brioschi, ib., (2), 1; Codazzi, *Ann. di enze mat. e fis. di Tortolini,* 8, 1857; *Ann. di mat.,* (2), 1, 4, 5; Darboux, *Ann. de l'Éc. norm.,* 1866, 1878; Roberts, *elle,* 62; etc.

Neuer sind die Aufsätze von Bianchi, *Giorn. di Batt.,* 21, 22; *nn. di mat.,* (2), 13, 14, 18, 19; *Rend. Acc. Lincei,* 1885, 886, 1890; *Mem. Acc. Lincei,* 1887; etc. In diesen Arbeiten erden die Orthogonalsysteme, welche ein System pseudosphäscher Flächen (oder auch von Flächen constanter positiver rümmung) von demselben Radius enthalten, nach Weingarten, r zuerst ihre Existenz erkannte, *Weingarten'sche dreifache steme* genannt.

Eine wichtige Classe dieser Systeme entdeckte im Jahr 870 Ribaucour, *Compt. Rend.,* 70. Ueber das Fundamentaleorem Weingarten's in Bezug auf diese Systeme berichtete erst Bianchi, *Rend. Acc. Lincei,* 25. Febr. 1885, 15. März 885.

Ein neues Buch von Darboux, *Leçons sur les systèmes thog.,* etc., Paris 1898 ist ausschliesslich der Theorie der *dreichen Systeme* und der krummlinigen Coordinaten im Raum widmet.

§ 15. Liniencongruenzen.

Wir haben schon an einer anderen Stelle (Kap. 14) *die iniencongruenzen im Raum,* die auch *Strahlensysteme* genannt erden, d. h. die Gesammtheiten von ∞^2 Geraden oder *Strahlen* s Raums, definirt.

Diese Theorie, welche in enger Beziehung zur Flächenorie steht, wurde nicht nur vom Standpunkt der *Liniengeotrie* aus, sondern eingehend auch unter Zugrundelegung der *finitesimalgeometrie* studirt, wobei man sich die Congruenz beebig (algebraisch oder nicht) vorstellte.

Wir wollen uns nun denken, die Congruenz werde durch eine läche geschnitten, und als Ausgangspunkt sei auf einem Strahl r Congruenz einer der Punkte angenommen, in denen dieser trahl die Fläche trifft.

Es seien x, y, z die Coordinaten dieses Punkts und X, Y, Z e Richtungscosinus des Strahls.

Wir wählen ein krummliniges Coordinatensystem u, v a der Fläche, setzen*):

$$\sum\left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2 = E, \quad \sum\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u} = e,$$
$$\sum\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} = F, \quad \sum\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = f,$$
$$\sum\left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)^2 = G, \quad \sum\frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} = f',$$
$$\sum\frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v} = g$$

und führen *die beiden Fundamentaldifferentialformen*

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 = ds_1^2 = \sum(dX)^2,$$
$$e\,du^2 + (f + f')\,du\,dv + g\,dv^2 = \sum dx\,dX$$

ein, von denen die erste das Quadrat des Linienelements der *sp rischen Abbildung der Congruenz* darstellt, d. h. derjeni Curve, die man auf einer Kugel vom Radius 1 erhält, w von dem Centrum der Kugel Radien parallel zu den Strah der Congruenz gezogen werden, und die Schnittpunkte die Radien mit der Kugelfläche als den Strahlen der Congruenz e sprechend angesehen werden.

Bezeichnet man mit dp den kleinsten (unendlich klein Abstand eines Strahls (u, v) der Congruenz von einem ande ihm unendlich nahen $(u + du, v + dv)$, *so ist*

$$dp = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}\,ds_1}\begin{vmatrix} E\,du + F\,dv, & F\,du + G\,dv \\ e\,du + f\,dv, & f'\,du + g\,dv \end{vmatrix},$$

und, wenn r die Abscisse des Fusspunkts dieses kleinsten stands auf dem Strahl (u, v) bedeutet:

$$r = -\frac{e\,du^2 + (f + f')\,du\,dv + g\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}.$$

Auf jedem Strahl bez. für jeden Strahl der Congru sind *die beiden Grenzpunkte, die beiden Brennpunkte (Focalpunk der Central- oder Mittelpunkt, die beiden Hauptebenen, die bei Focalebenen* etc. zu unterscheiden, über deren Definition wir Kap. 14 verweisen.

---

*) Die Symbole Σ sollen sich über die drei Buchstaben x, bez. X, Y, Z auf leicht verständliche Art erstrecken.

Die Abscissen r_1, r_2 der beiden Grenzpunkte sind durch die Wurzeln der Gleichung

$$(EG - F^2)r^2 + \{gE - (f + f')F + eG\}r + \\ + eg - \left(\frac{f+f'}{2}\right)^2 = 0,$$

und die Abscissen ϱ_1, ϱ_2 der beiden Brennpunkte durch

$$(EG - F^2)\varrho^2 + \{gE - (f+f')F + eG\}\varrho + eg - ff' = 0$$

gegeben.

Nennt man ω den Winkel, den der kleinste Abstand dp des Strahls (u, v) von dem Strahl $(u + du, v + dv)$ mit dem Loth bildet, dessen Fusspunkt in den Grenzpunkt fällt, so ist

$$r = r_1 \cos^2\omega + r_2 \sin^2\omega, \quad \textit{(die Hamilton'sche Formel).}$$

Wird mit $2d$ der Abstand der beiden Grenzpunkte und mit 2δ der Abstand der beiden Brennpunkte von einander bezeichnet, so erhält man

$$d^2 - \delta^2 = \frac{(f - f')^2}{4(EG - F^2)}.$$

Wenn unter γ der Winkel verstanden wird, den die Focalebenen miteinander bilden, so ist

$$\cos\gamma = \frac{\sqrt{d^2 - \delta^2}}{d}, \quad \sin\gamma = \frac{\delta}{d}.$$

Durch einen Punkt P eines Strahls l der Congruenz legen wir eine Ebene Π senkrecht zum Strahl und ziehen in Π um P eine unendlich kleine Curve c, die eine Fläche vom Inhalt A umschliesse. Auf der Bildkugel bestimmen dann die Radien, welche den von den Punkten von c ausgehenden Strahlen entsprechen, eine unendlich kleine geschlossene sphärische Curve c' mit einer Fläche vom Inhalt A'.

Die Grenze des Verhältnisses $\frac{A'}{A}$ heisst *das Dichtigkeitsmass der Congruenz im Punkt P.*

Das Dichtigkeitsmass der Congruenz in dem auf einem Strahl l liegenden Punkt P ist dem reciproken Werth des Products aus den Abständen der beiden auf l liegenden Brennpunkte von P gleich.

Das kleine Bündel von Strahlen, die von der Peripherie der Curve c ausgehen, heisst *ein unendlich dünnes Strahlenbündel* und die Gerade l seine *Axe.*

Schneidet man es mit der durch P gehenden und auf de Fundamentalstrahl l senkrechten Ebene, so erhält man a Schnitt die Curve c; schneidet man es mit einer anderen z ersten parallelen Ebene, die durch den Punkt P_1 von l gel so ergiebt sich ein zweiter Schnitt c_1; *die Flächeninhalte der v diesen beiden Curven umschlossenen Ebenenstücke verhalten s umgekehrt wie die Dichtigkeitsmasse in den betreffenden Punkt P und P_1.*

Wenn mit r die Abscisse des auf dem Strahl l liegend Punkts P bezeichnet wird, *so ist das Dichtigkeitsmass in P*

$$\frac{EG - F^2}{(EG - F^2)r^2 + \{gE - (f + f')F + eG\}r + eg - ff'}.$$

Das Dichtigkeitsmass ist immer reell; wenn auch die Bren punkte reell sind, so ist das Dichtigkeitsmass für die Punk welche ausserhalb des Segments liegen, das die Brennpunkte v bindet, positiv, für die Punkte im Inneren des Segments negat in den Brennpunkten unendlich gross und hat den grösst negativen Werth in dem Mittelpunkt des Strahls; sind dageg die Brennpunkte imaginär, so ist das Dichtigkeitsmass imn positiv und erreicht sein Maximum in dem Mittelpunkt des Stral

---

Ist eine Strahlencongruenz gegeben, so sind fünf Fläch von Bedeutung, die mit der Congruenz bemerkenswerthe I ziehungen haben; es sind die Flächen, die von den beid Grenzpunkten, den beiden Brennpunkten und dem Mittelpun erzeugt werden. Sie heissen bezüglich *Grenzflächen, Focalfläch* und *Mittelfläche.*

Die Strahlen der Congruenz sind die den beiden Foc flächen gemeinsamen Tangenten.

Regelflächen einer Congruenz heissen die Flächen, der Erzeugende Strahlen der Congruenz sind und *Hauptregelfläch der Congruenz* diejenigen, deren Strictionslinien mit dem (der Grenzpunkte der als Strahlen der Congruenz angehörig Erzeugenden zusammenfallen.

Es gibt zwei Systeme von Hauptregelflächen.

Unter den Regelflächen der Congruenz existiren unendl viele Developpable; insbesondere gibt es zwei Systeme solch Developpablen.

Normalencongruenzen werden diejenigen genannt, deren rahlen senkrecht auf derselben Fläche stehen.

Die nothwendige und ausreichende Bedingung, damit man ie Normalencongruenz habe, besteht darin, dass die Brennnkte mit den Grenzpunkten zusammenfallen, oder die Focalenen senkrecht aufeinander stehen.

Bei einer Normalencongruenz fallen die beiden Focalflächen t den beiden Schalen der Evolute der zur Congruenz senkchten Fläche zusammen, und das Dichtigkeitsmass in den nkten dieser senkrechten Fläche fällt mit der totalen Krümung derselben zusammen.

Wenn eine Normalencongruenz von Lichtstrahlen eine beliege Anzahl von Reflexionen und Refractionen erleidet, so bleibt immer eine Normalencongruenz. Theorem von Malus-Dupin. ehe auch Kap. 17, § 3 über die Kaustiken oder Brennlinien.

Mit diesem berühmten Theorem ist ein Satz von Beltrami, *icerche di analisi* etc., *Giorn. di Batt.*, 2, 3 verwandt, der ıssagt:

Wenn man sich denkt, von den Punkten einer Fläche S hen die Strahlen l einer Normalencongruenz aus, und zu dieser ongruenz sei die Normalfläche construirt, welche die Strahlen l Punkten P schneidet, und wenn dann die Fläche S derart formirt wird, dass die Strahlen der Congruenz unveränderlich it ihr verbunden bleiben, so ist auch die neue so erhaltene ongruenz wieder Normalencongruenz und die zu ihr orthogonale läche ist der Ort der neuen Lagen der Punkte P.

Nach dem Malus-Dupin'schen Theorem ist die *Normaät* ein *Merkmal* der geradlinigen Congruenzen, das bei beliebig elen Refractionen *invariant* bleibt. Levi-Civita, *Rend. Acc. incei*, 1900, p. 185 und 237 hat bewiesen, *dass es das einzige variante Merkmal ist.*

Wenn in einer Strahlencongruenz der Abstand der Brennnkte und zugleich der Abstand der Grenzpunkte constant bleiben, sind die beiden Brennflächen pseudosphärische Flächen, deren adius dem Abstand der Grenzpunkte gleich ist. Bianchi, *nn. di mat.*, (2), 15.

Diese Congruenzen nannte *Bianchi pseudosphärische.*

Eine Congruenz, für welche

$$e : \frac{f + f'}{2} : g = E : F : G$$

ist, heisst *eine Ribaucour'sche isotrope Congruenz.*

Eine Fläche, welche von den Ebenen eingehüllt wird, auf den Strahlen einer isotropen Congruenz in deren Mittpunkten senkrecht stehen, ist eine Minimalfläche. Ribaucour

---

Zugleich mit der Theorie der Flächen wurden von Mon und seinen Schülern die von den Normalen einer Fläche gel deten Congruenzen studirt. Das oben angegebene von Mal gefundene Theorem über diese Normalencongruenzen bezog s anfangs nur auf ein System von Strahlen, die von einem Pu ausgehen. *Journ. de l'Éc. pol.,* cahier 14, 1808. Es wurde spä von Dupin vervollständigt und erhielt so die Fassung, in wir es gebracht haben. *Applic. de géom. etc. pour faire su aux Dévelopg. de géom.,* Paris 1822.

Die Congruenzen im Allgemeinen wurden dann von versch denen Autoren untersucht, von Gergonne, Quetelet und sonders auch von Hamilton, *Irish Trans.,* 15, 16, 17, 18 —1837; später wurde ihre Theorie von Kummer, *Crelle,* 1860; *Berl. Monatsber.,* 1859—60 wieder aufgenommen mit grossem Erfolg weiter entwickelt.

Diesen Arbeiten schliessen sich zahlreiche andere an. neuesten sind von Weingarten, *Crelle,* 98; Bianchi, L. Guichard, *Ann. de l'Éc. norm.,* (3), 6; *Compt. Rend.,* 18 1892; etc. Vergl. auch das wiederholt citirte Werk Bianchi, *Lezioni di geometria differenziale,* Pisa 1894, deut von Lukat, *Vorlesungen über Differentialgeometrie,* Leipzig 18

Kapitel XVII.

Metrisch specialisirte Haupterzeugungsarten und Transformationen von Curven und Flächen. Die Geometrie specieller Curven.

§ 1. Inverse und Desarguesische Curven und Flächen. Transformation durch reciproke Radienvectoren. Desarguesische Transformation.

Auf S. 159 wurde schon gesagt, dass sich die *Transformation durch reciproke Radienvectoren* oder die *Inversion* als specieller Fall einer birationalen quadratischen Transformation ergibt, wenn von den drei Fundamentalpunkten der Transformation zwei in die beiden Kreispunkte der Ebene und der dritte in den Anfangspunkt der *Cartesischen* Coordinaten verlegt werden.

Geometrisch lässt sich diese Transformation auf die folgende Art definiren:

Es sei in der Ebene ein Kreis vom Radius R gegeben, dessen Centrum im Coordinatenanfang O liege; einem Punkt der Ebene, dessen Radiusvector r und Argument φ ist, wird der Punkt vom Argument φ und Radiusvector $\frac{R^2}{r}$ zugeordnet. Der Radius R heisst *der Modul der Inversion* und der Punkt O *der Pol* oder *das Centrum der Inversion.*

Wenn man dieselbe Operation statt in der Ebene im Raum vornimmt und eine Kugel vom Radius R zu Grund legt, so erhält man *die Transformation durch reciproke Radienvectoren im Raum.*

Eine Curve oder Fläche wird auf diese Art in eine andere Curve oder Fläche übergeführt, welche die *Inverse der gegebenen* heisst.

Dem Punkt O entspricht die unendlich ferne Gerade bez. die unendlich ferne Ebene.

Die einzigen Punkte, die sich selbst entsprechen, sind d Punkte des Kreisees bz. der Kugel.

Einer durch den Pol O gehenden Geraden entspricht di Gerade selbst.

Einer beliebigen Geraden entspricht ein durch O gehend Kreis. In dem Fall der ebenen Transformation ist die gegebe Gerade die Radicalaxe des Kreises vom Centrum O und d Kreises, der durch O geht.

Einem beliebigen Kreis entspricht ein anderer Kreis, d mit dem Fundamentalkreis (im Fall der ebenen Transformatio dieselbe Radicalaxe, wie der gegebene Kreis, gemeinschaftlich h Die Ausdehnung dieser Sätze auf die Transformation im Rau kann man leicht selbst ausführen.

Eine sehr wichtige Eigenschaft dieser Transformation l steht darin, *dass sie conform (isogonal, winkeltreu) ist, d. h. d durch sie die Winkel nicht verändert werden.*

Bemerkenswerth ist das Theorem:

Die Normale zu einer Curve in einem Punkt P und Normale zu ihrer inversen Curve in dem entsprechenden Pu Q schneiden sich in einem Punkt des in dem Mittelpunkt v PQ auf PQ errichteten Loths.

Eine Curve oder Fläche, welche die Eigenschaft hat, si mittelst einer besonderen Transformation durch reciproke R dienvectoren in sich selbst zu verwandeln, pflegt man *anall matisch* zu nennen.

Die anallagmatischen doppelt gekrümmten Curven 4ter O nung hat Darboux, *Sur une classe remarquable de cour et surfaces* etc., Paris (1873), 2. Aufl., 1896 *Cykliken* (cycliqu genannt. Sie sind die Schnitte einer Kugel mit einer Fläc 2ten Grads.

Die anallagmatischen Flächen 4ter Ordnung sind die *Cyclid* Vergl. Kap. 12, § 7.

Moutard hat nachgewiesen, *dass jede anallagmatis Curve die Enveloppe einer Reihe von Kreisen ist, die auf ein festen Kreis senkrecht stehen, dessen Mittelpunkt im Centrum Inversion liegt, und dessen Radius der Modul der Inversion* Siehe die Citate in Kap. 12, § 7.

Nach dem Namen Desargues pflegt man *Desarguesis Transformation* (fr. *Transf. Argu'sienne*, it. *trasf. Arguesiana*)

adratische Transformation zu nennen, welche metrisch durch e folgende geometrische Construction specialisirt wird.

Es sei ein Fundamentaldreieck ABC gegeben; man erhält n einem Punkt P entsprechenden Punkt, wenn P mit den rei Ecken verbunden wird und dann die zu AP, BP, CP in ezug auf die Halbirungsgeraden der drei Dreieckswinkel symetrischen Geraden gezogen werden. Der Schnittpunkt dieser rei Geraden ist der dem Punkt P entsprechende Punkt.

Die so transformirte Curve heisst die *Desarguesische der gebenen Curve.*

Der dem Dreieck ABC umschriebene Kreis ist die Desarguesische Curve der unendlich fernen Geraden der Ebene. Die Desarguesische Curve eines Durchmessers dieses Kreises ist eine leichseitige Hyperbel.

Diese Transformation wurde untersucht von Cayley, *Journ. e Liouv.*, 1849; Mathieu, *Nouv. Ann.*, 1865, p. 393, 481, 29; Saltel, *Mém. de l'Ac. de Belg.*, 1872; etc.

Sie verdankt dem letzten Autor ihre Benennung; sie wurde hon von Steiner und Magnus studirt.

2. Fusspunktcurven bez. -flächen ebener Curven und Flächen. Radiale Curven ebener Curven.

Fusspunktcurve (Pedalcurve, franz. *podaire, pedale)* oder uch speciell *positive* oder *directe Fusspunktcurve eines Punkts P n Bezug auf eine ebene Curve C* ist der geometrische Ort der usspunkte der von dem gegebenen Punkt, dem *Pol* oder *Centrum,* auf die Tangenten an die Curve C gefällten Lothe.

Die gegebene Curve heisst dagegen *negative* oder *inverse usspunktcurve* in Bezug auf die eben definirte Fusspunktcurve.

Aehnliche Definitionen gelten für die *Fusspunktflächen einer läche.*

Die Normale in einem Punkt der Fusspunktcurve geht durch en Mittelpunkt des Segments, welches den Pol mit dem entsprechenden Punkt der Curve C verbindet.

Die Fusspunktcurve einer Curve C vom Pol P aus ist die urch reciproke Radienvectoren transformirte Curve (d. h. die nverse) *der reciproken Polarcurve von C in Bezug auf einen eliebigen von dem Centrum P aus beschriebenen Kreis.*

Nennt man s', ϱ' den Bogen und den Krümmungsradius ler Fusspunktcurve und s, ϱ diejenigen der gegebenen Curve, den Abstand des Punktes P von den Punkten Q der gege-

benen Curve, θ den Winkel, den PQ mit der Tangente in bildet, *so erhält man die natürliche Gleichung der Fusspun curve durch Elimination von s aus*

$$s' = \int \frac{r}{\varrho}\, ds, \quad \text{und} \quad \varrho' = \frac{r^2}{2r - \varrho \sin\theta}.$$

Das folgende Theorem von Steiner, *Crelle*, 21 über Fusspunktcurven ist bemerkenswerth:

Wenn man von einer geschlossenen Curve C ohne Wendun die Fusspunktcurve in Bezug auf einen beliebigen Punkt P c struirt, sich dann die nämliche Curve C starr mit P verbun denkt und sie auf einer Geraden so rollen lässt, dass P e sogenannte cycloidenartige Curve oder Roulette beschreibt (ve § 6), *so ist der Bogen der letzteren dem entsprechenden Bo der Fusspunktcurve gleich, und der Inhalt der von der Roul und der Geraden begrenzten Fläche ist doppelt so gross als Inhalt der von der Fusspunktcurve eingeschlossenen Fläche.*

Ferner:

Wenn man die Fusspunktcurve in Bezug auf den Pol auf der von dem Punkt P auf die eben angegebene Art besch benen Roulette rollen lässt, so ist der Ort des Punkts P Gerade. Theorem von Habich.

Die Inverse des Radiusvectors einer ebenen Curve C ist Differenz zwischen den Inversen der Krümmungsradien der Fu punktcurve und der Roulette der Curve C gleich, wenn die Fu punktcurve den Anfangspunkt der Radienvectoren zum Pol und die Roulette durch den nämlichen mit der Curve C starr v bundenen Punkt bei dem Rollen von C auf einer Geraden zeugt wird.

Vergl. P. Franck, *Ueber die Flächeninhalte und Bog längen von Fusspunktcurven und Rollcurven, Leipziger Diss.* 18 Kowalewski, *Ueber Fusspunktcurven von Ovalen mit Mi punkt, Leipz. Ber.*, 1901.

Eine Beziehung zwischen der Fusspunktcurve und Brennlinie findet man in § 3.

Die *radiale Curve* einer ebenen Curve C ist der geo trische Ort der Endpunkte der von einem festen Punkt a gehenden Segmente, welche dieselbe Länge und Richtung hal wie die Krümmungsradien der Curve C. Tucker.

Die radiale Curve des Kegelschnitts

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$$

at, wenn der Anfangspunkt der Segmente mit dem Coordinatenanfang zusammenfällt, die Gleichung:

$$(a^2x^2 \pm b^2y^2)^3 = a^4b^4(x^2 + y^2)^2, \quad \text{Tucker.}$$

Die radiale Curve einer algebraischen Curve n^{ter} Ordnung ist im Allgemeinen eine algebraische Curve $3n(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung. Loria.

Die radiale Curve einer rationalen Curve n^{ter} Ordnung ist im Allgemeinen von der Ordnung $6(n-1)$. Loria.

Von Literatur geben wir an:

Tucker, *Proc. Lond. Math. Soc.*, 1, 1865; *Quart. Journ. f. Math.*, 18, 1882; Loria, *Periodico di Mat.*, t. 17, 1901; *Rend. Palermo*, t. 16, 1902.

§ 3. Kaustische Curven und Flächen.

Wenn von einem Punkt in endlichem oder unendlich grossem Abstand, dem *leuchtenden Punkt*, Strahlen ausgehen und auf eine ebene Curve, die *Dirimante*, franz. *dirimante*, it. *curva dirimente* einfallend, von dieser *reflectirt* oder *gebrochen**) werden, so nennt man die Enveloppe der so reflectirten bez. gebrochenen Strahlen die *Brennlinien* oder *Kaustiken* der Curve. Diese werden daher in *Kaustiken durch Reflexion (Katakaustiken* oder *katoptrische Kaustiken)* und *Kaustiken durch Refraction* (*Diakaustiken* oder *dioptrische Kaustiken*) unterschieden.

Man kann den Begriff der Kaustiken erweitern, wenn man sich denkt, die einfallenden Strahlen gehen, anstatt von einem Punkt, allgemeiner in normaler Richtung von einer gegebenen Curve aus, d. h. sie bilden ein sogenanntes *Normalensystem*. Ferner lassen sich selbstverständlich diese Unter-

---

*) Wenn ein in einen Punkt P einer Curve einfallender Strahl gegeben ist, so heisst, wie man aus den Elementen der Physik weiss, durch die Curve *reflectirt* derjenige Strahl, der mit der Normalen zur Curve in P denselben Winkel bildet, wie der Einfallstrahl; *gebrochen* heisst dagegen der Strahl, wenn das Verhältniss der Sinus der Winkel, welche der Einfallstrahl und der gebrochene Strahl mit der Normalen zur Curve in P machen, constant ist. Dieses constante Verhältniss wird *Brechungsexponent* genannt.

suchungen auf den Raum ausdehnen, indem man sich doppelt unendliches System einfallender Strahlen (die von ein Punkt oder normal von einer Fläche ausgehen) vorstellt, d. eine sogenannte *Normalencongruenz* einfallender Strahlen (ve Kap. 16), alsdann eine beliebige zweite Fläche annimmt u den Ort der Schnittpunkte der von dieser zweiten Fläche refl tirten oder gebrochenen einander unendlich nahen Strahlen trachtet.

Das Theorem von Malus-Dupin über die norma Strahlencongruenzen (Kap. 16, § 15) enthält als speciellen F offenbar den folgenden:

Ist in der Ebene ein Normalensystem (d. h. sind die Norma einer Curve) gegeben, so ergibt sich nach einer beliebigen A zahl von Reflexionen oder Refractionen immer wieder ein N malensystem, d. h. es wird immer eine Curve existiren, wel diese reflectirten oder gebrochenen Strahlen zu Normalen hat.

Auf diese Art stellen sich die ebenen Brennlinien als Evoluten gewisser Curven dar, die Quetelet *secundäre Bre linien oder antikaustische Linien* nannte.

Es gelten nun die folgenden allgemeinen Sätze von G gonne:

I. *Die Brennlinie durch Reflexion eines ebenen Normal systems ist die Evolute der Enveloppe aller Kreise, deren Mit punkte auf der reflectirenden Curve liegen, und welche die Cu berühren, auf der die einfallenden Strahlen senkrecht stehen.*

II. *Die Brennlinie durch Refraction eines ebenen Normal systems ist die Evolute der Curve, welche die Kreise umhi deren Mittelpunkte auf der brechenden Curve liegen, und de Halbmesser in dem Verhältniss* $\frac{1}{n}$ *zu dem Abstand der Mit punkte von der Curve stehen, auf welcher alle einfallenden Strah normal sind; dabei bezeichnet n den Brechungsexponenten.*

Für den Fall, dass die einfallenden Strahlen von ein Punkt P in *endlichem* Abstand ausgehen und als auf ihnen se rechte Curve der Umfang eines Kreises vom Radius Null und dem Centrum in P gewählt wird, sind Theoreme vorhand die von Quetelet herrühren; für den Fall dagegen, dass P endlicher oder unendlich grosser Entfernung liegt und als n male Curve der Umfang eines Kreises mit dem Centrum in und beliebigem Halbmesser bez. eine auf der Richtung einfallenden Strahlen senkrechte Gerade angenommen wird, hat Gergonne und Sarrus schon zu einer Zeit Theoreme a

efunden, als der erstere die oben angegebenen eleganten Sätze och nicht aufgestellt hatte.

Erweiterungen dieser Theoreme auf *kaustische Flächen*, eren antikaustische Flächen sich auch hier wieder als Enveloppen von Kugeln ansehen lassen, findet man bei demselben Autor Gergonne in einer Arbeit, die in Bd. 15, p. 13, 307 er *Ann. de Gergonne* enthalten ist; wir halten es nicht für öthig, darauf einzugehen.

Der Winkel, den die Tangente an die secundäre Brennlinie mit dem von dem leuchtenden Punkt aus gezogenen Radiusvector bildet, ist dem Winkel zwischen der Tangente an die reflectirende bez. brechende Curve und dem ebenfalls vom leuchtenden Punkt aus gezogenen Radiusvector gleich.

Der Winkel zwischen den Radienvectoren der secundären Brennlinie und der brechenden Curve ist dem Brechungswinkel gleich.

Die Fusspunktcurve einer gegebenen Curve von einem festen Punkt aus ist die secundäre Brennlinie durch Reflexion einer der gegebenen ähnlichen Curve, wenn der leuchtende Punkt in dem festen Punkt angenommen wird. Dandelin, *Mém. de l'Ac. de Belg.*, 4; Genocchi, *Ann. di Tortolini*, 6, p. 117; Emil Weyr, *Zeitschr. für Math.*, 1869, p. 376; *Wien. Ber.*, 1869, p. 169.

Tschirnhausen untersuchte zuerst die ebene Brennlinie, die von Parallelstrahlen erzeugt wird, welche durch einen Kreis reflectirt werden, *Acta Eruditorum*, 1682; die Commissare der Academie der Wissenschaften in Paris Cassini, Mariotte, De La Hire fanden jedoch, dass seine Untersuchungen Fehler enthielten. Spätere Arbeiten über die Brennlinien sind von Bernoulli, L'Hospital, etc.

Malus beschäftigte sich im Jahr 1810 zuerst mit der allgemeinen Theorie der Brennflächen und fand werthvolle Theoreme, denen er jedoch nicht die allgemeine Fassung zu geben vermochte, die sie später 1822 von Dupin, *Ann. de Gergonne*, 14, p. 129 erhielten.

Schon im Jahr 1815 hatte Gergonne, *Ann. de Gergonne*, 5, p. 283; 11, p. 229; 14, p. 1 die Existenz der Theoreme über die secundären Brennlinien für den Fall, in welchem die einfallenden Strahlen von einem Punkt ausgehen, für wahrscheinlich gehalten; Quetelet, ib., 15, p. 205 wies dann ihre Gültigkeit für den speciellen Fall eines Kreises als Dirimante nach und dehnte sie

Mém. de l'Ac. de Brux., 3, p. 89 auch auf den Fall ganz b liebiger Dirimanten aus.

In der Zwischenzeit studirte Sarrus den Fall *parallel* Einfallstrahlen und Gergonne gab zuerst der von Quetel gefundenen Construction eine allgemeinere Form und stell dann die oben angeführten allgemeinsten Sätze für ein beli biges *Normalensystem* einfallender Strahlen auf.

In der Arbeit von Gergonne auf p. 345 u. ff. in Bd. 1 der *Ann. de Gergonne* findet man eine Geschichte dieser Fo schungen; es wird in ihr auch über das Resultat, zu dem Sarr gekommen war, berichtet.

Andere Schriften über dasselbe Thema sind von Timme mans, *Corresp. math.*, 1, p. 336, über die antikaustischen Fläche von Cayley, *Lond. Phil. Trans.*, 147, p. 273, etc.

Eine Zusammenstellung der Literatur über die Kaustike ist in dem *Intermédiaire des math.*, 1895, p. 321 enthalten.

§ 4. Parallele Curven und Flächen. Conchoide für Curven und Flächen.

Gegeben sei eine ebene Curve; eine ihr *parallele* Curve i die Enveloppe der zu den Normalen der Curve senkrechte Geraden, die von der Curve in beiden Richtungen um eine fes Länge $\pm k$ abstehen.

So sind zwei parallele ebene Curven auch *gleichweit a stehend.*

Zwei parallele ebene Curven haben dieselben Krümmung mittelpunkte.

Manchmal kommt es vor, dass die zu einer gegebene parallele Curve in zwei Theile zerfällt, in den $a + k$ und de $a - k$ entsprechenden Theil, im Allgemeinen jedoch erhält ma zwei Aeste derselben Curve.

Ueber die Theorie der Parallelcurven siehe Salmon Fiedler, *Anal. Geom. d. höh. eb. Curv.*, Leipzig 1882, § 118 u. f Cesàro, *Geom. intrinseca*, p. 29, deutsch von Kowalewsk *Vorlesungen über natürliche Geometrie*, Leipzig 1901; etc.

Offenbar lassen sich analog auch *parallele Flächen* definire

---

Die sogenannten *Conchoiden, Muschellinien*, erhält man a einer gegebenen Curve C auf die folgende Art: Es sei O ei Punkt der Ebene und P ein Punkt der Curve C; auf de

adiusvector OP trägt man auf der einen und der anderen eite von P zwei Segmente von der Länge $\pm k$ ab. Der Ort er Endpunkte dieser Segmente bei dem Variiren von P ist lsdann die *Conchoide.*

Auf ähnliche Art werden *die Conchoiden für Flächen* definirt.

Die Construction der Normalen an die Conchoide lässt sich eicht ausführen; man braucht nur in O ein Loth auf den adiusvector zu errichten und den Schnitt S dieses Loths mit der ormalen zur Curve C zu suchen: *die Normalen zur Conchoide in en beiden dem Punkt P entsprechenden Punkten gehen durch S.*

Mit anderen Worten:

Die Conchoide hat in jedem Punkt dieselbe polare Subnor- nale, wie die gegebene Curve C.

Ueber die Construction des Krümmungsmittelpunkts einer Conchoide siehe *l'Interm. des math.*, 1894, p. 155; 1895, . 112, 224.

Eine *conchoidale (muschelförmige) Curve* ferner wird auf lie folgende Art definirt:

Man habe drei Curven, f, φ, ψ; es wird eine Tangente n f gezogen, welche φ und ψ in zwei Punkten A und B chneidet; auf dieser Tangente werden von dem Berührungs- unkt aus nach der einen und der anderen Seite zwei Strecken leich AB abgetragen; der Ort der Endpunkte dieser Strecken st die *conchoidale Curve.*

§ 5. Die Theilungscurven.

Theilungscurven sind der Ort des Schnitts A zweier Geraden, lie *mit gleichförmigen Geschwindigkeiten* um zwei feste Punkte P, P' rotiren.

Wenn die beiden Rotationsgeschwindigkeiten in dem Verhält- niss $\frac{n}{n'}$ stehen, wobei $n' < n$ vorausgesetzt wird, so steht der Supplementwinkel von $AP'P$ zu dem Winkel APP' in dem Verhältniss $\frac{n}{n'}$.

Die Theilungscurve geht $(n-1)$mal durch P, $(n'-1)$mal durch P' und n'mal durch die Kreispunkte der Ebene.

Für $n' = 1$ oder $n' = n - 1$ erhält man die sogenannten Unicursalcurven.

Für $n' = 1$ und $n = 3$ ergibt sich die Maclaurin'sche Trisectrix (siehe § 9) *und*

für $n' = 2$, $n = 3$ *die Pascal'sche Schnecke* od *limaçon,* it. *lumaca* (vergl. § 11), *die man auch Sechsth lungscurve nennen kann.*

Der Name *Theilungscurve* kommt von ihrer Beziehung dem Problem der Winkeltheilung her; ist ins Besondere $n' =$ so können sie zur Theilung eines Winkels in n gleiche The benutzt werden.

Ueber diese Curven siehe Schoute, *Journ. des ma spéciales,* 1885.

§ 6. Cycloidale Curven oder Rouletten. Gleitcurven.

Sogenannte *cycloidale (cycloidenartige) Curven* oder na einem französischen Wort *Rouletten (Rollcurven)* werden v einem Punkt der Ebene einer Curve erzeugt, welche auf ein anderen festen Curve, der *Basis der Roulette,* rollt, ohne gleiten.

Die sogenannten *Gleitcurven* (die Franzosen sagen *glissett* werden von einem Punkt der Ebene einer Curve erzeugt, welc sich, ihrer Gestalt nach unverändert bleibend, so bewegt, da sie bei dieser Bewegung stets gegebene Curven berührt od durch gegebene Punkte geht.

Wenn $x = yf(y)$ *die Gleichung der Gleitcurve darste welche der Ort eines Punkts P der Ebene einer Curve C ist, in beständiger Berührung mit einer festen Geraden in ein festen Punkt bleibt, so ist* $\frac{dy}{dx} = -f(y)$ *die Differentialgleichu der Roulette desselben Punkts P, wenn man die Curve C dieser Geraden rollen lässt.* Brocard, *Nouv. Corresp.,* 2, 187 p. 377, 383.

Die Normale zur Roulette geht durch den Berührungspu M der festen mit der beweglichen Curve.

Den Krümmungsmittelpunkt der Roulette findet man auf folgende Art: Man verbindet den Punkt P der Roulette mit d Krümmungsmittelpunkt der beweglichen Curve, verlängert di Gerade, wenn nöthig, bis zu ihrem Schnitt R mit dem von aus auf PM errichteten Loth. Verbindet man dann R mit d Krümmungsmittelpunkt der festen Curve, so trifft diese Gera PM in dem gesuchten Krümmungscentrum.

Eine andere Eigenschaft der Roulette, die in Beziehung ır Fusspunktcurve steht, wurde in § 2 besprochen.

Die erste Roulette, die studirt wurde, war die Curve, die on einem Punkt eines auf einer Geraden rollenden Kreises eschrieben wird; sie wurde von Blaise Pascal im Jahr 1659 ntersucht und ist die eigentliche sogenannte *Cycloide.* Siehe ; 12.

Von den *Rouletten* und den *Gleitcurven* handelt die sehr ollständige Monographie von Besant, *Notes on Roulettes and Glissettes,* Cambridge 1870; siehe auch verschiedene Artikel in den *Nouv. Ann.*, 1871 und die Angaben in dem neuen *lithographirten* Buch von Brocard, *Notes de bibliogr. des courbes géométriques*, Bar-le-Duc 1897.

§ 7. Rotationsflächen. Cylinder- Kegel- und Conoidflächen.

Die Gleichung der Rotationsflächen hat, wenn die z-Axe die Rotationsaxe ist, die Gestalt:

$$z = \varphi(x^2 + y^2),$$

worin φ das Symbol für eine willkürliche Function ist.

Bezeichnet man mit p, q die beiden partiellen Derivirten 1ter Ordnung von z nach x und y, *so lautet die partielle Differentialgleichung der Rotationsflächen:*

$$py - qx = 0.$$

Die Gleichung der Cylinderflächen hat die Form:

$$\varphi(x - az,\ y - bz) = 0$$

und ihre Differentialgleichung ist:

$$ap - bq = 1.$$

Die Gleichung der Kegelflächen lautet, wenn (x_0, y_0, z_0) die Coordinaten der Spitze des Kegels sind:

$$\varphi\left(\frac{x - x_0}{z - z_0},\ \frac{y - y_0}{z - z_0}\right) = 0,$$

und ihre Differentialgleichung:

$$p(x - x_0) + q(y - y_0) = z - z_0.$$

Conoidflächen werden durch die Bewegung einer geraden Linie erzeugt, die eine feste Gerade stets schneidet und zu einer festen Ebene immer parallel bleibt.

Ist die gegebene Gerade die z-Axe und die feste Ebe die xy-Ebene, *so lautet die Differentialgleichung der Conoide:*

$$px + qy = 0,$$

und die Gleichung in endlichen Termen:

$$z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Allgemeiner ist die Form der Differentialgleichung c Conoide:

$$p(az - x) + q(bz - y) = 0$$

und der Gleichung in endlichen Termen:

$$z = \varphi\left(\frac{y - bz}{x - az}\right).$$

§ 8. **Kegelschnitte.**

Wir haben früher in einem besonderen Kapitel (Kap. 3) ge metrische und analytische Betrachtungen über die Kegelschnit angestellt und fügen hier die folgenden metrischen Resulta hinzu, die speciell von ihrer infinitesimalen Geometrie abhänge

Ihre natürliche Gleichung wurde in Kap. 16 angegeben.

Die Fusspunktcurve eines Kegelschnitts vom Brennpun aus ist ein Kreisumfang.

Der Krümmungsradius eines Punkts P einer Ellipse mit d Halbaxen a und b ist dem Cubus der (von P und der Hau axe begrenzten) Normalen proportional.

Die Evolute einer Ellipse, deren Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (a > b)$$

lautet, hat die Gleichung

$$(ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}.$$

Der Flächeninhalt der ganzen Ellipse ist πab und der ihr Evolute $\frac{3}{8}\pi ab$.

Der Ellipsenbogen ist durch ein elliptisches Integr zweiter Gattung (siehe *Repert.* 1, S. 152)

$$s = a\int_0^{\varphi} \sqrt{1 - e^2 \sin^2\varphi}\, d\varphi, \quad \left(e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}\right)$$

egeben, worin φ die sogenannte (excentrische) Anomalie ist, . h. der aus den Formeln

$$x = a \sin \varphi, \quad y = b \cos \varphi$$

ich ergebende Winkel. Beschreibt man den zur Ellipse con-entrischen Kreis mit dem Radius a, so ist φ der Winkel, den er Radiusvector desjenigen Punkts des Kreises, dessen Coordi-aten x und $\frac{a}{b} y$ sind, mit y bildet; dabei sind x, y die Coor-linaten des Punkts der Ellipse.

Der Perimeter der ganzen Ellipse lässt sich durch die Reihe

$$2\pi a \left\{1 - (\tfrac{1}{2}e)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}e^2\right)^2 - \frac{1}{5}\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}e^3\right)^2 - \cdots\right\}$$

usdrücken.

Wenn ein Ellipsenbogen gegeben ist, so lässt sich ein zweiter on der Beschaffenheit finden, dass die Differenz der beiden Bogen rectificirbar ist (sich unmittelbar, d. h. mit Hülfe von Constructionen, die nur *Gerade* und *Kreise* erfordern, *durch das Segment einer Geraden ausdrücken lässt). Theorem von Fag-nano,* (1682—1766), veröffentlicht 1716, abgedruckt in Fag-nano's *Produzioni matematiche*, Bd. 2, p. 338, Pesaro 1750; vergl. M. Cantor's *Geschichte der Math.*, 3, p. 469.

Man betrachte nämlich zwei Punkte P, Q auf einem Ellip-senquadranten, deren Anomalien φ, ψ an die Relation

$$\operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} \psi = \frac{b}{a}$$

gebunden sind.

Bezeichnet man nun mit B bez. A die Endpunkte dieses Quadranten, zieht in P und Q die Tangenten an die Ellipse, fällt vom Centrum Lothe auf diese Tangenten und sind P_1, Q_1 die Fusspunkte dieser Lothe, *so ist die Differenz zwischen den Bogen PB und QA durch die Länge von PP_1 oder QQ_1 gegeben (diese beiden Längen sind gleich).*

Den Punkt Q hat, wenn P gegeben ist, Euler, *Nova Comm. Petr.*, 1761 auf die folgende Art construirt: Man zieht die Tangente in P bis zu ihrem Schnitt R mit der kleinen durch B gehenden Axe und trägt dann auf der Tangente die Länge $RPM = a$ ab; der Punkt des Quadranten, der dieselbe Abscisse, wie der Punkt M, hat, ist der gesuchte Punkt Q.

Siehe darüber die Noten 2 und 3 am Ende des Enne-per'schen Buches, *Ellipt. Funkt.*, Halle 1890.

Der Bogen der Hyperbel, deren Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

lautet, ergibt sich aus der Formel

$$a\left\{\frac{\sin\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{k\cos\varphi} - \frac{1}{k}\int_0^{\varphi} d\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} + \right.$$

$$\left. + \frac{k'^2}{k}\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\right\},$$

worin φ die oben definirte Anomalie bezeichnet und

$$k^2 = \frac{a^2}{a^2+b^2}, \quad k'^2 = \frac{b^2}{a^2+b^2} \quad \textit{ist.}$$

Er wird also durch elliptische Integrale 1ter und 2ter Gattung ausgedrückt.

Auch für die Hyperbel fand Fagnano, l. c., p. 338, 339 ein Theorem über die Rectification der Summe gewisser zweier Bogen, von denen der eine nach Belieben gewählt werden kann.

Ein Satz von Landen, *Phil. Trans.*, 1775 über die Bogen der Hyperbel *drückt einen Hyperbelbogen durch zwei Ellipsenbogen aus.*

Die Grenze der Differenz zwischen der Länge der Asymptote von dem Centrum aus bis zu einem Punkt P′ und der Länge des Hyperbelbogens vom Scheitel aus bis zu dem Punkt P, der dieselbe Abscisse hat, wie P′ (wobei die Lage der Axen aus der obigen Gleichung hervorgeht), ist, wenn P sich in das Unendliche entfernt, eine bestimmte Grösse.

Weitere Untersuchungen über die Ellipsen- und Hyperbelbogen findet man ausser bei Legendre, *Traité des fonct. ellipt.* 3 Bde., Paris 1826—1832, Bd. 1, p. 46 auch bei Küpper, *Crelle*, 55, 63.

Man habe eine gleichseitige Hyperbel, deren auf die Asymptoten bezogene Gleichung

$$xy = m^2 \text{ sei.}$$

Der Inhalt der Fläche zwischen einem Curvenbogen und der Asymptote $y = 0$ ist durch $m^2 \log\frac{\beta}{\alpha}$ gegeben, wenn unter β, α die Abstände der Endpunkte des Bogens von der anderen Asymptote $x = 0$ verstanden werden.

Für $m = 1$ und $\alpha = 1$ ist der Inhalt der Fläche zwischen einem vom Scheitel aus gerechneten Curvenbogen und einer Asymptote dem natürlichen Logarithmus des Abstands des Endpunkts des Bogens von der anderen Asymptote gleich.

Ueber andere Eigenschaften der gleichseitigen Hyperbel siehe Milinowski, *Elementar-synthetische Geometrie der Kegelschnitte*, 2. Ausg., Leipzig 1896, worin die Geometrie der gleichseitigen Hyperbel auf elementare Art behandelt wird.

Der Krümmungsradius in einem Punkt der Parabel ist das Doppelte des zwischen dem Punkt und der Directrix liegenden Abschnitts der Normalen.

Die Evolute der eigentlichen Parabel ist eine semicubische Parabel, die auch Neil'sche Parabel genannt wird; wenn $y^2 = 2px$ die Gleichung der Parabel darstellt, so ist die Gleichung der Evolute

$$y^2 = \frac{8}{27p}(x - p)^3.$$

Der vom Scheitel aus gerechnete Parabelbogen ist

$$s = \frac{y\sqrt{y^2 + p^2}}{2p} + \frac{1}{2}p \log \frac{y + \sqrt{y^2 + p^2}}{p}.$$

§ 9. Cissoiden. Die Agnesi'sche Curve 3ter Ordnung oder Versiera. Die Maclaurin'sche Dreitheilungscurve (Trisectrix). Die Strophoide. Das Folium.

Die wichtigste *Cissoide* ist die Diokles'sche; sie führt ihren Namen nach dem Griechen Diokles, der im ersten Jahrhundert vor Christi Geburt lebte und sie zur Auflösung des Problems der *Verdoppelung des Cubus (des Delischen Problems)* zu benutzen dachte; siehe Moritz Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, 3 Bde., Leipzig 1892—1898, Bd. 1, p. 302—306. Dieser Curve bedienten sich auch die alten Mathematiker zur *Bestimmung der zwei mittleren Proportionalen*. Siehe Newton, *Arithmetica universalis*, Lugd. Batav. 1732, p. 231.

Die Curve wird auf die folgende Art erzeugt: Man habe einen festen rechten Winkel, von dem ein Schenkel OP eine bestimmte Länge $OP = a$ hat; von einem anderen beweglichen rechten Winkel gehe der eine Schenkel durch P, während der Endpunkt des anderen Schenkels von der festen Länge $2a$ auf

dem zweiten Schenkel des ersten rechten Winkels läuft: *D Ort des Mittelpunkts des Schenkels, dessen Länge* $2a$ *beträgt, die Cissoide.* Newton.

Die Gleichung der Curve lautet:

$$x^3 = y^2(2a - x).$$

Der Punkt $x = 0$ *ist eine Spitze; die Gerade* $x = 2a$ *ei Asymptote; die Curve ist von convexer Krümmung gegen x-Axe. Sie ist eine circulare Curve, d. h. sie geht durch beiden unendlich fernen imaginären Kreispunkte der Ebene.*

Die Cissoide kann auch auf eine andere Art constru werden: Man beschreibe einen Kreis mit dem Radius a; AB einer seiner Durchmesser und BT die Tangente an den Kr in B. Von A aus werden alle Geraden AMN gezogen, welc den Kreisumfang in M und die Tangente BT in N schneid Trägt man nun auf AN die Längen $AP = MN$ ab, *so der Ort der Punkte P die Cissoide.*

Der Inhalt der Fläche, die zwischen der Curve und ih Asymptote (d. h. also der Geraden BT) liegt, ist dreimal gross, als der Inhalt des Kreises, der zu ihrer Construction nutzt wurde.

Die Cissoide ist die Fusspunktcurve (vergl. § 2) *einer P rabel in Bezug auf den Scheitel der Parabel.*

Es lassen sich auch *schiefe Cissoiden* auf ähnliche Art w die Cissoide des Diokles mit Hülfe eines Kreises construire *nur wird anstatt eines Durchmessers eine Sehne des Krei benutzt.*

Wird dann ferner statt eines Kreises ein Kegelschn genommen, so erhält man *die Cissoide von Zahradnik, G nert's Arch.,* 56, p. 8; *Nouv. Corr. math.,* 1874—75, p. 86.

Die Cissoide ist immer *eine rationale Curve* 3ter *Ordnu*

Es sei ein Kreis mit zwei aufeinander senkrechten Durc messern gegeben. Von dem Endpunkt O des horizontalen Durc messers wird eine Gerade gezogen, die den Umfang in und den verticalen Durchmesser in B schneidet; durch die Punk A, B werden dann Parallele zu den beiden Durchmessern g legt, die sich in dem Punkt P treffen. Der Ort der Punkte ist *die Curve* 3ter *Ordnung oder Versiera von Agnesi* (174 *Sie ist eine cubische Curve mit einem Doppelpunkt im Unendliche*

Ihre Gleichung lautet

$$y^2x + r^2(x - 2r) = 0;$$

labei ist r der Radius des Kreises, der zu ihrer Construction enutzt wurde. Vergl. auch Schlömilch, *Uebungsb. z. Stud. ler höh. Analysis,* Leipzig 1868, Thl. 1, p. 71 (neueste Aufl., b., 1. Thl., 1887, 2. Thl., 1882).

Um die Tangente an die Curve in P zu construiren, lege nan durch A eine Tangente an den Kreis, welche den verti-alen Durchmesser in M schneidet, und trage nach der ent-gegengesetzten Richtung hin $AM' = AM$ ab, nehme dann von) aus auf der entgegengesetzten Seite von A auf der Geraden)AB die Strecke $OR = AB$, ziehe durch R eine horizontale erade bis zu ihrem Schnittpunkt S mit der durch A gehenden erticalen und durch S die Parallele zu RM', die den horizon-alen Durchmesser in K trifft. Die durch K gezogene Verticale schneidet die Tangente AM an den Kreis in einem Punkt T, ler, mit P verbunden, die Tangente an die Curve liefert.

Die Tangente an den Kreis im Punkt O ist eine Asymptote ler Curve.

Der Inhalt der zwischen der Curve und ihrer Asymptote iegenden Fläche ist das Vierfache des Inhalts des zur Con-truction der Curve dienenden Kreises.

Lässt man die Curve und den zu ihrer Construction be-utzten Kreis um die Asymptote rotiren, so entstehen zwei Körper, von denen der erste ein doppelt so grosses Volumen hat, als der zweite.

Diese Curve wurde von Maria Gaetana Agnesi in ihren *Istituzioni analitiche,* Milano 1748 studirt. Viele Angaben auch iber andere ähnliche Curven, die einige Autoren mit der Agnesi'schen Versiera verwechselt haben, findet man bei Loria, *Bibliotheca math.*, 1897, p. 7.

Die von G. de Longchamps in seinem *Essai sur la Géom. de la règle* etc., Paris 1890, p. 111 untersuchte Curve ist *nicht* die Versiera der Agnesi, sondern eine Curve, deren Ordinaten bezüglich doppelt so lang, als die der Versiera sind. G. Loria hat vorgeschlagen, sie *Pseudoversiera* zu nennen.

Die sogenannte *Maclaurin'sche Trisectrix oder Drei-theilungscurve* wird durch die Gleichung

$$x(x^2 + y^2) = \frac{r}{2}(y^2 - 3x^2) \quad \text{dargestellt.}$$

Sie wird auf die folgende Art construirt: Man habe einen Kreis vom Radius r und Centrum C mit einem horizontalen Durchmesser OCO' und einer Geraden, die im Mittelpunkt von OC auf OC senkrecht steht. Von dem Endpunkt O des Durchmessers ziehe man eine Gerade, die den Kreis in A und die verticale Gerade in B schneidet, und trage auf OAB in *entgegengesetzten* Richtungen $OP = AB$ ab; *der Ort der Punkte P ist die Dreitheilungscurve.*

Sie ist eine Curve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt in O.

Die in A an den Kreis gelegte Tangente schneidet die verticale Gerade in M; nimmt man in entgegengesetzten Richtungen $AT = AM$, *so ist TP die Tangente an die Curve.*

Die Curve ist eine Theilungscurve, vergl. § 5. Weitere Eigenschaften findet man in dem am Ende des § 6 citirten Werk von Brocard.

Ueber ihre *Rectification* durch elliptische Functionen siehe Longchamps, *Compt. Rend.*, 1887.

Wenn man bei der vorstehenden Construction annimmt, da auf dem horizontalen Durchmesser errichtete Loth gehe stat durch den Mittelpunkt von OC durch C (das Centrum), un im Uebrigen die Construction nicht ändert, so ergibt sich di sogenannte *rechtwinklige*, oder auch *logocyclische Strophoide*, *deren Gleichung*

$$r(x^2 - y^2) = x(x^2 + y^2) \quad \textit{lautet.}$$

Sie ist eine Curve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt in O. Die Tangente wird ebenso construirt, wie bei der Dreitheilungscurve.

Die Strophoide ist auch die Fusspunktcurve einer Parabel in Bezug auf den Schnitt der Directrix mit der Parabelaxe; der Scheitel der Parabel liegt in C und die Directrix ist die den Kreis in O berührende Gerade.

Wird C rechtwinklig auf den Radiusvector OP projicirt, so fällt die Projection in den Mittelpunkt der Strecke PB.

Wenn bei der obigen Construction der Strophoide angenommen wird, die durch C gehende Gerade stehe nicht senkrecht auf dem horizontalen Durchmesser, sondern sei schief zu ihm, so erhält man *die schiefe oder focale Strophoide von Quetelet*, die man auch als *die Fusspunktcurve einer Parabel in Bezug auf einen beliebigen Punkt der Directrix* ansehen kann.

Ueber die Literatur, die Geschichte und weitere Eigen-haften dieser Curve siehe die Artikel von Tortolini in den ouv. *Ann.*, 1861, p. 82, von Loria, *Boll. di Bibliogr. delle ienze mat.*, 1898, p. 1 und die Angaben in dem § 6 citirten uch von Brocard; vergl. auch einen neueren Aufsatz von choute, *Crelle*, 99 und die Notizen in dem (in Paris erschei-nden) *Intermédiaire des math.* 1895, p. 425; 1896, p. 278.

Das Folium von Descartes (das Cartesische Blatt) ist ne weitere rationale Curve 3ter Ordnung, deren Gestalt der reitheilungscurve und der Strophoide äusserst ähnlich ist.

Sie hat

$$x^3 + y^3 = 3rxy$$

ır Gleichung, oder, wenn man die Axen um 45^0 dreht,

$$r(x^2 - y^2) = x(x^2 + 3y^2).$$

Um die Curve geometrisch zu erhalten, construire man e rechtwinklige Strophoide so, wie oben angegeben wurde, ıd nehme dann auf dem Radiusvector OPB den harmonisch it O in Bezug auf das Segment PB conjugirten Punkt Q an; *r Ort der Punkte Q ist das Folium.*

Die Tangente in Q findet man, wenn, wie oben, die Tan-nte an die Strophoide in P gezogen und dann Q mit dem ınkt verbunden wird, in dem diese Tangente den verticalen urchmesser trifft.

Die Curve wurde von Roberval studirt, der ihr irrthüm-ıher Weise die Form beilegte, von welcher sie den Namen ıt. Auch Descartes beschäftigte sich mit ihr. Näheres findet an in dem citirten Buch von Brocard.

10. Cassini'sche Ovale. Die Lemniscaten Bernoulli's und Gerono's. Die Watt'sche Curve.

Cassini'sche Ovale (Cassinoiden oder Cassini'sche Ellipsen, 580) heissen die ebenen Curven, für die das Product aus den bständen eines Curvenpunkts von zwei festen Punkten *(den rennpunkten)* constant bleibt.

Ist $2a$ der Abstand der festen Punkte und b^2 das Product r Abstände eines Curvenpunkts, *so lautet die Gleichung der ırve in rechtwinkligen Cartesischen Coordinaten:*

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = b^4 - a^4,$$

wenn die Brennpunktsaxe und das in dem Mittelpunkt der Brennpunkte verbindenden Strecke errichtete Loth zu Coordinat axen genommen werden.

In Polarcoordinaten ϱ und φ lautet die Gleichung:

$$\varrho^4 - 2a^2\varrho^2 \cos 2\varphi = b^4 - a^4.$$

Die unendlich fernen imaginären Kreispunkte sind Dopp punkte der Curve. Die Curve ist von der 8ten Classe.

Der Krümmungsradius ist

$$R = \frac{2b^2\varrho^3}{3\varrho^4 - b^4 + a^4}.$$

Wenn $b < a$ ist, so besteht die Cassini'sche Curve aus z Ovalen, von denen jedes ausserhalb des anderen liegt; für $b =$ ergibt sich die Lemniscate (siehe unten); für $a\sqrt{2} > b > a$ die Curve die Form einer an den Enden der kleinen Axe gedrückten Ellipse; für $b > a\sqrt{2}$ besteht sie aus einem einzi Oval.

Um die Tangente in einem Punkt P zu erhalten, erric man in den Brennpunkten F, F' Lothe auf die Brennstrah FP, F'P und zieht dann durch P eine Gerade, welche d Lothe so trifft, dass P der Mittelpunkt der zwischen den Lot enthaltenen Strecke wird.

Wenn man in die Cassini'sche Curve ein Parallelogra einschreibt, welches denselben Mittelpunkt, wie die Curve, hat ist die algebraische Summe der Winkel, unter welchen die ge überliegenden Seiten von einem Punkt der Curve aus erschei constant. Darboux, *Sur une classe remarquable des courbes* 2. édit., Paris 1896, p. 82.

Eine allgemeinere Classe von algebraischen Curven, we die Cassinoide als speciellen Fall enthält, hat Darboux, p. 61 u. ff. studirt.

Die *Lemniscate* von Jacob Bernoulli, *Acta Erud.*, 1 erhält man für $b = a$.

Sie lässt sich auch als eine Curve definiren, die auf die gende Art construirt wird:

Man beschreibt einen Kreis und zieht zwei aufeina senkrechte Tangenten an ihn, die sich in O treffen. Auf j durch O gezogenen Geraden G trägt man dann die Stre $\pm OP$ ab, welche dieselbe Länge, wie die durch G bestin Sehne des Kreises haben. *Der Ort der Punkte P ist die Lemnis*

Eine andere Erzeugungsweise ist die folgende:

Sie ist der Ort der Fusspunkte der von dem Centrum O ner gleichseitigen Hyperbel auf die Tangenten gefällten Lothe lie Fusspunktcurve von O in Bezug auf die gleichseitige Hyperbel). Man nennt sie desshalb auch *hyperbolische Lemniscate.*

Die Lemniscate ist auch ein specieller Fall der Watt'schen urve, d. h. der von dem Angriffspunkt der Kolbenaxe in dem genannten Watt'schen Gliederparallelogramm (1784) *beschrieenen Curve.* Siehe Brocard l. c.

Sie hat die Form der Ziffer 8 *und hat einen Doppelpunkt O; die Winkel, welche die beiden Tangenten in O mit der Focalaxe bilden, sind* $\frac{1}{4}\pi$, $\frac{3}{4}\pi$.

Der durch O gehende Durchmesser ist offenbar eine Symetrieaxe und enthält die beiden Brennpunkte (Focalaxe).

Der Winkel, den die Tangente an die Curve im Punkt P it dem durch O gehenden Radiusvector OP bildet, ist, um nen Rechten vermindert, doppelt so gross als der Winkel wischen PO und der Focalaxe. Daher auch:

Die Neigung der Normalen gegen die Focalaxe ist dreimal gross, als die Neigung des Radiusvectors gegen diese Axe.

Die Projection des Krümmungsradius auf den Radiusvector t der dritte Theil des Radiusvectors.

Die Gleichung für rechtwinklige Coordinaten lautet (wenn ie Focalaxe und das in *O* auf ihr errichtete Loth zu Coordinaenaxen genommen werden):

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0.$$

Die Gleichung für Polarcoordinaten ist (wenn O zum Pol enommen wird und die Polaxe mit der Focalaxe zusammenfällt):

$$\varrho^2 = 2a^2 \cos 2\varphi.$$

Der Krümmungsradius ist

$$R = \frac{2a^2}{3\varrho}.$$

Der Flächeninhalt des von der Lemniscate eingeschlossenen Theils der Ebene wird durch $2a^2$ *gemessen.*

Die Evolute der Lemniscate hat die Gleichung:

$$\left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right)\left(x^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}a.$$

Das Volumen des Körpers, der durch die Rotation de Lemniscate um ihre Focalaxe erzeugt wird, ist

$$a^3\sqrt{2\pi}\left\{-\frac{1}{3}+\frac{1}{\sqrt{2}}\log\left(1+\sqrt{2}\right)\right\}.$$

Der Lemniscatenbogen ist durch die Formel

$$s = a\sqrt{2}\int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1-r^4}}, \quad r = \frac{\varrho}{a\sqrt{2}}$$

gegeben, in welcher ϱ den Radiusvector bedeutet.

Wie man daraus erkennt, besitzt die Lemniscate die Eigen schaft, dass sich ihr Bogen durch ein elliptisches Integra 1ter Gattung ausdrücken lässt. Der diesem elliptischen Integr entsprechende Legendre'sche Modul ist $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Siehe *Reper* 1, p. 417.

Setzt man

$$r = \frac{u\sqrt{2}}{\sqrt{1-u^2}},$$

so wird

$$\frac{dr}{\sqrt{1-r^4}} = \frac{2\,du}{\sqrt{1-u^4}},$$

so dass man also, wenn ein Bogen gegeben ist, dem der Radius vector $ar\sqrt{2}$ entspricht, durch die vorstehende algebraisch Formel (die Relation zwischen r und u) den Radiusvect $au\sqrt{2}$ finden kann, welcher der Hälfte des Bogens entsprich Man hat so ein Mittel, das Problem der *Halbirung des Lemn scatenbogens* algebraisch aufzulösen.

Der Quadrant der Lemniscate lässt sich algebraisch i 3 und 5 gleiche Theile zerlegen, mithin auch in jede durch 2 $3\cdot 2^m$, $5\cdot 2^m$ gegebene Anzahl von Theilen. Theorem von Fa gnano, *Produzioni mat.,* Pesaro 1750, 2, p. 368.

Wir fügen noch das Abel'sche Theorem, *Crelle,* 3 hinz

Man kann immer durch Kreise und Gerade den Quadra ten der Lemniscate in n gleiche Theile zerlegen, wenn n en weder von der Form 2^m oder eine Primzahl von der Gesta 2^m+1 oder das Product mehrerer verschiedener Zahlen dies Art ist.

Abel wies ins Besondere auch nach, dass sich dazu ein Methode verwenden lasse, die der von Gauss für die Ze

egung des Kreisumfangs in gleiche Theile gefundenen Methode Auflösung der binomischen Gleichungen, siehe *Repert.* 1, p. 95 u. ff.) analog ist. Es scheint dies Gauss selbst schon bekannt gewesen zu sein. Vergl. *Werke*, 1, p. 412, 413; *Disqu. arithm.*

Ausser Fagnano l. c. und den Aufsätzen Euler's, *Mém. le St. Pétersb.*, 5, 1751, 1752 sind von Arbeiten über die Lemniscatentheilung (welche mit der complexen Multiplication der elliptischen Functionen, *Repert.*, 1, p. 445, zusammenhängt) noch zu erwähnen: Libri, *Crelle*, 10; Liouville, *Compt. Rend.*, 17, 1843, p. 635; *Journ. de Liouville*, 8, 1843, p. 507; Clausen, *Astron. Nachr.*, 1842; Wichert, *Progr. des Konitzer Gymn.*, 1846; Eisenstein, *Crelle*, 30, 39; Hoffmann, *Crelle*, 48; Kiepert, ib., 75; Schwering, *Crelle*, 111. Die zu dem Integral der Lemniscate inverse Function pflegt man *lemniscatische Function* zu nennen. Näheres findet man bei Enneper, *Ellipt. Funct., Theor. u. Gesch.*, 2. Aufl., Halle 1890, p. 382, 531, 546.

Chasles, *Compt. rend.*, 21, 1845, p. 199 fand, indem er die Lemniscate durch die gleichseitige Hyperbel entstehen liess (siehe oben) und dabei den Punkten der gleichseitigen Hyperbel die Punkte der Lemniscate zuordnete, *dass zweien Bogen der Hyperbel, deren Differenz rectificirbar ist, rectificirbare Bogen der Lemniscate entsprechen.*

Mit den Curven, deren Bogen, wie bei der Lemniscate, sich durch elliptische Integrale 1ter Gattung ausdrücken lassen, beschäftigten sich Legendre, *Traité des fonct. ellipt.*, Paris 1826—1832, 2, p. 590 und später Roberts, *Journ. de Liouv.*, 9; Serret, ib., 10 sowie *Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung*, Bd. 2, *Integralrechnung*, herausgeg. von Bohlmann, Leipzig 1899. Weitere Einzelheiten findet man bei Enneper, l. c., p. 560; siehe auch Cayley, *An elem. treat. on ellipt. funct.*, Cambridge 1876, Kap. 3, 15.

Der Perimeter der ganzen Lemniscate lässt sich durch die Reihe ausdrücken:

$$4\sqrt{2}\cdot a\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{9}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{13}+\cdots\right).$$

Die Lemniscate Gerono's. Eine Curve, die grosse Aehnlichkeit mit der Bernoulli'schen Lemniscate hat und deshalb auch von einigen Autoren mit ihr verwechselt wurde (siehe *Intermédiaire des math.*, 1897, p. 98 und p. 190, 191), ist die *Gerono'sche Lemniscate*, wie sie von Einigen, oder die *Curve*

von der Form einer Acht (ad otto), wie sie von Anderen g nannt wird. *Ihre Gleichung lautet in der einfachsten Gestalt:*

$$y^4 = y^2 - x^2.$$

Sie wird folgendermassen construirt: Man projicirt ein Punkt P eines Kreises orthogonal auf einen Durchmesser na P' und auf die in dem Endpunkt dieses Durchmessers an d Kreis gelegte Tangente, verbindet dann den Mittelpunkt mit de Fusspunkt der letzteren Projection und bestimmt den Schnit punkt dieser Verbindungsgeraden mit der ersteren projicirend Geraden, d. h. mit PP'. *Der Ort dieser Schnittpunkte ist d Lemniscate Gerono's.*

§ 11. Ovale von Cartesius. Pascal'sche Schneckenlini Cardioide. Conchoide des Nicomedes. Spirische Curve

Die Cartesischen Ovale (aplanetischen Curven) haben w schon auf S. 201 besprochen. Sie sind Curven 4ter Ordnu *mit zwei Spitzen in den beiden unendlich fernen imaginär Kreispunkten der Ebene* und daher *circulare Curven.*

Wir wollen die Sätze nicht wiederholen, die wir berei früher an dem angegebenen Ort aufgestellt haben, und füg nur hinzu:

Die Gleichung der Curve für Cartesische Coordinaten lä sich schreiben:

$$(x^2 + y^2 - a^2)^2 + b(x - d) = 0;$$

für Polarcoordinaten, wenn ein Brennpunkt (vergl. S. 201) *zu Pol genommen wird:*

$$\varrho^2 - (a + b\cos\varphi)\varrho + c^2 = 0;$$

und für bipolare Coordinaten, wenn ϱ, ϱ' die von zwei Bren punkten der Curve ausgehenden Radienvectoren bezeichnen:

$$l\varrho + m\varrho' = c,$$

worin l, m, c Constante bedeuten.

Die Curve hat drei reelle in einer Geraden liegende Bren punkte, wenn man im Allgemeinen unter *Brennpunkten ein Curve* die Schnittpunkte der von den beiden Kreispunkten d Ebene an die Curve gezogenen Tangenten versteht; *die beid Kreispunkte gehören im vorliegenden Fall der Curve an u sind Spitzen für sie.*

Chasles entdeckte zuerst den dritten Brennpunkt der urve, während Cartesius nur zwei Brennpunkte angenommen tte.

Man kann sich die Curve als Ort der dritten Ecke eines reiecks erzeugt denken, dessen beide andere Ecken (die Endnkte der Basis) sich auf zwei Kreisumfängen bewegen, während sich die Basis um einen Punkt dreht (d. h. sich so verhiebt, dass sie denselben Abstand von einem Punkt behält), elcher auf der die Mittelpunkte der Kreise verbindenden Geraden gt, und während die beiden Seiten um diese Mittelpunkte tiren. *Diese Centren sind zwei Brennpunkte der Curve.*

Eine optische Eigenschaft der Brennpunkte der Cartesihen Ovale lautet:

Die von einem der Brennpunkte ausgehenden und von der urve gebrochenen Strahlen, deren Brechungsexponent dem Veriltniss der Radien der beiden Kreise gleich ist, die zur Erzeung der Curve dienen, laufen in einem anderen Brennpunkt usammen.

Die Cartesischen Ovale sind Evolventen der Brennlinie rch Refraction für einen Kreis. Vergl. Salmon-Fiedler, b. Curv., 2. Aufl. p. 127.

In der ältesten uns bekannten analytischen Geometrie vom hr 1637, welche Cartesius zum Verfasser hat, werden zum sten Mal die Eigenschaften der Cartesischen Ovale untersucht.

Der neueren Zeit angehörige Arbeiten über sie sind von enocchi, *Nouv. Ann.*, 14, 1855, p. 202, 260; *Mathesis*, 884; Zeuthen, *Nouv. Ann.*, 1864, p. 304; Sylvester, *Phil. Iag.*, 31, 1866; D'Ocagne, *Compt. Rend.*, 97, 1883, p. 1424.

Reichhaltige literarische Angaben findet man bei Liguine, Bull. de Darboux, 1882 und in dem *Interm. des math.*, 1896, . 238, 239.

Ueber die Rectification der Cartesischen Ovale durch drei llipsenbogen siehe Genocchi, *Ann. di Mat.*, (1) 6, p. 111; Compt. Rend., 80, 1875, p. 112.

Die Pascal'sche Schneckenlinie, Limaçon, it. *Lumaca.* Wenn n der Gleichung der Cartesischen Ovale für Polarcoordinaten = 0 gesetzt wird, so erhält man die Gleichung (für Polarordinaten) der *Pascal'schen Schneckenlinie, die nicht nur die Kreispunkte zu Spitzen hat, sondern auch in dem Coordinaten-*

anfang einen Doppelpunkt besitzt. Die Curve erhielt ihren Nan von Roberval, *Mém. de l'Ac. de Paris,* 1708, p. 78. Sie wu wohl von Etienne Pascal, dem Vater von Blaise Pas entdeckt. Vergl. M. Cantor's *Geschichte der Math.,* Bd. p. 882. Ihre Gleichung in Polarcoordinaten kann

$$\varrho = a + b \cos \varphi$$

geschrieben werden und in rechtwinkligen Coordinaten:

$$(x^2 + y^2 - bx)^2 = a^2(x^2 + y^2).$$

Die Curve lässt sich als eine *Fusspunktcurve* und a als eine *Conchoide* auffassen. Vergl. die §§ 2 und 4.

Die Pascal'sche Schneckenlinie ist eine Conchoide des Kre und auch eine Fusspunktcurve des Kreises:

Auf einem Durchmesser eines Kreises vom Radius a nin man einen Punkt P an, der vom Mittelpunkt um die Läng absteht. *Die Fusspunktcurve von P in Bezug auf den K ist die Pascal'sche Schneckenlinie mit der eben angegebe Gleichung.*

Man ziehe ferner den Kreis, dessen Durchmesser die Mittelpunkt des Kreises mit P verbindende Strecke ist; *t man nun auf den von P aus nach diesem Kreis gezog Radienvectoren auf beiden Seiten des Endpunkts eines je Radiusvectors Strecken ab, die constant gleich a sind, so er man wieder die Pascal'sche Schneckenlinie.*

Andere Constructionen sind:

Sie ist die inverse Curve (vergl. § 1) *eines Kegelschn wenn ein Brennpunkt des Kegelschnitts zum Centrum der In sion genommen wird.*

Hat man ein in einen Kreis eingeschriebenes Drei dessen eine Ecke A festliegt und dessen Winkel A cons bleibt, *so ist die Pascal'sche Schneckenlinie der Ort der M punkte der von innen und von aussen in das Dreieck eingesc benen Kreise.*

Sie ist auch der Ort des Scheitels eines constanten Win dessen Schenkel zwei gegebene Kreisperipherien berühren.

Sie ist ferner eine Roulette (vergl. § 6), *die von ei Punkt erzeugt wird, der mit der Ebene eines Kreises fest ver den ist, der auf einem anderen Kreis von gleichem Radius r*

Ein specieller Fall der Pascal'schen Schneckenlinie ist *Cardioide, die man für $a = b$ erhält.*

Diese Curve kann man sich entstanden denken: als Ort eines Punktes eines Kreisumfangs, der auf einem anderen von gleichem Radius rollt; oder als Fusspunktcurve eines Kreisumfangs in Bezug auf einen Punkt des Umfangs; oder als Conchoide eines Kreises in Bezug auf einen seiner Punkte, wenn dem Durchmesser gleiche Strecken abgetragen werden; oder als die Inverse einer Parabel, wenn das Centrum der Inversion im Brennpunkt liegt.

Die Normale in einem Punkt der Cardioide geht durch den Berührungspunkt der beiden Kreise, die zu ihrer Erzeugung als Roulette dienen.

Die Cardioide hat einen 6mal so grossen Flächeninhalt, wie der Kreis, dessen Conchoide sie ist, und einen $\frac{3}{2}$mal so grossen, wie der Kreis, dessen Fusspunktcurve sie darstellt. Der letztere Kreis hat einen doppelt so grossen Radius, wie der erstere, und der erstere ist den Kreisen gleich, die zur Erzeugung der Cardioide als Roulette dienen.

Die Cardioide ist 16mal so lang, als der Radius des Kreises, dessen Conchoide sie ist, und 8mal so lang, als der Radius des Kreises, von dem sie die Fusspunktcurve ist.

Der Krümmungsradius in einem Punkt ist $\frac{2}{3}$ des Segments, welches die mittlere Proportionale zwischen dem Radiusvector und dem Durchmesser des Kreises darstellt, dessen Fusspunktcurve die Cardioide ist.

Die *Conchoide des Nicomedes* ist die *Conchoide* (vergl. § 4) einer Geraden.

In Polarcoordinaten lautet ihre Gleichung:

$$\varrho = \frac{a}{\cos\omega} \pm b$$

und in Cartesischen Coordinaten:

$$y^2(x-a)^2 = x^2(b+a-x)(b-a+x),$$

worin a den Abstand des Punkts von der Geraden, die als Basis dient, und b die Länge des constanten Segments bezeichnet, das auf dem Radiusvector abgetragen wird.

Die zu Grund liegende Gerade ist offenbar eine Asymptote der Conchoide.

Die *Tangente* wird nach der für alle Conchoiden geltenden Methode construirt. Siehe § 4.

Vergl. die ausführliche Schilderung bei M. Cantor, *G schichte der Math.*, 1, 2. Aufl., Leipzig 1894, p. 334.

Die *Conchoide* oder *Muschellinie des Nicomedes* hat au ausser zur Auflösung des *Delischen Problems* der Würfelverdopp lung zur Dreitheilung des Winkels gedient. Nach den Angab des Proclus hat Nicomedes selbst mit ihr jeden Winkel drei gleiche Theile zerlegt. Cantor, l. c., p. 337.

Newton, *Arithm. univ.*, p. 115 verwendete sie zur Au lösung der Gleichungen 3ten und 4ten Grads.

Spirische Curven heissen die Schnitte des *Torus* (der dur Rotation eines Kreises um eine in seiner Ebene liegende Gera erzeugten Ringfläche; siehe Kap. 12, § 7) mit Ebenen, die c Rotationsaxe des Torus parallel sind.

Sie haben die beiden Kreispunkte der Ebene zu Dopp punkten und sind im Allgemeinen 4ter Ordnung.

Specielle Fälle dieser Curven sind die Cartesischen Ova die Lemniscate, etc.

Wir machen darauf aufmerksam, dass einige Autoren üb haupt alle Curven, die durch die Kreispunkte der Ebene geh die sogenannten *circularen Curven, spirische* genannt haben. Sie Darboux, *Sur une classe remarquable etc.*, 2. éd., Paris 18

Ueber die Geschichte der Torusschnitte vergl. Schiap relli, *Le sfere omocentriche di Eudosso, Callippo* etc., *Mem. Lomb.*, (3), 13, p. 117, 1874, deutsch von W. Horn in Münch und Tannery, *Bull. des sciences math.*, 1884.

§ 12. Cycloide. Trochoide. Hypocycloide. Epicycloi Astroide. Vierspitzige Curven.

Die eigentliche *Cycloide* ist die Curve, welche von d Punkt der Peripherie eines auf einer Geraden, der Basis, roll den Kreises vom Radius r erzeugt wird.

Ihre Gleichung für cartesische Coordinaten ist

$$x = r \arccos \frac{r - y}{r} - \sqrt{2ry - y^2}.$$

Nennt man θ den Winkel, den die Gerade, welche Punkt P der Curve und das Centrum des erzeugenden Kre verbindet, mit der auf der Basis (der x-Axe) senkrecb Geraden bildet, *so lassen sich die Coordinaten x und y vo als Functionen von θ durch die Formeln*

$$x = r(\theta - \sin\theta),$$
$$y = r(1 - \cos\theta)$$

usdrücken.

Die Differentialgleichung der Cycloide lautet

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2r - y}{y}}$$

nd *ihre natürliche Gleichung:*

$$\varrho^2 + s^2 = 16r^2.$$

Die Normale in P ist die Gerade, welche P mit dem Punkt 1 *verbindet, in welchem der Kreis die Basis berührt.*

Verlängert man die Normale über A hinaus um eine Strecke leich *PA, so ist der Endpunkt dieser Strecke der Krümmungs-*nittelpunkt.

Die Evolute der Cycloide ist wieder eine Cycloide, die der egebenen *gleich ist.*

*Der Inhalt der zwischen der Basis und einem der Cycloiden-*weige *liegenden Fläche ist dreimal so gross als der Inhalt des Erzeugungskreises.*

Der Bogen eines Cycloidenzweiges ist acht mal so lang als ler *Radius des Erzeugungskreises.*

Durch die Cycloide wird *das Problem der Brachistochrone* gelöst. Siehe *Repert.*, 1, p. 250.

Die Cycloide ist auch diejenige von allen durch zwei Punkte gehenden *Curven, für die der Flächeninhalt der von ihr, ihrer Evolute und den beiden Normalen in den Endpunkten begrenz-*ten *Figur der kleinste ist.* Siehe *Repert.*, 1, p. 253.

Die Cycloide ist auch eine tautochrone Curve, weil sie die ausgezeichnete Eigenschaft besitzt, dass ein schwerer Punkt, von welcher Anfangslage er auch ohne Geschwindigkeit ausgehe, immer dieselbe Zeit gebraucht, um, ihre Bogen durchfallend, zu ihrem tiefsten Punkt zu gelangen. Dabei muss ihre Basis horizontal liegen und ihre concave Seite nach oben gekehrt sein. Huyghens, *Horologium oscillatorium*, 1673.

Ueber die tautochronen Curven und ihre Geschichte siehe eine Monographie von Orthmann, Berlin 1872 und von Amodeo, Avellino 1883.

Die Cycloide ist eine in der Geschichte der Mathematik berühmte Curve. Sie wurde von Pater Mersenne und von Galilei untersucht; Roberval fand 1634 ihre Quadratur und

Cartesius die Construction ihrer Tangente; später beschäftigt sich mit ihr Blaise Pascal, Huyghens, die Bernoulli, et

Näheres findet man bei Chasles, *Aperçu hist.*, p. 52 Günther, *Bibl. math.*, 1887, p. 8 und Brocard, l. c., sow in M. Cantor's *Geschichte der Math.*, Bd. 2 und 3 (siehe daselb im Register das Stichwort „Cycloide").

Man nennt *verlängerte (gedehnte* oder *gestreckte)* bez. *verkürz (verschlungene) Cycloiden* oder allgemein *Trochoiden* die Curve welche von einem Punkt beschrieben werden, der mit der Ebe eines auf einer Geraden rollenden Kreises starr verbunden ist, u dessen Abstand vom Centrum des Kreises *kleiner* bez. *gröss* als der Radius ist. Bezeichnet a diesen Abstand und r d Radius des Kreises, *so lautet die Gleichung der Curve:*

$$x = r \arccos \frac{r - y}{a} - \sqrt{a^2 - (r - y)^2}.$$

Rollt ein Kreis vom Radius r auf einem anderen vo Radius R, so wird die von einem Punkt des Umfangs beschr bene Curve *Epicycloide* genannt, wenn jeder der beiden Krei ausserhalb des anderen liegt, und *Hypocycloide*, wenn der ei sich innerhalb des anderen befindet.

Die Coordinaten eines Punkts sind:

$$\left.\begin{aligned} x &= (r + R)\cos\theta + r\cos\frac{r + R}{r}\theta \\ y &= (r + R)\sin\theta - r\sin\frac{r + R}{r}\theta \end{aligned}\right\} \text{ für die Epicycloide.}$$

Für die Hypocycloide hat man nur $R + r$ *mit* $R - r$ *vertauschen.*

Die Evoluten oder Evolventen der Epicycloiden oder Hyp cycloiden sind Curven derselben Art.

Für $r = R$ *erhält man die Cardioide.* Siehe § 10.

Wenn $r = \frac{R}{4}$ *ist und der bewegliche Kreis sich im Inne des festen befindet, so ergibt sich die vierspitzige Hypocycloi oder Astroide, deren Gleichung*

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = R^{\frac{2}{3}} \quad \textit{lautet.}$$

Die natürliche Gleichung der Astroide ist:

$\varrho^2 + 4s^2 = 9R^2$, Cesàro, *Nouv. Ann.*, 1885, p. 258.

Der Perimeter der Astroide ist sechsmal so gross als der dius des festen Kreises und der Flächeninhalt $\frac{3}{8}$ des Flächen- alts dieses Kreises.

Die Astroide ist auch die Enveloppe einer Geraden von stanter Länge, deren Endpunkte auf zwei zueinander senk- hten Geraden gleiten.

Für $r = \frac{R}{3}$ erhält man *die dreispitzige, dreieckige oder inер'sche Hypocycloide.*

Die dreispitzige Hypocycloide ist die Enveloppe der soge- nten Simpson'schen oder Wallace'schen Geraden in Bezug das Dreieck, welches die drei Spitzen zu Ecken hat, d. h. der raden, auf welchen die Fusspunkte der von einem Punkt des schriebenen Kreises auf die Seiten gefällten Lothe liegen. Siehe iter oben Kap. 2, § 7, S. 67, *die Dreiecksgeometrie.*

Epitrochoiden ist der allgemeine Name der Curven, welche ı einem Punkt der Ebene eines Kreises erzeugt werden, der einem anderen festen Kreis rollt und ihn dabei von aussen ührt. Specieller erhält man dann *verkürzte* oder *verlängerte icycloiden*, je nachdem der betreffende Punkt ausserhalb oder erhalb des beweglichen Kreises liegt. Analoge Definitionen ten für die *Hypotrochoiden*, die ebenso wieder in *verkürzte* l *verlängerte Hypocycloiden* zerfallen.

Die Epi- und Hypocycloiden wurden untersucht von: De . Hire, *Mém. de l'Ac. de Paris,* 1694, 1706; Newton, *Prin- ia* etc., der ihre Rectification studirte; Euler, *Nova Comm. 'rop.,* 1766, 1781; *Acta Petrop.,* 1784; Raabe, *Crelle,* 1; kardt, *Zeitschr. für Math.,* 15, 1870; Kiepert, ib., 17, 1872.

Mit der dreispitzigen Hypocycloide beschäftigten sich Stei- r, *Crelle,* 53, 55; dann Cremona, *Crelle,* 64; Clebsch, ib., ; Battaglini, *Giorn. di Batt.,* 4, 1866; Painvin, *Nouv. n.,* 1870; Cahen, ib., 1875; Laguerre, *Bull. Soc. math.,* p. 108; Intrigila, *Giorn. di Batt.,* 1885; etc.

Ihren Flächeninhalt berechnete Balitrand, *Journ. de Long- mps,* 1893, p. 75. Vergl. auch Kap. 7 der *Geometrie der heren ebenen Curven* von Salmon-Fiedler.

Wenn man bei der zweiten Construction der Astroide, lche die Astroide als Enveloppe liefert, annimmt, die beiden ten Geraden stehen nicht senkrecht aufeinander, sondern seien ı einen Winkel α gegeneinander geneigt, so erhält man die

sogenannte *tretracuspidale* oder *vierspitzige Curve* als Envelop einer Geraden von constanter Länge a, deren Endpunkte a zwei den Winkel α miteinander bildenden Geraden gleiten.

Diese Curve ist 6ter Ordnung und 4ter Classe.

Ihr Flächeninhalt ist $\frac{\pi a^2}{8\sin^2\alpha}(1+2\sin^2\alpha)$.

Ihr Studium wurde von Merlieux, *Nouv. Ann.*, 1842, p. question 12 als Thema aufgegeben; Joachimsthal fand i Gleichung, ib., 1847; Steiner, ib., 1858 gab viele ihrer Eig schaften an. Sie wurde dann auch von Bellavitis, *Esp zione del metodo delle equipollenze, Mem. della Società itali delle scienze,* vol. 25, Modena 1854, in das Französische üb setzt von Laisant, Paris 1874, untersucht, der ihr den Na gab, und von Mannheim, *Nouv. Ann.*, 1878; über i Rectification siehe *Mathesis,* 1894, p. 129. Näheres findet n in dem *Interm. des math.,* 5, p. 160. Vergl. Wölffing, *Bibli math.,* (3), 2, 1901, *Bericht über den gegenwärtigen Stand cyclischen Curven* (d. h. solcher Curven, die beim Rollen ei Kreises auf einem anderen durch irgend einen Punkt in Ebene des ersteren beschrieben werden).

§ 13. Die Spiralen. Die Ribaucour'schen Curven.

Mit dem Namen *Spirale* pflegt man Curven zu beze nen, die sich in unendlich vielen Windungen, von denen folgende entweder innerhalb oder ausserhalb der vorhergehen liegt, um einen Punkt drehen. Der gemeinsame Name *Spi* bezieht sich mehr auf das Bild, das ihre Figur unseren Au bietet, als auf eine allen diesen Curven gemeinsame Eigensch

Jede Spirale ist nothwendiger Weise eine transcendente Cu

Die Spirale des Archimedes (welche auch *die Conon'* genannt wird) hat in Polarcoordinaten die Gleichung:

$$\varrho = a\varphi.$$

Sie ist mithin der Weg eines Punkts, der sich mit gle förmiger Geschwindigkeit auf einer Geraden fortbewegt, wäh diese gleichförmig um einen ihrer Punkte rotirt. Sie bes aus zwei zueinander symmetrischen Theilen, die den be Theilen entsprechen, in welche die bewegliche Gerade durch festen Punkt zerlegt wird.

Bei der Spirale des Archimedes ist die Polarsubnorm constant und dem Parameter a gleich.

Der Inhalt der von einem Bogen der Spirale des Archi-des und den beiden Endradienvectoren begrenzten Fläche ist:

$$\frac{a^2}{6}(\varphi_1{}^3 - \varphi_2{}^3),$$

rin φ_1, φ_2 die Argumente der beiden Endpunkte des Bogens leuten.

Die Spirale des Archimedes ist die Fusspunktcurve der olvente eines Kreises in Bezug auf das Centrum dieses Kreises.

Die *logarithmische Spirale* hat die Polargleichung

$$\varrho = e^{a\varphi}.$$

Ihre Evolute, ihre Brennlinie durch Reflexion und ihre ennlinie durch Refraction sind wieder der gegebenen gleiche arithmische Spiralen. Jacob Bernoulli, *Acta Erud.*, 1691.

Die Curve schneidet den Radiusvector unter constantem inkel. Sie hat daher auch den Namen *gleichwinklige Spirale pirale equiangolare)* erhalten.

Der Anfangspunkt der Radienvectoren ist asymptotischer unkt der Curve.

Die Länge der von dem Punkt $\varrho = 1$, $\varphi = 0$ aus in negativer otationsrichtung genommenen Bogen convergirt gegen die endliche rösse $\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}$, wenn der Endpunkt dem Pol zustrebt.

Der Krümmungsmittelpunkt ist der Endpunkt der Polar-bnormalen.

Die Roulette und die Gleitcurve (siehe § 6) *des Pols der arithmischen Spirale in Bezug auf dieselbe Gerade, als Basis, id zwei aufeinander senkrecht stehende Gerade.*

Die logarithmische Spirale hat ihre eigene reciproke Polare Bezug auf jede gleichseitige Hyperbel, deren Centrum im Pol r Spiralen liegt, und welche von der Spiralen berührt wird. lein-Lie, *Bull. des sciences math.*, 1872, p. 331.

Die Inverse der logarithmischen Spirale ist, wenn das Centrum r Inversion im Pol liegt, wieder eine logarithmische Spirale, e der ersteren gleich ist.

Die logarithmische Spirale wurde zuerst von Cartesius, nn von Jacob Bernoulli untersucht. Literaturnachweise ndet man bei Brocard, l. c.; eine kurze Monographie über ie Curve ist von Whitworth, *Nouv. Ann.*, 1869. Siehe auch ap. 7 der *ebenen Curven* von Salmon-Fiedler.

Die *hyperbolische Spirale* ist die Inverse der Spirale d Archimedes; ihre Polargleichung lautet:

$$\varrho = \frac{a}{\varphi}.$$

Die Curve hat den Pol zum asymptotischen Punkt und e Gerade als Asymptote; sie besteht aus zwei Aesten, die in Be auf die zur Asymptote senkrechte und durch den Pol gehe Gerade symmetrisch sind.

Ihre Polarsubtangente ist constant.

Die hyperbolische Spirale ist die Projection einer Schraub linie von einem Punkt der Axe aus auf eine zur Axe senkrec Ebene.

Die *parabolische* oder *Fermat'sche Spirale* hat die Gleichu

$$\varrho^2 = \varphi.$$

Es sei O der Pol und OM die Polaxe, die von der Spir successiv in den Punkten

$$O,\ M,\ M',\ M'', \ldots$$

getroffen wird.

Beschreibt man von dem Centrum O aus mit dem Rad OM einen Kreis, *so ist der Inhalt I der von dem ersten Bogen OM Spirale und der Axe OM eingeschlossenen Fläche die Hälfte Flächeninhalts dieses Kreises; derselbe Flächeninhalt I ist halb gross, als der Inhalt der von dem ersten Zweig OM der Spir dem zweiten Zweig MM' und der Geraden MM' begrenz Fläche, während der letztere dem Inhalt der von dem zwei Zweig, dem dritten und der Geraden M'M'' umschlosse Fläche gleich ist, welche ihrerseits wieder dem Inhalt der dem dritten Zweig, dem vierten und der Geraden M''M''' u gebenen Figur gleich ist,* u. s. w.

Linien, die so beschaffen sind, dass die Projection Krümmungsmittelpunkts auf den Radiusvector diesen in c stantem Verhältniss theilt, heissen *Sinusspiralen*, De la Go pillière; *ihre Polargleichung lautet*

$$\varrho^n = a^n \sin(n\varphi)$$

und ihre natürliche Gleichung:

$$s = \frac{n+1}{n-1} \int \frac{d\varrho}{\sqrt{\left(\frac{\varrho}{a}\right)^{\frac{2n}{n-1}} - 1}}.$$

Der Winkel, den die Tangente an die Curve mit dem diusvector bildet, ist $n\varphi$.

Für specielle Werthe von n (des Indexes) ergeben sich on bekannte und einfache Curven; z. B. für $n = 1$ die Kreis- e, für $n = -1$ die Gerade.

Den Sinusspiralen stehen die *Ribaucour'schen Curven* ie, *deren natürliche Gleichung*

$$s = \frac{n+1}{n-1} \int \frac{d\varrho}{\sqrt{\left(\frac{\varrho}{a}\right)^{2\frac{n+1}{n-1}} - 1}} \quad \textit{lautet.}$$

Die Ribaucour'schen Curven sind dadurch ausgezeichnet, ss ihr Krümmungsradius dem zwischen dem Punkt der Curve l einer festen Geraden liegenden Segment der Normalen pro- tional ist.

Die Zahl n heisst bei der Sinusspiralen sowohl wie bei Ribaucour'schen Curve, *Index.*

Wenn eine Sinusspirale mit dem Index n auf einer Geraden lt, so beschreibt ihr Pol (der Anfangspunkt der Radien- toren) eine Ribaucour'sche Curve, deren Index

$$\frac{n-1}{n+1} \quad \textit{ist.}$$

Bez. der Sinusspiralen citiren wir De la Goupillière, *uv. Ann.*, 1876, p. 97; Brocard, ib., 1886.

Die Ribaucour'schen Curven entdeckte Ribaucour bei seinen tersuchungen über Minimalflächen, *Mém. de l'Ac. de Belg.*, 44; *uv. Ann.*, 1888; etc.

Eine Besprechung der beiden letzten Curvenarten findet man . Cesàro, *Geom. intrins.*, 1896, p. 45, deutsch von Kowa- wski, *Vorlesungen über natürliche Geometrie*, Leipzig 1901. ber weitere Angaben siehe Brocard an dem in § 6 ange- benen Ort.

§ 14. Kettenlinie. Delaunay'sche Curve. Tractrix. Sinuscurve. Quadratrix. Elastische Linie.

Die *Kettenlinie* ist die Ruhelage eines gleichförmig dich unelastischen schweren Fadens, der in zweien seiner Pun befestigt ist.

Ihre Gleichung lautet:

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

und ihre natürliche Gleichung:

$$a\varrho = a^2 + s^2.$$

Die x-Axe steht um die Länge a von dem tiefsten Pu A der Curve ab; sie heisst die *Axe der Kettenlinie* und *die Cu ist in Bezug auf sie convex.*

Die Kettenlinie ist die Roulette des Brennpunkts ei Parabel, die auf einer Geraden rollt.

Die Tangente an die Kettenlinie in einem Punkt P u construirt, indem man mit dem Radius a einen Kreis zieht, des Centrum der Fusspunkt der Ordinate von P ist, und von P eine Tangente an diesen Kreis legt.

Der Krümmungsradius ist an Länge dem Theil der N malen gleich, der zwischen dem Curvenpunkt und der x- liegt; man erhält daher den Krümmungsmittelpunkt, indem n diese Länge in entgegengesetzter Richtung auf der Norm abträgt.

Die Kettenlinie ist von allen Curven, welche die gle Länge haben und deren Endpunkte dieselben beiden Punkte s diejenige, deren Schwerpunkt am tiefsten liegt. Repert., 1, p. 2

Durch Rotation um ihre Axe erzeugt die Kettenlinie *Catenoid*, welches eine Minimalfläche ist. Siehe Kap. 16 *Repert.*, 1, S. 254, wo auch noch eine andere Eigenschaft Catenoide angegeben ist.

Den Bogen AP der Kettenlinie erhält man, wenn in Schnittpunkt S der Tangente in P mit der Tangente in A Loth auf die Tangente in P errichtet wird, welches die x- in R schneidet, und alsdann der Schnittpunkt S auf die x- nach Q projicirt wird. *Die Länge QR ist dem Bogen gleich.*

Der Inhalt der Fläche zwischen dem Bogen AP der Ket linie, der x-Axe und den Endcoordinaten ist dem Product dem Bogen AP und dem Parameter a gleich.

Die Gleichgewichtscurve eines schweren Fadens wurde von ılilei studirt, der sie irrthümlicher Weise für eine Parabel elt; spätere Untersuchungen sind von Leibniz (1691) und ıcob Bernoulli (1691).

Ueber historische Angaben siehe einen Artikel von Lai nt, *Ass. Franç. Congrès de Toulouse,* 1887, p. 64.

Wie die gewöhnliche Kettenlinie die Roulette des Brennnkts einer Parabel ist, so gibt es auch Curven, welche die ɔuletten der Brennpunkte einer Ellipse oder Hyperbel sind. .e werden *elliptische* oder *hyperbolische Kettenlinien* oder auch *urven Delaunay's* genannt, der sie zuerst (1846) studirte und nd, *dass sie die Meridiane einer Umdrehungsfläche von conanter mittlerer Krümmung sind (Unduloide* und *Nodoide,* siehe .ap. 16).

Die Differentialgleichung der Delaunay'schen Curven lautet:

$$(y^2 + b^2)\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} - 2ay = 0$$

nd ihre natürliche Gleichung:

$$\frac{e}{a}\varrho = e - \cos\frac{s}{a} + \frac{\sin^2\frac{s}{a}}{e - \cos\frac{s}{a}}.$$

Jede Delaunay'sche Curve ist einer gleichen Curve parallel.

Näheres über diese Curven findet man auch bei Cesàro, *Geom. intrins.,* p. 69, deutsch von Kowalewski.

Tractrix (Huyghens, 1693) heisst eine Curve, welche so ɔeschaffen ist, dass das zwischen dem Berührungspunkt und iner festen Geraden liegende Stück ihrer Tangente von constanter Länge $= a$ ist. Die feste Gerade ist *Asymptote der Tractrix.*

Ihre Differentialgleichung lautet:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}},$$

ınd die Gleichung in endlichen Termen:

$$x = -\sqrt{a^2 - y^2} + a\log\frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y}$$

Die Curve ist auch die orthogonale Trajectorie der Kr vom Radius a, deren Mittelpunkte auf der Axe liegen, oder a die Evolvente einer Kettenlinie.

Sie kann auch als die Enveloppe der Axe einer Para angesehen werden, welche auf einer Geraden rollt.

Die Tractrix ist auch die Meridiancurve der Pseudosph und des pseudosphärischen Helicoids Dini's. Siehe Kap. S. 493.

Den Krümmungsradius in einem Punkt P erhält man, we von dem Scheitel

$$(x = 0, \quad y = a)$$

der Curve die Parallele zu der Tangente in P gezogen wi welche die Asymptote in R trifft; *das Segment* OR, we unter O die rechtwinklige Projection des Scheitels auf Asymptote verstanden wird, *ist dem Krümmungsradius Länge gleich.*

Verlängerte bez. *verkürzte Tractrix* werden die Projection der gewöhnlichen Tractrix auf eine durch die Asymptote gele Ebene genannt, je nachdem die projicirenden Geraden senkre auf der Ebene der Tractrix oder auf der Projectionsebene steh Siehe Bianchi, *Geom. diff.*, p. 243, deutsche Ausg., S. 255.

Die Tractrix studirte Bomie, *Mém. de l'Ac. de Pa* 1712, p. 281; vergl. auch Cesàro, *Mathesis*, 1882, p. 217

Die Sinuscurve (Sinusoide) hat zur Gleichung

$$y = \sin x.$$

Sie hat unendlich viele Inflexionspunkte auf der x-A die gleichen Abstand von einander haben; in diesen Punk beträgt die Neigung der Tangente 45°.

Der Inhalt der Fläche, welche zwischen dem von zw consecutiven Inflexionspunkten begrenzten Bogen und der x-A liegt, ist doppelt so gross als der Inhalt des Quadrats über linearen Einheit, die durch die Höhe desjenigen Punkts der Sin curve über der x-Axe dargestellt wird, in welchem die Tange der x-Axe parallel ist.

Der zwischen zwei aufeinander folgenden Inflexionspunkt liegende Bogen der Sinuscurve hat dieselbe Länge, wie eine Ha

ipse mit den Halbaxen $\sqrt{2}$ *und* 1; *diese Länge wird durch die rmel ausgedrückt:*

$$\pi\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2+\frac{1}{5}\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2-\cdots\right\}.$$

Die Quadratrix des Dinostrates (335 vor Chr. Geb.) *ist e Curve, deren Gleichung*

$$\varrho=\frac{2}{\pi}\frac{\varphi}{\sin\varphi}$$

er

$$y=x\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi y}{2}\ \textit{lautet.}$$

Sie hat zu Asymptoten die Linien, welche der Geraden $=0$ *parallel sind und von dieser um die Grössen* $\pm 2, \pm 4, \ldots$ *stehen.*

Die Quadratrix lässt sich auf die folgende Art definiren: an denke sich einen Kreis mit zwei aufeinander senkrechten urchmessern COA, DOB. Man lasse nun gleichzeitig von O nd von A aus zwei bewegliche Punkte mit gleichförmigen eschwindigkeiten den einen auf der Geraden OB, den anderen uf dem Kreisbogen AB so abgehen, dass sie zu derselben Zeit n B ankommen. *Sind dann L, M zwei Lagen, in denen sich ie beiden beweglichen Punkte zu derselben Zeit befinden, so ist er Ort der Schnittpunkte von OM mit der durch L parallel u OA gezogenen Geraden die Quadratrix.*

Der Abstand des Scheitels der Quadratrix von dem Mittel-unkt des Kreises ist $\frac{2}{\pi}$, man findet auf diese Weise indirect ei der Construction der Quadratrix die Grösse π; die Curve ann daher zur *Quadratur des Kreises* benutzt werden.

Sie wurde auch von Newton untersucht, *Opuscula*, 1, . 102. Historische Notizen findet man in einem Artikel von . Tannery, *Bull. des sciences math.*, 1883, p. 278.

Die elastische Linie wird durch die Differentialgleichung

$$dy=\frac{x^2dx}{\sqrt{a^4-x^4}}\quad\text{charakterisirt.}$$

Sie ist die Gleichgewichtscurve einer elastischen Lame die an dem einen Ende befestigt ist und an deren ande Ende geeignete Kräfte angreifen. Sie wurde zuerst von Ja Bernoulli, *Mém. de l'Ac. de Par.*, 1703, 1705 studirt.

Ihr Krümmungsradius ist der Abscisse umgekehrt proj tional.

Die elastische Linie ist von allen isoperimetrischen Cur die durch zwei feste Punkte gehen, diejenige, welche, um Axe rotirend, den Körper vom grössten Volumen erzeugt. Si *Repert.*, 1, p. 254.

Sie wurde vom Standpunkt der elliptischen Functionen von Enneper, *Ellipt. Funct.*, p. 525 und Halphen, *Fo ellipt.*, Bd. 2 behandelt.

§ 15. Doppelt gekrümmte Curven. Helixe. Loxodrom

Cylinderhelix (Schrauben-, Schneckenlinie) (Eudoxus, vor Chr. Geb.) heisst die auf einem Cylinder liegende Cu welche die Erzeugenden des Cylinders unter constantem Wi schneidet. *Sie ist eine geodätische Linie des Cylinders.*

Bei der Abwickelung des Cylinders auf eine Ebene w die Helix eine Gerade.

In jedem Punkt fällt die Hauptnormale der Helix mit Flächennormalen zusammen.

Bei jeder Cylinderhelix ist das Verhältniss der beiden Kri mungen constant und umgekehrt.

Die beiden Krümmungen selbst sind nur bei den Schraub linien constant, welche auf geraden Kreiscylindern liegen. P seux; siehe auch Kap. 16, § 4.

Die Schraubenlinien werden in *linksgewundene* und *rec gewundene* je nach ihrer Richtung gegen die Erzeugenden des Cyl ders unterschieden; denkt man sich, der Cylinder sei in eine sol Lage gebracht, dass seine Erzeugenden die Richtung der S strahlen haben, und ein Punkt durchlaufe die Helix so, dass sich dem Beobachter nähert, so ist, wenn diese Bewegung Punkts die Richtung der Bewegung eines Uhrzeigers zu ha scheint, die Helix *linksgewunden*, anderen Falls *rechtsgewund*

So ist z. B. die Helix einer gewöhnlichen Schreinerschra *rechtsgewunden.*

Die Coordinaten eines Punkts P einer Kreiscylinderhe d. h. einer auf einem geraden Kreiscylinder liegenden Schraub linie, sind:

$$x = r\cos\theta,$$
$$y = r\sin\theta,$$
$$z = r\theta\,\mathrm{tg}\,\varphi;$$

ıbei ist r der Radius des Kreises, der die Basis des Cylinders ldet, φ der constante Winkel, unter welchem die Helix die rzeugenden schneidet (der Steigungswinkel), und θ der Winkel, n die x-Axe mit der Geraden bildet, welche den Coordinaten-ıfang mit der Projection des Punktes P auf die xy-Ebene rbindet.

Der Bogen der Kreiscylinderschraube ist

$$s = r\theta\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\varphi}.$$

Die *conische Cylinderhelix (conische Spirale)* ist die auf nem Rotationskegel aufgezeichnete Curve, welche die Erzeu-enden unter constantem Winkel schneidet.

Die Projection dieser Helix auf eine zur Axe des Kegels nkrechte Ebene ist eine logarithmische Spirale; diese Helix kann an sich mithin auch auf einem Cylinder aufgezeichnet denken, er zur Basis eine logarithmische Spirale hat; sie ist auch für iesen Cylinder eine Helix, d. h. sie schneidet seine Erzeugenden nter constantem Winkel.

Wickelt man den Kegel auf eine Ebene ab, so wird die onische Cylinderhelix in eine logarithmische Spirale ausgebreitet.

Die Hauptnormale steht senkrecht auf der Axe des Kegels.

Die eben betrachteten Schraubenlinien gehören der allgemei-ieren Classe der *Loxodromen* (Nonius, 1530) an, d. h. von Curven, ie sich auf einer beliebigen Rotationsfläche befinden und die Meridiane dieser Fläche unter constantem Winkel schneiden.

Es ist namentlich der Fall eingehend studirt worden, n welchem die Rotationsfläche eine Kugel ist. Siehe z. B. oachimsthal, *Anwendung der Differential- und Integralrech-ung auf die allgemeine Theorie der Flächen und der Linien oppelter Krümmung*, 3. Aufl., bearb. v. Natani, Leipzig 1890, 1. Aufl., 1872, p. 83).

Ueber die Geschichte der Loxodrome vergl. Günther, *Studien zur Geschichte der math. Geographie*, Halle 1879 und uch einen umfangreichen literarischen Artikel von Brocard, *Bull. de Darboux*, 1879, Thl. 1, p. 329.

§ 16. Die sphärischen cyclischen Curven. Fenster des Viviani. Sphärische spirische Linien.

Man pflegt *sphärische cyclische Curven* die Schnitte ei Kugel mit Flächen 2ten Grads zu nennen. Ein specieller F der sphärischen cyclischen Curven sind daher *die sphärisc Kegelschnitte.* Siehe Kap. 10, § 1.

Die ebenen circularen Curven kann man als die Inver der sphärischen cyclischen Curven ansehen; man braucht eine Inversion zu machen, durch welche die Kugel in eine Eb übergeführt wird. Manche Autoren bezeichnen übrigens anderem Sprachgebrauch, als S. 544, die ebenen circularen a als ebene cyclische Curven.

Zum Studium dieser Curven empfehlen wir das Buch Darboux, *Sur une classe remarqu.* etc., Paris 1896, 2. Au worin man auch viele literarische Angaben findet.

Eine Halbkugel sei gegeben; zieht man einen Durchmesser Aequatorialebene, beschreibt über den beiden Radien des Dur messers zwei Kreise, die diese Radien zu Durchmessern ha und construirt alsdann die geraden Cylinder, deren Basis di Kreise sind, so ist der Schnitt einer der beiden Cylinder der Kugel eine Curve, die den Namen *Viviani'sche Curve* o *Fenster des Viviani (finestra di Viviani)* führt.

Auf diese Curve kam man bei dem Studium eines Proble das Viviani im Jahre 1692 in Anregung brachte, und welc später von Viviani selbst, von Leibniz, *Acta Erud.,* 1692 von Johann Bernoulli, ib. gelöst wurde; es handelte s darum, auf einem halbkugelförmigen Gewölbe vier glei Fenster derart zu construiren, dass der übrig bleibende T quadrirbar würde.

Construirt man die beiden Cylinder auf die oben angegeb Art, so ist der Inhalt der übrig bleibenden Kugeloberfläche Inhalt des über dem Durchmesser der Kugel beschriebenen Q drats gleich.

Die sphärischen spirischen Curven sind Schnitte einer K mit einem Torus. Siehe Darboux, l. c.

Der Leser, welcher noch Angaben über andere Spec curven wünscht, wird mit Vortheil ein neues Buch von B

rd zu Rath ziehen, *Notes de Bibliographie des courbes géom.*, ır le Duc 1897, lithogr., mit Suppl., 1899; es wurde heraus-geben in Folge einer Aufforderung De La Goupillière's (in l. 1, p. 37 des *Interméd. des mathématiciens,* 1894), der eine onographie über alle speciellen Curven zu haben wünschte, e besondere Namen führen. Dieselbe Aufgabe wurde als ncurrenzthema für die Jahre 1894 und 1897 von der Aca-mie der Wissenschaften in Madrid gestellt und der Preis uerdings von Gino Loria und F. Gomes Teixeira gewon-n. Die prämiirte Arbeit des ersteren hat den Titel: *Le curve ane algebriche e transcendenti; teoria e storia. Saggio di geo-etria comparata del piano.* Deutsche Ausg. von Fritz Schütte, ecielle, *algebraische und transcendente ebene Curven, Theorie id Geschichte*, Leipzig 1901.

Kapitel XVIII.

Analysis situs oder Topologie. Polyedertheorie. Zusammenhang der Riemann'schen Flächen.

§ 1. Zusammenhang der Flächen. Einseitige und zw seitige Flächen. Die Grundzahl. Das Geschlecht.

Eine Fläche kann *offen* oder *geschlossen* sein; sie ist *off* wenn sie *Ränder* besitzt, d. h. Linien, in deren Punkten endigt; sie ist *geschlossen*, wenn sie keine Ränder besitzt.

Ein unendlich kleines um einen Punkt auf einer Flä liegendes Flächenstück kann in zwei Richtungen oder von e gegengesetzten *Seiten* angeschaut werden; diese beiden Sei entsprechen den Richtungen der Flächennormalen in dem treffenden Punkt; in Beziehung auf sie kann jeder Punkt Doppelpunkt angesehen werden, je nachdem man sich denkt, gehöre der einen oder der anderen Seite an; wir wollen sa diese beiden Punkte, in welche man sich einen und densel Punkt verdoppelt denkt, seien einander *conjugirt*.

Eine Fläche kann *zweiseitig* sein, d. h. *zwei Seiten* besit oder *einseitig*, d. h. nur *eine Seite* haben.

Sie ist *zweiseitig*, wenn man, von einem Punkt der Flä ausgehend und stetige auf ihr gelegene Wege verfolgend, o die Ränder zu überschreiten, niemals zu dem Punkt gelan kann, der dem Ausgangspunkt conjugirt ist; sie ist dage *einseitig*, wenn dies möglich ist.

Beispiele zweiseitiger Flächen sind die Kugel, ein Eber stück, u. s. w.

Beispiele von einseitigen Flächen gab Möbius an, *Zur The der Polyeder* etc., *Werke*, 2; *Ueber die Bestimmung des Inh eines Polyeders, Leipz. Ber.*, 1865; *Werke*, 2.

Man habe ein Rechteck von Papier $ABCD$, das hin chend lang ist; die längeren Seiten seien AC, BD; man

ıde den Rand CD, nachdem man ihn um die Gerade ge-eht, welche die Mittelpunkte der Seiten AB, CD verbindet, rart mit dem Rand AB, dass der Punkt D mit A zusammen-llt und C mit B. *Die so erhaltene Fläche ist einseitig und ·en und hat nur einen Rand.*

Wenn man, bevor CD mit AB verbunden wird, CD eine ıgerade Anzahl mal um die Verbindungslinie der Mittelpunkte ·r Seiten AB, CD hat rotiren lassen, und dann die beiden ·iten, wie vorher, aufeinander legt, so erhält man wieder *eine nseitige offene Fläche mit nur einem Rand.*

Auch eine *geschlossene* einseitige Fläche lässt sich bilden, B. auf die folgende Art (Möbius):

Wenn A, B, C, D, E fünf Punkte sind, von denen vier eliebige nicht in einer Ebene liegen, so bilden die fünf Drei-·ke ABC, BCD, CDE, DEA, EAB *eine offene einseitige 'läche*, deren Umfang das Pentagon $ACEBD$ ist.

Nimmt man nun einen Punkt P an, der sich mit keinen eliebigen drei der ersten fünf Punkte in derselben Ebene efindet, so sind die fünf früheren Dreiecke und die fünf ande-en PAC, PCE, PEB, PBD, PDA die Seitenflächen eines erschlungenen Polyeders, das eine *geschlossene einseitige Fläche* ildet.

Eine andere geschlossene einseitige Fläche kann man auf ie folgende Art herstellen:

Man denke sich eine Kugel mit *zwei* Löchern. Von dem inen Loch lasse man einen biegsamen Schlauch von hinrei-hender Länge nach aussen hin ausgehen, ziehe ihn, eine Ver-chlingung bildend, in das Innere der Kugel zurück und lasse hn an dem anderen Loch von Innen her endigen. Es ergibt ich *eine geschlossene einseitige Fläche.* Dyck, *Math. Ann.*, 32.

Zerschneidet man die Fläche längs den Punkten einer be-iebigen ihrer Linien, so macht man einen sogenannten *Schnitt.*

Ein Schnitt kann *offen* oder *geschlossen* sein. Zu den offenen Schnitten zählen diejenigen, deren Endpunkte zwei Punkte des nämlichen Randes sind *(Schnitte 1ter Art)* und die Schnitte, deren Endpunkte zwei Punkte verschiedener Ränder sind *(Schnitte 2ter Art).*

Durch einen Schnitt, der geschlossen oder offen von der 1ten oder 2ten Art ist, kann die Fläche in nicht mehr als zwei Stücke zerfallen.

Wenn eine Fläche zweiseitig ist, so vermehrt ein offe Schnitt 1ter Art die Anzahl der Ränder um einen; ist sie dageg einseitig, so ändert ein gleicher Schnitt die Anzahl der Räne entweder überhaupt nicht, oder er vermehrt sie um einen.

Einen Schnitt 1ter Art nennen wir *von der 1ten oder 2 Classe*, je nachdem er in dem Fall einer einseitigen Fläche Anzahl der Ränder *vermehrt* oder *nicht*.

Durch den Schnitt 1ter Art und 2ter Classe zerfällt eine e seitige Fläche niemals.

Ein Schnitt 2ter Art vermindert die Anzahl der Ränder die Fläche um einen; er kann niemals ihr Zerfallen bewirken.

Ein Schnitt, der längs einer offenen Linie ausgeführt wi deren eines Ende auf einem Rand liegt und deren ande Ende, wie auch die ganze Linie, sich im Inneren) der Flä befindet, vermehrt die Anzahl der Ränder nicht und bewirkt n mals das Zerfallen der Fläche.*

Wenn schliesslich die beiden Endpunkte der offenen u ganz im Inneren der Fläche gelegenen Linie auf keinem Ra liegen, so vermehrt sich die Anzahl der Ränder um einen, Fläche zerfällt aber nicht.

Wenn eine Fläche zweiseitig ist, so vermehrt ein geschl sener Schnitt die Anzahl der Ränder um zwei; ist sie e seitig, so vermehrt der geschlossene Schnitt die Anzahl der Räne um zwei oder um einen. Wir sagen, *der geschlossene Schn auf einer einseitigen Fläche sei 1ter oder 2ter Classe*, je nachd der 1te oder 2te Fall eintritt.

Ein geschlossener Schnitt 2ter Classe kann niemals das Z fallen einer einseitigen Fläche zur Folge haben.

Lässt sich in eine Fläche ein offener Schnitt erster A machen, ohne dass sie zerfällt, so kann man auch einen g schlossenen Schnitt ausführen, ohne dass sie zerfällt, und u gekehrt.

Eine Fläche heisst *einfach zusammenhängend*, wenn endlich, offen, nur von *einem* Rand begrenzt und derart i dass jeder geschlossene Schnitt (oder, was äquivalent ist, jed beliebige offene Schnitt, der zwei Punkte des Randes verbind ihr Zerfallen bewirkt.

Eine einfach zusammenhängende Fläche ist immer zweiseit

---

*) Unter dem Inneren einer Fläche wird selbstverständlich Gesammtheit aller nicht zu der Begrenzung gehörigen Punkte d Fläche verstanden.

Der von einem Kreis begrenzte Theil der Ebene ist das fachste Beispiel einer einfach zusammenhängenden Fläche.

Nimmt man an, die einfach zusammenhängende Fläche aus einem biegsamen und elastischen Stoff hergestellt, so nn man sie sich immer durch stetige Deformationen, d. h. rch Ausdehnen und Zusammenziehen, aber ohne Brechen in s von einem Kreis begrenzte Ebenenstück transformirt denken.

Auf jeder zweiseitigen Fläche lassen sich immer geschlossene r offene Schnitte 1ter und 2ter Art derart ausführen, dass sie fach zusammenhängend wird.

Durch offene Schnitte 1ter Art und 2ter Classe oder geschlossene hnitte 2ter Classe lässt sich eine einseitige Fläche stets zweitig machen.

Man habe eine Fläche; wir wollen sie durch geeignete Schnitte eine endliche Anzahl α von Theilen zerlegen, von denen ler einfach zusammenhängend ist, und wollen annehmen, zu esem Zweck müssten ausgeführt werden: eine gewisse beliebige nzahl von geschlossenen Schnitten und von offenen Schnitten, n denen nur ein Endpunkt einem Rand angehört, ferner τ_1 ene Schnitte 1ter Art, τ_2 offene Schnitte 2ter Art, τ_3 offene nz im Inneren der Fläche liegende Schnitte (deren *Endpunkte* h ebenfalls im Inneren der Fläche befinden). Es gilt dann r Satz:

Die Zahl

$$\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 - \alpha$$

constant, auf welche Art diese Schnitte auch gemacht werden.

Diese um 2 vermehrte Zahl pflegt man die *Grundzahl* der äche zu nennen.

Wenn dagegen, statt einer Fläche, eine Gruppe von s ächen vorliegt, so besteht ein analoges Theorem für die ganze uppe und es gilt eine ähnliche Definition für die *Grundzahl* r Gruppe.

Die Grundzahl K der Gruppe lässt sich durch die Grundhlen K_i jeder Fläche mittelst der Formel

$$K = \sum_{i=1}^{s} K_i - 2s + 2$$

sdrücken.

Die Grundzahl einer Fläche kann nicht negativ sein und nn nicht Null sein, wenn die Fläche offen ist.

Die Grundzahl einer einfach zusammenhängenden Fläche t 1 und umgekehrt, vorausgesetzt, dass die Fläche offen oder er zweiseitig ist.

Wenn eine Fläche durch einen geschlossenen Schnitt od durch einen offenen Schnitt 1ter Art in zwei Theile zerfällt, ist die Summe der Grundzahlen der beiden Theile gleich d Grundzahl der Fläche, um 2 bez. um 1 vermehrt.

Es sei eine zweiseitige geschlossene oder offene Fläche m $\omega \gtreqless 0$ Rändern gegeben.

Man nennt *Geschlecht* dieser Fläche die grösste Anza geschlossener Schnitte oder offener Schnitte 1ter Art, die si auf der Fläche ausführen lassen, ohne dass sie zerfällt.

Ist p das Geschlecht einer zweiseitigen entweder offenen od geschlossenen Fläche, so ist die Grundzahl

$$K = 2p + \omega.$$

Geschlecht einer einseitigen Fläche wird die Zahl genan welche man erhält, wenn zu der Anzahl von geschlossen Schnitten 2ter Classe oder von offenen Schnitten 1ter Art u 2ter Classe, die nöthig sind, um die einseitige Fläche zweisei zu machen, das Doppelte der Zahl hinzugezählt wird, die d Geschlecht dieser zweiseitigen Fläche angibt.

Wenn π das Geschlecht der einseitigen offenen oder schlossenen Fläche mit $\omega \gtreqless 0$ Rändern ist und K ihre Gru zahl, so ist

$$K = \pi + \omega.$$

Zusammenhangszahl oder *Zusammenhang* einer beliebig Fläche heisst die Zahl $K + 2$, wenn die Fläche geschlos ist und die Zahl K, wenn sie offen ist.

Das Fundamentaltheorem über das Geschlecht einer Fläc lautet: *Von zwei Flächen, die beide zweiseitig oder beide e seitig sind und dasselbe Geschlecht und dieselbe Anzahl v Rändern haben, lässt sich jede in die andere deformiren.*

Das Geschlecht einer Fläche ändert sich nicht, wenn m ein Loch in sie macht.

Ein Loch vermehrt den Zusammenhang einer offenen Flä um 1, vermindert den Zusammenhang einer geschlossenen Flä um 1 und vermehrt in jedem Fall die Grundzahl um 1.

Die Studien über den Zusammenhang der Flächen bega Riemann, *Theorie der Abel'schen Functionen*, *Crelle*, 54, § und *Fragment aus der Analysis situs*, *Werke*, p. 448; N mann, *Abel'sche Integrale*, 1. Ausg., 1865, 2. Ausg., 1884 set sie fort.

Nach und nach haben sich diese und andere ihnen verwandte
ersuchungen, mit denen sich schon Listing beschäftigte,
rstudien zur Topologie, aus den *Göttinger Studien,* 1847) zu
em in sich abgeschlossenen, selbstständigen Theil der modernen
metrie ausgebildet, der *Analysis situs* oder besser noch *Topo-*
e genannt wird. (Einige Autoren haben freilich, wie es scheint,
n Wort *Topologie* eine etwas beschränktere Bedeutung bei-
en wollen, als der *Analysis situs.*) Es werden in diesem Theil
Geometrie solche Eigenschaften der geometrischen Gebilde
ersucht, die unabhängig von ihrer Form und ihrer Grösse sind.

Mit anderen Worten: die *Analysis situs* oder Topologie be-
äftigt sich mit den Formen, welche ein geometrisches Gebilde
ehmen kann, wenn zwei Formen dieses Gebildes als nicht
n einander verschieden angesehen werden, falls man von der
en zur anderen durch *stetige* Deformation übergehen kann; d. h.
ls diese Formen sich Punkt für Punkt in ein-eindeutiger Weise
ander zuordnen lassen, ohne dass man dabei nothwendiger
eise voraussetzen müsste, das Correspondenzgesetz sei *analy-*
h; es genügt, wenn es *stetig* ist.

Die ersten Ausdehnungen auf die Räume von drei Dimen-
nen sind von Riemann in dem citirten *Fragment;* auf ihn
gte Listing, *Census räumlicher Complexe, Gött. Abh.,* 10,
61; *Gött. Nachr.,* 1867; allgemeiner sind die Erweiterungen,
zuerst Betti, *Ann. di mat.,* (2), 4, 1870 vornahm.

Andere Studien sind von Picard, *Journ. de Liouv.,* (4), 1;
. Dyck, *Math. Ann.,* 32, 37; De Paolis, *Teoria dei gruppi*
m. etc., *Soc. it. delle scienze,* (3), 7; Tonelli, *Rend. Acc. Lincei,*
90 und Poincaré, *Journ. de l'Ec. pol.,* (2), 1, 1895; *Rend.*
lermo, 13, 1899; in dem letzteren Aufsatz knüpft der Ver-
ser an eine im Jahr 1898 in Kopenhagen veröffentlichte
hrift *Heegard's* an und corrigirt zum Theil seine früheren
ntersuchungen vom Jahr 1895. In der Picard'schen Arbeit
det man noch viele sonstige Angaben.

Verwandte Forschungen beschäftigen sich mit der Art, die
erschlingungen der Curven zu lösen oder zu bilden und
deren ähnlichen Dingen; dahin gehören: Simony, *Math. Ann.,*
, 24 und die Arbeiten, die zugleich die Räume von mehreren
mensionen einführten, wie Hoppe, *Arch. d. Math.,* 64, 1879;
, 1880; Durège, *Wien. Ber.,* 1880; Schlegel, *Zeitschr. für*
ath., 28, 1883.

§ 2. Zusammenhang der Räume.

Die Untersuchungen über den Zusammenhang der Fläch
wurden von Listing auf die Räume von drei Dimensionen u
von Betti, *Ann. di mat.*, (2), 4 auf die mehrdimensionalen Räu
ausgedehnt. In dem oben citirten *Fragment* von Riemann s
auch einige Resultate über diesen Gegenstand enthalten.

Wenn $z_1, \ldots, z_n$, n Variable sind, von denen jede alle reel
Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ annehmen kann, so nennen wir
n-fach unendliche Gebiet der Systeme von Werthen dieser Variab
den Raum von n Dimensionen und bezeichnen diesen mit
ein System von Werthen der z bildet dann die *Coordinaten* ei
Punkts in einem solchen Raum.

Ein System von m Gleichungen zwischen den z bestim
einen im R_n *enthaltenen* Raum von $n - m$ Dimensionen.

Von einem im R_n enthaltenen Raum R_{n-m} sagt man,
sei *linear zusammenhängend* oder habe einen *Zusammenh*
1ter Art, wenn sich zwei seiner Punkte immer durch eine v
ständig in ihm gelegene Linie verbinden lassen, d. h. wenn je
Punkt stetig, und immer im R_{n-m} bleibend, in jeden ande
Punkt übergeführt werden kann.

Ist $F(z_1, \ldots, z_n) = 0$ eine Relation zwischen den z,
ist F stetig und hat es nur einen Werth für jedes Sys
von reellen Werthen der z, so theilt der von $F = 0$ dargest
Raum R_{n-1} im Allgemeinen den Raum R_n in zwei Berei
für deren einen $F > 0$ und für deren anderen $F < 0$ ist.

Wenn jeder dieser beiden Bereiche linear zusammenhäng
ist, so heisst der Raum R_{n-1} *geschlossen*.

Von einem Raum R_{n-m} sagen wir, er habe den *Fläc*
zusammenhang oder den *Zusammenhang 2ter Art*, wenn jede
liebige in ihm enthaltene geschlossene Linie sich stetig in
andere analoge deformiren lässt und dabei immer im R_{n-m}
bleibt; allgemein sagen wir, R_{n-m} habe *den Zusammenh*
rter Art, wenn jeder in ihm enthaltene geschlossene Raum
$r - 1$ Dimensionen in jeden anderen analogen stetig defor
werden kann, ohne dass er während aller Stadien der De
mation aufhört, dem Raum R_{n-m} anzugehören.

Wenn ein Raum R_{n-m} den Zusammenhang r^{ter} Art
hat, so lassen sich immer in ihm geschlossene Räume von r -
Dimensionen angeben von der Art, dass weder zwei von il
in einander, noch auch irgend einer von ihnen in einen P
stetig deformirbar sind, dass aber jede andere analoge gesc

e Raum immer in einen von ihnen oder einen Punkt defor-
t werden kann.

Die Anzahl p_r dieser geschlossenen Räume ist constant, *welche Art man diese Räume auch bestimmen mag*; die l $p_r + 1$ heisst *Zusammenhangszahl r^{ter} Art.*

Für einen Raum, der den Zusammenhang r^{ter} Art hat, ist entsprechende p_r Null; die Zahl des r^{ten} Zusammenhangs 1.

Der Theil der Ebene, welcher zwischen zwei Kreisen enthalten ist, von denen der eine innerhalb des anderen liegt, hat als Zahl des linearen Zusammenhangs und 2 als Zahl des ächenzusammenhangs.

Für den Raum zwischen zwei Kugeln, von denen die eine nerhalb der anderen liegt, ist die lineare Zusammenhangszahl die Flächenzusammenhangszahl 1 und die Raumzusammenngszahl 2.

Der von einer ringförmigen Fläche umschlossene Raum hit ıfachen linearen (mit der Zahl 1), doppelten Flächen- (mat r Zahl 2) und einfachen Raumzusammenhang.

Der Raum zwischen zwei Ringflächen, von denen die eine h im Inneren der anderen befindet, hat einfachen Linien-, dreichen Flächen- und doppelten Raumzusammenhang.

Der Raum zwischen einer Kugel und einem in deren neren gelegenen Ring hat einfachen Linien-, doppelten Flächend doppelten Raumzusammenhang.

Ueber weitere Einzelheiten und die Literatur vergleiche an die Angaben in dem vorigen Paragraphen; über den Beiff von *einseitigem und zweiseitigem Raum* siehe Poincaré, l. c.

§ 3. Polyedernetz. Theorem von Euler. Polyeder des Raums von drei und mehr Dimensionen.

Auf eine Fläche vom Geschlecht p dehnen wir ein Polyedertz derart aus, dass die Umgrenzung einer jeden Seitenfläche n einfach zusammenhängendes Flächenstück umschliesst.

Wenn dieses Netz F Seitenflächen, S Kanten, V Ecken thält, *so besteht die Relation*

$$V + F = S - 2p + 2.$$

Nimmt man an, die gegebene Fläche sei vom Geschlecht ull z. B. eine Kugel, so erhält man ein schon von Euler efundenes Theorem:

Wenn ein gewöhnliches convexes Polyeder gegeben ist, w mit V, F bez. S die Anzahl seiner Ecken, Seitenflächen u Kanten bezeichnet wird, so gilt immer die Fundamentalbezieh

$$V + F = S + 2.$$

Solche Polyeder pflegt man *Euler'sche* zu nennen. Ve Hessel, *Crelle,* 8.

Dieses Theorem war, wie es scheint, auch den Alten bekan es findet sich in einem erst im Jahr 1860 herausgegebenen Fr ment von Cartesius (siehe Baltzer, *Monatsber. der Berl.* 1861), wurde aber von Euler, *Nova Comm. Petrop.,* 4, 17 veröffentlicht und bewiesen. Andere Beweise sind von Legend *Éléments de géométrie,* 7, 25, Paris 1794, neueste Aufl., 1864; L'Huilier, *Ann. de Gergonne,* 3, 1812; Cauc *Journ. de l'Éc. pol.,* 1813; Steiner, *Crelle,* 1; Grunert, 2; Staudt, *Geom. der Lage;* etc.

Weitere Betrachtungen über das Euler'sche Theorem die Fälle, in denen es nicht gilt, sind von Poinsot, *Journ l'Éc. pol.,* cahier 10, 1809; L'Huilier, l. c.; Legendre, l. Gergonne, *Ann. de Gergonne,* 15; Steiner, ib., 19; etc. sehe auch das vorzügliche Werk von Baltzer, *Elemente Mathematik,* 2 Bde., 7. Aufl., Leipzig 1885, 5. Buch, die Ste metrie, § 7 nach, das von Cremona (Genova, 2. ed., 1877 das Italienische übersetzt worden ist.

Ueber die Ausdehnung des Theorems auf die mehrdim sionalen Räume vergl. Stringham, *Americ. Journ. of M* 3; Biermann, *Wien. Ber.,* 90, 1884; Hoppe, *Grunert's A.* 67; Schlegel, *Nov. Acta der Leop. Deutsch. Ak.,* 44, s *Enseignement math.,* 1900, wo man reichhaltige Literaturang für den *n*-dimensionalen Raum findet, und Eberhard, *M Ann.,* 36; siehe weiter unten S. 568.

Wenn ein Polyeder gegeben ist und wenn, wie bisher, *F*, *S*, *V* die Anzahl der Seitenflächen, Kanten und Ecken zeichnet wird, so erhält man die Ungleichheiten:

$$\begin{aligned} 6 + S &\leqq 3F \leqq 2S, \\ 6 + S &\leqq 3V \leqq 2S, \\ 4 + V &\leqq 2F \leqq 4V - 8, \\ 4 + F &\leqq 2V \leqq 4F - 8. \end{aligned}$$

Die Anzahl der ebenen Winkel der Polygone (Seitenfläc eines Polyeders ist doppelt so gross als die Anzahl der Ka

Weder können die sämmtlichen Seitenflächen mehr als fünf ken haben, noch können die sämmtlichen körperlichen Winkel hr als fünfflächig sein.

Es gibt keine Polyeder mit 7 Kanten.

Wenn mit F_3 die Anzahl der dreieckigen Seitenflächen es Polyeders, mit F_4 die der viereckigen Seitenflächen, etc., t V_3 die Anzahl der 3-flächigen körperlichen Winkel, mit V_4 e der 4-flächigen körperlichen Winkel, etc. des Polyeders bezeichnet werden, *so bestehen die Relationen:*

$$2(F_3 + F_4 + \cdots) = 4 + V_3 + 2V_4 + 3V_5 + \cdots,$$

$$2(V_3 + V_4 + \cdots) = 4 + F_3 + 2F_4 + 3F_5 + \cdots,$$

$$F_3 + V_3 = 8 + (F_5 + V_5) + 2(F_6 + V_6) + \cdots.$$

Ist ein Polyeder gegeben, so existirt im Allgemeinen ein deres ihm *duales*, d. h. ein solches, welches dieselbe Anzahl n Kanten hat und so beschaffen ist, dass jeder m-seitigen itenfläche des einen ein m-flächiger körperlicher Winkel des deren entspricht und umgekehrt.

Die Eigenschaften der Polyeder unterliegen daher einem icht ersichtlichen Dualitätsgesetz.

Regelmässige oder auch *Platonische Polyeder* werden solche enannt, deren Seitenflächen und körperliche Winkel regelässig und alle von derselben Art sind.

In dem gewöhnlichen Raum existiren nur fünf regelmässige olyeder.

Sie sind:

1. *Das Tetraeder* mit 4 dreieckigen Seitenflächen, 4 Ecken mit dreiflächigen körperlichen Winkeln, 6 Kanten. Nimmt man an, der Radius der dem Tetraeder umschriebenen Kugel sei gleich 1, so ist die Länge einer Kante
$$l = 1{,}632994\ldots.$$
Die Mittelpunkte der Seitenflächen sind die Ecken eines zweiten Tetraeders und die Mittelpunkte der Kanten die Ecken eines Octaeders.
2. *Der Cubus oder Würfel (Hexaeder)* mit 6 viereckigen Seitenflächen, 8 Ecken mit dreiflächigen körperlichen Winkeln, 12 Kanten von der Länge
$$l = 1{,}154700\ldots$$

Die Mittelpunkte der Seitenflächen sind die Ecl eines Octaeders.

3. *Das Octaeder* mit 8 dreieckigen Seitenflächen, 6 Ecl mit vierflächigen körperlichen Winkeln, 12 Kan von der Länge

$$l = 1{,}414214\ldots$$

Die Mittelpunkte der Seitenflächen sind die Ecl eines Würfels.

4. *Das Dodekaeder* mit 12 fünfeckigen Seitenflächen, 20 Ecl mit dreiflächigen körperlichen Winkeln, 30 Kan von der Länge

$$l = 0{,}713644\ldots$$

Die Mittelpunkte der Seitenflächen sind die Ecl eines Ikosaeders und die Mittelpunkte der Kan die Ecken von fünf Octaedern.

5. *Das Ikosaeder* mit 20 dreieckigen Seitenflächen, 12 Ec mit fünfflächigen körperlichen Winkeln, 30 Kan von der Länge

$$l = 1{,}051462\ldots$$

Die Mittelpunkte der Seitenflächen sind die Ec eines Dodekaeders und die Mittelpunkte der Kan die Ecken von fünf Octaedern.

Halbregelmässige oder *Archimedische Polyeder* heissen sol deren körperliche Winkel sämmtlich einander gleich oder ähn sind, und deren Seitenflächen aus regelmässigen, aber im gemeinen verschiedenen Polygonen bestehen, oder auch Polye die zu diesen correlativ sind.

Wenn die körperlichen Winkel sämmtlich m-flächig s so ist

$$V = 2\,\frac{F-2}{m-2};$$

mithin sind die allein möglichen Fälle:

$$m = 3, \quad 2S = 3V = 6(F-2),$$

$$m = 4, \quad S = 2V = 2(F-2),$$

$$m = 5, \quad 2S = 5V = \frac{10}{3}(F-2).$$

Nur in den beiden ersten Fällen $m = 3$ und $m = 4$ Polyeder von $2n$ Ecken für ein beliebiges n möglich; j

rperliche Winkel wird dabei entweder aus zwei dreieckigen d einer n-seitigen Seitenfläche oder aus drei dreieckigen und ıer n-seitigen Seitenfläche gebildet; ausser diesen Fällen von *bestimmten* Polyedern existiren nur noch 13 andere Archimesche Polyeder und zwar 7 für $m = 3$, 4 für $m = 4$ und für $m = 5$.

Die Untersuchungen des Archimedes über die von ihm fundenen Polyeder sind uns von Pappus, *Coll. Math.*, 5, überfert worden; vergl. M. Cantor, *Geschichte der Math.*, Bd. 1, Aufl., 1894, p. 292. Nach Pappus hat sich Kepler, *Harm. undi*, 2, p. 28 mit den Polyedern beschäftigt. Näheres findet an bei Baltzer, l. c. Ueber Vielecke und Vielflache existirt ıch ein zusammenfassendes Werk von Brückner, Leipzig 1900.

In dem Raum von 4 Dimensionen gibt es 6 regelmässige olyeder und zwar:

1) *Das Pentaedroid*, von 5 Tetraedern begrenzt, von denen je 4 eine Ecke gemeinschaftlich haben; es hat 5 Ecken, 10 Kanten, 10 Seitenflächen und ist correlativ zu sich selbst.

2) *Das Octaedroid*, von 8 Würfeln begrenzt, von denen je 4 eine Ecke gemeinschaftlich haben; es hat 16 Ecken, 32 Kanten, 24 Seitenflächen.

3) *Das Hexadekaedroid* mit 16 Tetraedern, 8 Ecken, 24 Kanten, 32 Seitenflächen; es ist correlativ zu der vorhergehenden Figur, zu der es sich verhält, wie das Octaeder zum Cubus.

4) Ein Polyeder, das 24 Octaeder, 24 Ecken, 96 Kanten, 96 dreieckige Seitenflächen besitzt; es ist correlativ zu sich selbst.

5) Ein Polyeder mit 600 Tetraedern, 120 Ecken, 720 Kanten, 1200 dreieckigen Seitenflächen.

6) Ein Polyeder mit 120 Dodekaedern, 600 Ecken, 1200 Kanten, 720 fünfeckigen Seitenflächen; es ist correlativ zu dem vorhergehenden.

In den Räumen von mehr als 4 Dimensionen *gibt es nur 3 regelmässige Polyeder;* sie sind Erweiterungen der ersten drei, vorstehend angegebenen Polyeder, wie diese ihrerseits Erweiterungen des Tetraeders, Cubus und Octaeders sind.

Wenn der Raum n Dimensionen hat, so ist die Anzahl c Ecken dieser Polyeder bez.

$$n+1, \quad 2^n, \quad 2n,$$

wobei das erste Polyeder correlativ zu sich selbst und von d beiden anderen das eine correlativ zu dem anderen ist.

Nimmt man an, in dem Raum von n Dimensionen der Radius der *Kugel*, in welche diese Polyeder eingeschrieb sind, gleich 1, *so sind die Längen der Kanten bez. gleich*

$$\sqrt{\frac{2(n+1)}{n}}, \quad \sqrt{2}, \quad \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

Die Ausdehnung der Euler'schen Formel auf ein Polyed im Raum von n Dimensionen liefert:

$$1 - N_0 + N_1 - N_2 + \cdots + (-1)^{n-1} = 0,$$

worin N_0, N_1, N_2, ... die Anzahl der Ecken, Kanten, Seite flächen, der Räume von 3 Dimensionen, etc. des Polyeders l zeichnen. Stringham.

Ueber die regelmässigen Polyeder in den Räumen von und mehr Dimensionen siehe Stringham, l. c.; Scheffler, *I polydimensionalen Grössen*, Braunschweig 1880; Schlegel, l. *Bull. de la Soc. math.*, 10, p. 172; *Rend. Palermo*, 1891 sow R. Hoppe, *Regelmässige linear begrenzte Figuren von v Dimensionen, Archiv der Math.*, 67, 1882.

Untersuchungen über die Polyeder stellten ferner a Poinsot, *Compt. Rend.*, 46, 1858, p. 65; Möbius, *Werke*, Kirkman, *Mem. Phil. Soc. Manchester*, 1854, 1862; Jorda *Crelle*, 66, 68, 70; Eberhard, ib., 106; Cesàro, *Mem. A Lincei*, 6, 2. Thl., p. 75, 1877; Dostor, *Journ. des math. pu et appliquées*, (2), 5, p. 209, 1879.

In der wiederholt erwähnten L. Brill'schen Sammlu befinden sich auch Modelle, welche die Projectionen der reg mässigen Polyeder des Raums von 4 Dimensionen auf den Rau von 3 Dimensionen darstellen.

§ 4. Zusammenhang der Riemann'schen Flächen. Reguläre und symmetrische Riemann'sche Flächen.

In Kap. 15, § 2 des ersten Bands des Repertoriums w schon bei Gelegenheit der algebraischen Functionen von d sogenannten *Riemann'schen Flächen* die Rede. Es wurden d speciell die zweiblättrigen *(hyperelliptischen)* Flächen betracht

d angegeben, auf welche Art, d. h. durch welche Schnitte h diese Flächen *einfach zusammenhängend* machen lassen.

Bei den Flächen von beliebigem Geschlecht bietet sich auf aloge Art das Problem dar, die Fläche zuerst auf einen bemmten Typus zurückzuführen und dann die Schnitte zu conuiren, die sie einfach zusammenhängend machen.

Wir gehen auf die Einzelheiten der Lösung dieser Probleme er nicht näher ein und erwähnen nur, dass sich Lüroth in nem kurzen Aufsatz *„Ueber Verzweigungsschnitte und Querhnitte"* in den *Math. Ann.*, 4 und dann Clebsch, ib., 6 mit ihnen eschäftigt haben; ihre Resultate wendeten später Kasten, *Disrt.*, Göttingen 1876 auf den Fall einer dreiblättrigen Fläche id Graf, *Dissert.*, Bern 1878 auf eine sechsblättrige Fläche it 20 Verzweigungspunkten an. Andere verwandte Arbeiten nd von Lüroth, *Erlanger Sitz. Ber.*, 1883; *Abh. der kgl. yr. Acad.*, München 1885, 1887.

Jeder Verzweigungspunkt, in dem sich m_1 Blätter der läche cyclisch vereinigen, ist $m_1 - 1$ einfachen Verzweigungsunkten gleichwerthig, d. h. Punkten, in denen nur zwei Blätter erbunden sind. Siehe auch *Repertorium*, 1, p. 389.

Wenn die Fläche n Blätter hat, vom Geschlecht p ist nd die Gesammtzahl der einfachen Verzweigungspunkte, denen ie sämmtlichen Verzweigungspunkte der Fläche äquivalent sind, genannt wird, so ist:

$$t = 2n + 2p - 2.$$

Das Geschlecht einer Riemann'schen Fläche ist

$$p = -n + 1 + \tfrac{1}{2}\sum_i (m_i - 1),$$

orin die Summirung $\sum$ über alle Zahlen m_i zu erstrecken ist, elche die Anzahl der in jedem Verzweigungspunkt cyklisch mitinander verbundenen Blätter angeben.

Ist das Geschlecht p gegeben, so ist der kleinste Werth der ahl n die grösste ganze in $\frac{p+3}{2}$ enthaltene Zahl.

Hurwitz, *Math. Ann.*, 39 hat gefunden, dass, wenn die Werthe von z, für welche eine Riemann'sche Fläche mit n Blättern und vom Geschlecht p Verzweigungen haben soll, gegeben sind, es für $n = 2$ *eine* Riemann'sche Fläche mit diesen Verzweigungen gibt, ferner $\frac{1}{2}(3^{t-2} - 1)$ solche Flächen für $n = 3$; $\frac{1}{2}(2^{t-4} - 1)$ $(3^{t-2} - 1)$ für $n = 4$; etc.

Wenn das Geschlecht $p = 0$ und die Anzahl der Blät $n\,(> 2)$ ist, so beträgt die Anzahl der Riemann'schen Fläch

$$\frac{(2n-2)!}{(n-1)!}\, n^{n-4}.$$

Dieses Problem untersuchte für $n = 3$ auch Kasten, l.

Eine Riemann'sche Fläche vom Geschlecht p lässt sich Allgemeinen auf ∞^{ϱ} Arten conform (winkeltreu) auf sich sel abbilden; dabei ist $\varrho = 3$ für $p = 0$, $\varrho = 1$ für $p = 1$ u $\varrho = 0$ für $p > 1$. Schwarz, *Crelle,* 87; Hettner, *G Nachr.,* 1880, p. 386; Noether, *Math. Ann.,* 20, 21; Klei *Ueber Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ih Integrale,* Leipzig 1882, p. 66, 67.

Alle Riemann'schen Flächen vom Geschlecht Null lassen s conform ineinander transformiren; sie haben keine absolute variante (keinen Modul); d. h. es existirt kein Ausdruck, welc von den die Riemann'schen Flächen vom Geschlecht Null besti menden Constanten abhängt, und unverändert bleibt, wenn Riemann'sche Fläche transformirt wird.

In dem Fall $p = 1$ gibt es dagegen einen einzigen Mod für $p > 1$ existiren $3p - 3$, im Allgemeinen $3p - 3 +$ Moduln, worin ϱ die oben angegebene Bedeutung hat. Rieman *Theorie der Abel'schen Functionen, Crelle,* 54, 1857, § 12.

Jede Riemann'sche Fläche mit n Blättern und t Verzw gungspunkten lässt sich durch stetige Variation der Constan in jede andere Riemann'sche Fläche mit derselben Anzahl Blättern und Verzweigungspunkten transformiren.

Dieses Theorem lässt sich aus den Abhandlungen v Lüroth, *Math. Ann.,* 4; Clebsch, ib., 6 entnehmen; sie Klein, l. c., p. 66.

Benutzt man den für die Minimalflächen geltenden Sa dass ihre sphärische Abbildung conform ist (vergl. Kap. 16), ergibt sich: *Eine auf die Kugel, statt auf die Ebene, a gebreitete Riemann'sche Fläche mit mehreren Blättern lässt s conform auf eine Minimalfläche abbilden.* Weierstrass.

Man erhält so eine Fläche von gewöhnlichem Ausseh die, wie die Riemann'sche, zum Studium der analytischen Fu tionen benutzt werden kann; mittelst der Principien der *Analy situs* kann zwar bekanntlich immer eine Fläche von gewöl lichem Aussehen, d. h. ohne Verzweigungen, gefunden werd die eine Deformation einer beliebigen Riemann'schen Fläche v Geschlecht p ist (wie z. B. die Kugel mit p Henkeln, sie

pert., 1, p. 392); die Bedeutung des vorstehenden Theorems ruht jedoch darauf, dass die *Minimal*fläche und die Riemann-ne sich gegenseitig *conform (winkeltreu)* aufeinander abbilden ssen, was für die Kugel mit p Henkeln in Beziehung zur emann'schen Fläche nicht gilt.

Eine Riemann'sche Fläche vom Geschlecht $p > 1$ kann nicht iendlich viele ein-eindeutige Transformationen in sich selbst sitzen, sie kann aber eine *endliche* Anzahl derselben haben.

Wenn $f(w, z) = 0$ die der Riemann'schen Fläche in der bene z entsprechende Gleichung ist, so wollen wir

$$w_1 = R_1(w, z),$$
$$z_1 = R_2(w, z)$$

tzen und dabei seien die R rationale Functionen, welche um-ekehrt die w, z als rationale Functionen der w_1, z_1 liefern.

Wir nehmen an, die vorstehende Transformation, die wir it S bezeichnen, sei so beschaffen, *dass für sie die Riemann-che Fläche sich in sich selbst transformirt.*

Die Anzahl der birationalen oder ein-eindeutigen Transfor-ationen einer Riemann'schen Fläche in sich selbst kann nicht rösser als $84(p - 1)$ *für* $p > 1$ *sein.* Hurwitz, *Math. Ann.*, 1, p. 424.

Eine birationale Transformation einer Riemann'schen Fläche n sich selbst ist immer periodisch, d. h., wenn man von einem Punkt P ausgeht und die Transformation m-mal ausführt, so muss man wieder zu P zurückkehren. Der grösste Werth von n ist $10(p - 1)$.

Jede Riemann'sche Fläche, die eine Transformation in sich elbst von der Periode m hat, lässt sich durch eine Gleichung om Typus $\varphi(w^m, z) = 0$ *und ihre Transformation durch die educirten Formeln*

$$w_1 = e^{\frac{2i\pi}{m}} w,$$
$$z_1 = z$$

definiren.

Dieses letztere Theorem gilt auch für $p = 0$ und $p = 1$; es ist, wie auch die vorhergehenden, von Hurwitz, *Math. Ann.*, 32.

Ausser den S lassen sich auch noch andere Transformatio-nen denken, die durch die Formeln

$$w_1 = R_1(w, \bar{z}),$$
$$z_1 = R_2(\bar{w}, \bar{z})$$

definirt werden; darin bedeuten $\bar{w}$, $\bar{z}$ die zu w, z *conjugirt* co plexen Werthe.

Eine solche Transformation möge Σ heissen; wir könn annehmen, der Riemann'schen Fläche gehören auch Transf mationen Σ an.

Alle Transformationen S oder Σ, welche zu einer R mann'schen Fläche gehören, bilden offenbar eine *Gruppe*. Si *Repert.* 1, p. 28, 204.

Eine Riemann'sche Fläche, zu welcher eine Transformat Σ von der Periode 2 gehört (so dass $\Sigma^2 = 1$ ist), heisst *sy metrisch*.

Wenn die Relation $f(w, z) = 0$ reelle Coefficienten hat, leuchtet ein, dass der Riemann'schen Fläche die Substitution vom Typus

$$w_1 = \bar{w},$$
$$z_1 = \bar{z}$$

entspricht und die *Riemann'sche Fläche mithin symmetrisch*

Es gilt aber auch umgekehrt: *Wenn die Riemann's Fläche symmetrisch ist, so existirt unter den unendlich vie Formen der Gleichung $f = 0$, die ihr entsprechen, immer ei deren Coefficienten reell sind.*

Auf den *symmetrischen* Flächen gibt es Linien, die bei *Linientransformation (Symmetrie)* unverändert bleiben. *Die zahl dieser Linien kann nicht grösser als $p + 1$ sein.*

Die symmetrischen Riemann'schen Flächen wurden v Klein, *Riemann's Theor. der alg. Funct.* etc., Leipzig 18 und dann von Weichold, *Zeitschr. für Math.*, 28 untersuc Ihnen ist ein grosser Theil von Klein's autographirten V lesungsheften, V, *Riemann'sche Flächen,* Heft 2, S. S. 1892, (Teubner in Leipzig erschienen) gewidmet.

Eine Riemann'sche Fläche mit N Blättern, die sämmtl gleich verzweigt sind, d. h. so, dass N Transformationen exis ren, bei welchen man von einem Blatt zu einem beliebig

leren übergehen kann, heisst *eine regulär verzweigte Riemann-e Fläche* oder auch einfach *regulär.*

Jede einer binomischen Gleichung entsprechende Riemann'sche äche ist regulär.

Auf einer solchen Riemann'schen Fläche müssen die Ver-eigungspunkte so angeordnet sein, dass sich, wenn $z = z_0$ Werth von z ist, für welchen eine Verzweigung besteht, N Blätter für $z = z_0$ in $\frac{N}{r_i}$ Cyclen vertheilen, von denen er r_i Blätter hat.

Das Geschlecht ist in diesem Fall:

$$p = -N + 1 + \frac{N}{2} \sum_i \frac{r_i - 1}{r_i},$$

rin r_i die Anzahl der cyclisch in jedem Verzweigungspunkt reinigten Blätter bedeutet und die Summirung $\sum$ über alle erzweigungsstellen, d. h. alle Verzweigungspunkte, die in *einem nzigen* Blatt enthalten sind, zu erstrecken ist.

Es sei die Gleichung $f(w, z) = 0$ gegeben; man betrachte e als eine algebraische Gleichung in Bezug auf die einzige ariable w; d. h. man denke sich, die Variable z trete darin, ie ein Parameter, auf, und man bilde dann die *Galois'sche esolvente* dieser Gleichung.

Man erhält eine zweite Gleichung von einem gewissen rad N, gleich der Anzahl der Substitutionen der Gruppe, ie zu der gegebenen algebraischen Gleichung gehört, vergl. *epert.*, 1, p. 104; *die Riemann'sche Fläche mit N Blättern, elche der Galois'schen Resolvente mit einem Parameter entspricht, st regulär verzweigt.*

Die Riemann'schen regulär verzweigten Flächen wurden uerst von Klein, *Math. Ann.*, 14 untersucht. Er studirte peciell den Fall $p = 3$, $N = 168$, welcher einer Galois'schen esolvente der Modulgleichung für die Transformation 7ter Ord-nung der elliptischen Functionen entspricht.

Später beschäftigte sich mit ihnen Dyck, *Dissert.*, Mün-chen 1879; *Math. Ann.*, 17, 20, der die Fälle $p = 1, 2, 3$ und n einer anderen Arbeit in demselben Bd. 17 der *Math. Ann.*, . 510 auch den Fall $p = 3$, $N = 96$ betrachtete.

Ueber die Werthe von N, welche den Werthen $p = 0, 1, 2$ ntsprechen, siehe Appell-Goursat, *Fonct. algébr.*, Paris 1895,

p. 241 und ff., wo man auch noch andere Angaben findet. F
$p = 0$ erhält man Riemann'sche Flächen von 12, 24, 60 Blätte
die zugehörigen Gruppen sind Polyedergruppen. Vergl. *Repert.*,
p. 375 u. ff.

Die diesen Fällen entsprechenden algebraischen Gleichung
lauten:

$$N = 12, \quad z = \frac{(w^4 - 2\sqrt{-3}\,w^2 + 1)^3}{(w^4 + 2\sqrt{-3}\,w^2 + 1)^3},$$

$$N = 24, \quad z = \frac{(w^8 + 14w^4 + 1)^3}{108\,w^4(w^4 - 1)^4},$$

$$N = 60, \quad z = \frac{(-w^{20} + 228w^{15} - 494w^{10} - 228w^5 - 1)^3}{1728\,w^5(w^{10} + 11w^5 - 1)^5}.$$

Die in der ersten Formel enthaltenen Polynome liefe
gleich Null gesetzt, die sogenannten *Tetraedergleichungen*, ver
Repert., 1, p. 377; der Zähler und Nenner der zweiten For
entsprechen den sogenannten Polynomen des *Cubus* und
Octaeders; der Nenner der letzten Formel ist die 5te Pot
des Polynoms des *Ikosaeders* und der Zähler dessen Hesse's
Form. Siehe Klein, *Vorlesungen über das Ikosaeder*, Leip
1884.

Wichtig ist das folgende Theorem von Dyck, *M*
Ann., 20, p. 30, das Hurwitz verallgemeinert hat, ib.,
p. 421:

Wenn eine endliche Gruppe von N Transformationen
geben ist, so lässt sich immer eine regulär verzweigte Riema
sche Fläche von N Blättern finden, deren Gruppe holoedri
isomorph zur gegebenen Gruppe ist.

Mit Hülfe dieses Theorems kann, wenn eine Riemann's
Fläche gegeben ist, die eine Gruppe von Transformationen
sich selbst hat, immer eine regulär verzweigte Riemann's
Fläche construirt werden, welche dieselbe Gruppe besitzt.

Ferner:

Ist eine Gruppe von Transformationen gegeben, so lässt s
immer auf viele verschiedene Arten eine Riemann'sche Flä
construiren, welche eine Gruppe hat, die holoedrisch isomorph
der gegebenen ist. Hurwitz.

§ 5. Die Riemann'schen Flächen in projectivem Sinn von Klein.

Da die *Riemann'schen Flächen in projectivem Sinn*, die ein studirt hat, in naher Beziehung zu dem Gegenstand seres Kapitels stehen, so wollen wir zum Schluss noch einige orte über sie sagen.

Wir betrachten eine Curve von einer gewissen Classe m. n jedem reellen Punkt P der Ebene lassen sich m Tangenten die Curve ziehen, von denen ein Theil imaginär sein kann; ler imaginären Tangente entspricht ein imaginärer Berührungs- nkt, also ein imaginärer Punkt der Curve.

Wenn wir uns daher den Punkt P in ebensovielen aufeinander legten Blättern so oft gezählt denken, als imaginäre Tangen- n von P aus an die Curve gezogen werden können und als es her imaginäre Punkte der Curve (Berührungspunkte der von P is gezogenen Tangenten) gibt, so stellt die Gesammtheit der so geordneten Punkte P ein reelles geometrisches Gebilde dar, n dessen Punkten jeder einzelne einem imaginären Punkt der rve entspricht. Was nun die reellen Punkte der Curve an- ht, so erhält man sie ebenso, wenn der Punkt P auf den ellen Zweig der Curve zu liegen kommt, weil alsdann zwei njugirte imaginäre Tangenten sich vereinigen und eine reelle angente mit einem reellen Berührungspunkt liefern. Die Ebenen- ücke, die von den Punkten P gebildet werden, müssen mithin a der reellen Contour der Curve endigen und sich dort zu je weien miteinander verknüpfen.

Man habe z. B. eine Ellipse. Die einzigen Punkte der bene, von denen aus man imaginäre Tangenten an sie ziehen ann, liegen in ihrem Inneren, und zwar können von diesen unkten aus je *zwei* conjugirte imaginäre Tangenten an sie ge- gen werden; man muss sich daher denken, der Theil der bene im Inneren der Ellipse sei in zwei gleiche Blätter ver- oppelt und diese seien längs der Ellipse miteinander ver- unden. Man erhält eine Fläche, die sich, wie man sieht, nmittelbar in eine Kugel deformiren lässt (eine Fläche vom eschlecht Null).

So leicht ist aber die Construction der Fläche nicht, wenn ie Fundamentalcurve von höherer Classe ist; das Problem, elches dabei zu lösen ist, besteht darin, die Art zu ermitteln, uf welche die verschiedenen Blätter verbunden werden müssen;

es wird gewisse Theile der Ebene geben, die als doppelt, gewis andere, die als vierfach etc. anzusehen sind.

Wir geben die folgende Literatur über diesen Gegenstan an: Klein, *Math. Ann.*, 7, 10; Harnack, ib., 9, welcher die de Curven 3ter Classe entsprechenden Riemann'schen Flächen con struirte und Haskell, *Dissert.*, Baltimore 1890, der sich specie mit der Curve 4ter Classe beschäftigte, deren Gleichung in G radencoordinaten

$$u_1^3 u_2 + u_2^3 u_3 + u_3^3 u_1 = 0$$

lautet. Die linke Seite dieser Gleichung ist eine *automorp* Form; ihre Gruppe enthält 168 Transformationen. Siehe *Repe* 1, p. 346.

Kapitel XIX.

Projective Geometrie der mehrdimensionalen Räume.

§ 1. Allgemeines. Lineare Mannigfaltigkeiten. Projective und metrische Relationen. Homographische Correspondenzen.

Wenn n Variable $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gegeben sind, so ist jede Gruppe von speciellen (reellen oder auch complexen) Werthen dieser Variablen ein Element (Punkt) eines *Raums von n Dimensionen*, eines *Hyperraums*, den wir mit R_n bezeichnen wollen.

Statt n Variable kann man auch $n+1$ und die Verhältnisse von n dieser Variabeln zur letzten betrachten; der Punkt des R_n wird durch die Werthe dieser Verhältnisse bestimmt und die entsprechenden Werthe der $n+1$ Variabeln kann man die *homogenen Coordinaten* des Punkts nennen; sie können alle möglichen Werthe annehmen, nur dürfen sie nicht sämmtlich Null sein.

Eine *homogene lineare* Gleichung zwischen diesen homogenen Coordinaten definirt eine *lineare* im R_n enthaltene *Mannigfaltigkeit*, welche man eine $n-1$-*dimensionale Ebene* E_{n-1} *im* R_n, oder, wie die Franzosen und Italiener sagen, *Hyperebene* nennt. *Der Raum* R_n *enthält* ∞^n *solche Ebenen, wie er* ∞^n *Punkte enthält.*

Die Ebene E_{n-1} und der Punkt können als zueinander *duale* Elemente des Raums R_n angesehen werden; jene kann man sich aus Punkten, diesen dual aus Ebenen E_{n-1} zusammengesetzt denken.

Zu *homogenen Coordinaten einer* E_{n-1} kann man die $n+1$ Coefficienten ihrer Gleichung nehmen.

Die Gesammtheit der Punkte, deren Coordinaten *zwei* linearen Gleichungen genügen, bildet eine Mannigfaltigkeit von $n-2$ Dimensionen, die man $n-2$-*dimensionale Ebene* E_{n-2} nennt; die Italiener sagen *bipiano*; die durch k lineare Glei-

chungen gegebene Mannigfaltigkeit heisst *eine* $n-k$*-dimensionale Ebene* E_{n-k}.

Eine E_0 ist ein Punkt; eine E_1 nennt man eine Gera eine E_2 bezeichnet man auch bisweilen als gewöhnliche Ebe eine E_3 als gewöhnlichen Raum.

Nimmt man zu Elementen des R_n die $n-1$-dimensionalen Ebenen E_{n-1} anstatt der Punkte, so ergibt sich dur einfache bekannte Betrachtungen anstatt der ν-dimensional Ebene E_ν ein $(n-\nu-1)$-dimensionales ebenes Punktgebil $P_{n-\nu-1}$, durch das ∞^ν E_{n-1} hindurchgehen.

Die E_ν und die $P_{n-\nu-1}$ bilden die beiden Reihen von Grun gebilden, die sich im Raum R_n dual entsprechen; die aus Punkt bestehende E_1 und der von ∞^{n-2} E_{n-1} umhüllte P_1 si Gebilde 1ter Stufe (von einer Dimension); die E_2 und der sind Gebilde 2ter Stufe, und so weiter.

Die Ebene E_{n-k} *wird im Allgemeinen durch* $n-k+$ *Punkte bestimmt; sie ist ein linearer Raum* $(n-k)^{\text{ter}}$ *Dimension, ein im* R_n *enthaltener Raum* R_{n-k}.

Zwei lineare im R_n *enthaltene Räume* R_{n-k} *und* R_{n-} *haben im Allgemeinen keine Punkte gemeinschaftlich, wo* $k+k'>n$ *ist; sie haben mindestens einen Raum* R_r *gemeinschaftlich, wenn*

$$k+k'=n-r \quad \text{ist;}$$

auch wenn $k+k'>n$ *ist, können sie Punkte gemeinschaftlich haben.*

Wenn R_r, $R_{r'}$ *keine Punkte gemeinsam haben und zum* R_n *gehören, so ist der lineare Raum kleinster Dimension, der zu* R_n *gehört und sie beide enthält, von der Dimension* $r+r'+$

Haben ferner R_r und $R_{r'}$ einen Raum R_m gemeinsam, gilt der Satz:

Wenn zwei lineare Räume R_r *und* $R_{r'}$ *einen Raum* R *gemeinsam haben, so ist der lineare Raum kleinster Dimension der sie enthält, von der Dimension*

$$t=r+r'-m,$$

d. h., es ist

$$t+m=r+r'.$$

Weitere Resultate über die in einem R_n enthaltenen linear Räume findet man bei Bertini, *Rend. Istit. Lomb.*, 188 Segre, *Rend. Palermo*, 2, 1888; Castelnuovo, *Rend. Ac Lincei*, 1889.

Durch Erweiterung der gewöhnlichen Formeln und Betrachtungen der analytischen Geometrie und durch Einführung der Begriffe des *Parallelismus*, der *senkrechten Richtung*, des *Abstands*, der *Winkel* etc. lässt sich eine *metrische* Geometrie der mehrdimensionalen Räume aufstellen.

Solche Betrachtungen wurden von Jordan, *Bull. de la Soc. math.*, 3, p. 103 und von D'Ovidio, *Mem. Acc. Lincei*, 1877; *Math. Ann.*, 12 angestellt; der letztere Autor verallgemeinerte die Formeln, indem er ein beliebiges *quadratisches Gebilde im* R_n (eine *hyperquadratische Fläche*) als das *Absolute* des Raums annahm (siehe weiter unten Kap. 21).

Zwei *Ebenen* E_{n-1} mit den Gleichungen (in nicht homogenen Coordinaten)

$$a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n + \alpha = 0,$$
$$b_1 x_1 + \cdots + b_n x_n + \beta = 0$$

heissen *parallel*, wenn

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n} \quad \text{ist.}$$

Es seien zwei lineare Mannigfaltigkeiten R_{n-k}, $R_{n-k'}$ gegeben, von denen die erste von der Dimension $n - k$ durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= a_{11} x_1 + \cdots + a_{1n} x_n + \alpha_1 = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_k &= a_{k1} x_1 + \cdots + a_{kn} x_n + \alpha_k = 0 \end{aligned}\right\} R_{n-k}$$

definirt wird und die zweite von der Dimension $n - k'$ durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} B_1 &= b_{11} x_1 + \cdots + b_{1n} x_n + \beta_1 = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ B_{k'} &= b_{k'1} x_1 + \cdots + b_{k'n} x_n + \beta_{k'} = 0 \end{aligned}\right\} R_{n-k'}.$$

Von den im R_{n-k} enthaltenen E_{n-1} seien ϱ von einander unabhängig*) und ebensovielen im $R_{n-k'}$ enthaltenen E_{n-1} parallel; wir sagen dann, die beiden linearen Mannigfaltigkeiten R_{n-k}, $R_{n-k'}$ haben *einen Parallelismus* ϱ^{ter} *Ordnung*.

*) d. h. so beschaffen, dass keine identische lineare Relation mit constanten Coefficienten zwischen den linken Seiten ihrer Gleichungen besteht.

Wenn $k \leqq k'$ und $\varrho = k$ ist, wird die erste Mannigfalt keit der zweiten *parallel* genannt.

Die beiden Mannigfaltigkeiten haben einen Parallelism ϱ^{ter} Ordnung, wenn die n Gleichungen

$$\lambda_1 a_{11} + \cdots + \lambda_k a_{k1} = \mu_1 b_{11} + \cdots + \mu_{k'} b_{k'1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\lambda_1 a_{1n} + \cdots + \lambda_k a_{kn} = \mu_1 b_{1n} + \cdots + \mu_{k'} b_{k'n}$$

sich auf nur $k + k' - \varrho$ von einander verschiedene Gleichung reduciren lassen, d. h. wenn die Matrix der Coefficienten die Gleichungen den Rang $k + k' - \varrho$ hat.

Der *Abstand* zweier Punkte (x), (y) ist durch

$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} \quad \text{gegeben.}$$

Der *Abstand eines Punkts von einer linearen Mannigf tigkeit* ist der Abstand des gegebenen Punkts von dem Pur der Mannigfaltigkeit, der ihm *am nächsten* liegt; der letzt heisst *die orthogonale Projection* des gegebenen Punkts.

Der *Abstand zweier linearer Mannigfaltigkeiten* ist Abstand derjenigen beiden Punkte der einen und der ander die sich am nächsten liegen.

Eine lineare Mannigfaltigkeit $R_{n-k'}$ heisst *senkrecht* einer anderen R_{n-k}, wenn, nachdem durch einen Punkt Raums zwei Mannigfaltigkeiten $R'_{n-k'}$, R'_{n-k} parallel zu R_n bez. zu R_{n-k} gelegt wurden, jeder Punkt von $R'_{n-k'}$ sich R'_{n-k} in einen Punkt projicirt, der dem gemeinschaftlich Schnitt der beiden Mannigfaltigkeiten R' angehört.

Wenn $R_{n-k'}$ senkrecht auf R_{n-k} steht, so ist umgeke auch R_{n-k} lothrecht zu $R_{n-k'}$.

Sind zwei *Gerade* mit den Gleichungen

$$\frac{x_1 - a_1}{\alpha_1} = \frac{x_2 - a_2}{\alpha_2} = \cdots = \frac{x_n - a_n}{\alpha_n},$$
$$\frac{x_1 - b_1}{\beta_1} = \frac{x_2 - b_2}{\beta_2} = \cdots = \frac{x_n - b_n}{\beta_n}$$

gegeben, *so bleibt der Ausdruck*

$$\cos^2 \theta = \frac{\Sigma(\alpha_r \beta_r)}{\Sigma \alpha_r^2 \, \Sigma \beta_r^2}$$

seinem Werth nach unverändert (ist eine Invariante) für beliebige lineare orthogonale Transformation der Coordina

h. für eine lineare Transformation, die auf die Variabeln x *isgeübt wird und deren Determinante orthogonal ist. Repert.,* S. 48.

Der Winkel θ heisst der *Winkel* der beiden Geraden.

Sind zwei beliebige lineare Mannigfaltigkeiten gegeben, so *inn* man mittelst der vorstehenden Formel die Winkel berech-*en*, welche die Geraden der einen mit den Geraden der anderen *lden*. Der *kleinste* aller so erhaltenen Winkel heisst der *Winkel* *er beiden Mannigfaltigkeiten.*

Die beiden Mannigfaltigkeiten stehen senkrecht aufeinander, *enn dieser Winkel ein rechter ist; alsdann ist jede Gerade der* *nen stets lothrecht zu jeder Geraden der anderen.*

Einen Raum R_r mit einem $R_{r'}$ *schneiden,* heisst den beiden emeinsamen Raum $R_m = R_{r+r'-n}$ construiren; den Raum R_r on einem Raum $R_{r'}$ aus *projiciren*, heisst den Raum $R_{r+r'+1}$ onstruiren, der sie beide enthält.

Sind in zwei Räumen R_n, R_n' zwei Gruppen von $n+2$ unkten gegeben, so kann man stets durch Projectionen und chnitte von der ersten Gruppe zur zweiten übergehen.

Zwei Räume von n Dimensionen R_n, R_n' heissen *projectiv* der *homographisch* oder *collinear*, wenn zwischen den in dem inen enthaltenen linearen Räumen und den in dem anderen nthaltenen eine stetige ein-eindeutige Correspondenz derart besteht, ass zweien sich angehörenden Räumen in dem einen zwei benfalls sich angehörende Räume des anderen entsprechen, und enn ferner jeder Punktreihe des einen eine projective Punkt-eihe in dem anderen zugeordnet ist.

Zwei homographische und superponirte Räume R_n, R_n' können eine $n+2$ Punkte gemeinschaftlich haben, ohne zusammenzu-allen, es sei denn, $n+1$ beliebig aus diesen herausgegriffene unkte liegen in derselben E_{n-1}.

Auf ähnliche Art werden die *Correlation* oder *Dualität* oder *eciprocität* zwischen zwei Räumen definirt.

Eine Homographie zwischen zwei Räumen wird analytisch, vie gewöhnlich, so dargestellt, dass man lineare Relationen wischen den Coordinaten der sich in den beiden Räumen ent-prechenden Punkte festsetzt; die Homographie ist *allgemein,* enn die Determinante der Coefficienten dieser linearen Rela-ionen von Null verschieden ist; man kann sich aber denken, iese Determinante sei Null, und habe den *Rang* (die *Charakteristik)*

$n - h + 1$, siehe *Repert.*, 1, p. 89; man erhält dann
sogenannten *singulären Homographien von der Species h.*
diesem Fall *existirt in einem der beiden Räume ein linea*
Raum R'_{h-1} *von der Dimension* $h - 1$ *(ein singulärer Raun*
der so beschaffen ist, dass jedem seiner Punkte alle Punkte
anderen Raums entsprechen; und umgekehrt: *in dem zweit*
Raum gibt es einen Raum R_{n-h} *von der Dimension* $n -$
(singulären Raum), dessen Punkten in dem ersten Raum a
Punkte eines Raums R'_h *entsprechen, der den singulären Ra*
R'_{h-1} *enthält.*

Mit dem Studium der Theorie der Homographie der mel
dimensionalen Räume hat Veronese in der weiter unten citirt
Arbeit den Anfang gemacht; es wurde dann weiter verfol
von: Segre, *Mem. Acc. Lincei*, 1884—1886; *Mem. Acc. T*
rino, 1885; Bertini, *Rend. Ist. Lomb.*, 1886—87; *Atti A*
Torino, 1887; Predella, *Ann. di mat.*, (2), 17; *Atti Acc. T*
rino, 1891—92; etc. Siehe die Darstellung in Muth's *Theo.*
und Anwendung der Elementartheiler, Leipzig 1900, § 17, *Cl*
sificationen der Collineationen in einem Raum beliebig hol
Dimension.

Es waren Cayley, *Cambr. math. Journ.*, 4, 1845; *Crel*
1846; *Werke*, 1, p. 55, 317 und Cauchy, *Compt. Rend.*, 184
die zuerst die Ausdrücke der *Geometrie von n Dimensionen* a
wendeten, während die erste Definition der Mannigfaltigkeit
von *n* Dimensionen wohl Grassmann in seiner *Ausdehnun*
lehre, Leipzig 1844, Berlin 1862 zu verdanken ist.

Die erste gründliche Erörterung der Principien der Geomet
in einem beliebigen Raum ist von Riemann, *Ueber die Hyp*
thesen, die der Geometrie zu Grunde liegen, 1854, veröffentli
1867, von dem auch der erste Begriff der *Krümmung* ei
höheren Raums herrührt. Siehe weiter unten Kap. 20.

Die Arbeiten und Untersuchungen über die Geometrie v
n Dimensionen lassen sich bei dem heutigen Stand der Wisse
schaft in drei Kategorien eintheilen.

Zu der ersten kann man alle diejenigen zählen, welche
Grundprincipien der Geometrie in *absolutem* Sinn betreff
d. h. unabhängig von *gewissen* Fundamentalhypothesen über
Natur des Raums, z. B. von der Hypothese über die *Linearit*

Von den Studien, welche diese Richtung verfolgen,
denen sich dann auch die Untersuchungen von Lobatschefsk
und Bolyai über die Grundlagen der *nicht-Euklidischen G*

trie gesellen (siehe Kap. 21), sind die wichtigsten von temann, l. c.; Cayley, *Phil. Trans.*, 93, 1859; *Werke*, 2; eltrami, siehe Kap. 20 und 21; Helmholtz, *Ueber die Thatchen, die der Geometrie zu Grunde liegen, Gött. Nachr.*, 1868; lein, *Math. Ann.*, 4, 6; De Tilly, *Essai sur les principes ndam. de la Géom.*, Bordeaux 1879; Georg Cantor, *Crelle*, 1, oder auch *Acta math.*, 2; Lie, *Leipz. Ber.*, 1886, 1890; üroth, *Sitzungsber. der phys.-med. Societät zu Erlangen*, 1878, 899, *Abbildung von Mannigfaltigkeiten verschiedener Dimenmen;* etc.

Systematische Behandlung erfährt derselbe Gegenstand in en Büchern von Pasch, *Vorlesungen über neuere Geometrie*, ipzig 1882; Veronese, *Fondamenti di Geometria*, etc., Pa-va 1891, deutsch von Schepp unter dem Titel: *Grundzüge r Geometrie von mehreren Dimensionen*, Leipzig 1894; Kilng, *Einführung in die Grundlagen der Geometrie*, Paderborn 893; Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, Leipzig 1899. Am chluss des umfangreichen Veronese'schen Werks sind viele storisch-kritische Angaben zusammengestellt.

Zu der zweiten Kategorie gehören die Arbeiten über die usdehnung der Begriffe, Formeln und Sätze der gewöhnlichen nfinitesimalgeometrie auf die Räume von mehreren Dimensionen siehe Kap. 20); zu der dritten schliesslich die Forschungen, elche die Begriffe und Probleme der projectiven und metrihen Geometrie der Ebene und des gewöhnlichen Raums auf eliebig hohe Mannigfaltigkeiten auszudehnen suchen.

Die bereits citirten Schriften von Jordan und D'Ovidio nd der letzteren Richtung zuzuzählen, zu welcher auch die rundlegende Arbeit von Veronese in den *Math. Ann.*, 19 zu echnen ist.

Auf dieser Arbeit fussend, begann man die projective eometrie der mehrdimensionalen Räume zu begründen, d. h. ie Theorie der allgemeinen Homographien, die Lehre von den n einem R_n enthaltenen Mannigfaltigkeiten höherer Ordnung nd speciell auch die Theorie der in einem R_n enthaltenen uadratischen Gebilde, Curven, Regelflächen, etc.

Es ist natürlich, dass man auch die birationalen Correspon-enzen der Ebenen und der gewöhnlichen Räume auf die mehrimensionalen Räume zu erweitern suchte. Siehe Kap. 6, § 5; Kap. 9, § 6. Arbeiten darüber sind von Noether, *Math. Ann.*, 2; S. Kantor, *Rend. Ist. Lomb.*, 1894; Brill, *Quart.*

Journ., 27, 1895 und für den Raum von 4 Dimensionen von D Pezzo, *Rend. Acc. Napoli*, 1896—97.

Die darstellende Geometrie in dem Raum von 4 Dimension wurde von Veronese, *Atti Ist. Veneto*, 1882 behandelt.

Betrachtet man ferner als Element des Raums von 4 od mehr Dimensionen nicht, wie bisher, den Punkt, sondern Gerade, so lässt sich eine *Liniengeometrie* aufstellen; Unt suchungen dieser Art sind von Segre, *Rend. Palermo*, 2 u Castelnuovo, *Atti Ist. Veneto*, 1891.

Wir wollen schliesslich noch bemerken, dass die *Kinema* in den höheren Räumen von Jordan, l. c., dann auch v Clifford, *Proc. Lond. math. Soc.*, 1876; Beltrami, *B Scienc. math.*, 1876 und von Anderen untersucht wurde; Verzeichniss zahlreicher hierher gehöriger Arbeiten findet m bei Loria, *Il passato e il presente delle principali teorie geo* 2. ed., Torino 1896. p. 308, 309, deutsche Ausg. von Schüt *Die hauptsächlichsten Theorien der Geometrie*, Leipzig 1888, p. 1

§ 2. Nicht lineare Mannigfaltigkeiten. Flächengebilde im R_n. Monoidale Darstellung.

Die Gesammtheit der Punkte des R_n, deren Coordina einer rationalen homogenen Gleichung mit ganzzahligen Coe cienten von der Ordnung ν in den Variabeln genügen, hei *ein algebraisches Flächengebilde (Hyperfläche)* ν^{ter} *Ordnung im* R_n.

Die Zahl ν *gibt die Anzahl der Punkte an, in denen e Gerade das Flächengebilde (die Hyperfläche) schneidet.*

Eine Hyperfläche ν^{ter} *Ordnung ist durch*

$$N(\nu) = \binom{n+\nu}{\nu} - 1$$

willkürliche Punkte bestimmt.

Durch einen Punkt P einer Hyperfläche kann man Gera ziehen, welche in diesem Punkt mit der Hyperfläche ν Schnitte gemeinsam *(eine zweipunktige Berührung)* haben; *Ort aller dieser Geraden ist eine* E_{n-1}, die *Hyperberührun ebene* an die Hyperfläche in P heisst.

Man nennt *Classe der Hyperfläche* die Anzahl ihrer Hyp berührungsebenen, die durch einen linearen Erzeugungsra R_{n-2} des Raums R_n gehen; *die Classe einer Hyperfläche Ordnung ist im Allgemeinen gleich* $\nu(\nu-1)^{n-1}$, *wenn Hyperfläche keine Singularitäten besitzt, d. h. durch eine all meine Gleichung dargestellt wird.*

Singulär r^{ter} Ordnung werden die Punkte einer Hyper-:he genannt, welche so beschaffen sind, dass jede durch sie ıende Gerade die Fläche daselbst in r zusammenfallenden nkten trifft.

Jeder singuläre Punkt r^{ter} Ordnung vermindert die Classe Hyperfläche um $r(r-1)^{n-1}$ Einheiten.

Eine Hyperfläche ν^{ter} Ordnung mit einem ν-fachen Punkt teht aus unendlich vielen durch diesen Punkt gehenden Geraden nem Kegel).

Algebraische Mannigfaltigkeit k^{ter} Dimension und ν^{ter} Ordng wird ein im R_n enthaltener Raum k^{ter} Dimension genannt, r so beschaffen ist, dass jeder lineare R_{n-k} des R_n ihn im Allmeinen in ν verschiedenen Punkten schneidet.

Die Mannigfaltigkeiten von *zwei* Dimensionen pflegt man ächen, die *einer* Dimension *Curven* zu nennen.

Eine algebraische Mannigfaltigkeit heisst *normal für den enen Raum,* wenn sie sich nicht als Projection einer in einem ıum höherer Dimension liegenden Mannigfaltigkeit *derselben* dnung ansehen lässt.

Jede algebraische Mannigfaltigkeit k^{ter} Dimension und ν^{ter} dnung ist immer in einem linearen Raum $R_{k+\nu-1}$ enthalten, nn aber auch in einem linearen Raum von weniger Dimenmen liegen.

Speciell:

Jede Mannigfaltigkeit 2ter Ordnung von k Dimensionen ist mer in einem linearen Raum R_{k+1} enthalten.

Jede Curve ν^{ter} Ordnung ist immer in einem linearen Raum thalten, der höchstens ν Dimensionen hat.

Aus diesem Theorem folgt, dass eine Curve 2ter Ordnung ets *höchstens* eben, eine Curve 3ter Ordnung *höchstens* eine ppelt gekrümmte cubische Curve sein kann, etc.

Ist eine Mannigfaltigkeit k^{ter} Dimension gegeben, so bildet e Gesammtheit aller sie in einem Punkt berührenden Geraden iehe oben) *eine lineare Mannigfaltigkeit von derselben Dimenn k.* Ueber die linearen Räume, die eine Mannigfaltigkeit rühren, siehe Del Pezzo, *Rend. Acc. Napoli,* 1886.

Zwei algebraische Mannigfaltigkeiten, von denen die eine e Ordnung ν und die Dimension k, die andere die Ordnung und Dimension k' hat, schneiden sich in einer Mannigfaltig-

keit von der Ordnung $\nu\nu'$ und Dimension $k + k' - n$, vor gesetzt, dass $k + k' \geq n$ ist und die beiden Mannigfaltigke keine Mannigfaltigkeit von einer Ordnung gemeinschaftlich ha die grösser oder gleich $k + k' - n + 1$ ist.

Wenn $k + k' < n$ ist, so haben sie im Allgemei keinen Punkt, für $k + k' = n$ dagegen $\nu\nu'$ Punkte gemeins Halphen, *Bull. Soc. math.*, 2; Noether, *Math. Ann.*, 11.

Wie bei den gewundenen Curven des gewöhnlichen Ra so bietet sich selbstverständlich auch hier das Problem analytischen Darstellung derjenigen Mannigfaltigkeiten im R R_n dar, die *nicht immer vollständige* Schnitte von Hyperflä sind.

Halphen l. c. erweiterte zu diesem Zweck die von Cay für gewundene Curven vorgeschlagene *monoidale Darstell* Vergl. Kap. 9, § 2, S. 215.

Ein *Monoid* ist eine Hyperfläche ν^{ter} Ordnung mit ei $(\nu - 1)$fachen Punkt. *Jede durch den vielfachen Punkt geh Gerade schneidet sie in einem einzigen anderen Punkt;* d kommt der Name *Monoid.*

Jede Mannigfaltigkeit k^{ter} Dimension kann analytisch d eine homogene Relation zwischen nur $k + 2$ (homogenen) C dinaten

$$x_0, x_1, \ldots, x_{k+1}$$

dargestellt werden und durch $n - k - 1$ Monoide; die er Relation ist die Gleichung einer conischen Hyperfläche.

Eine andere Methode zur analytischen Darstellung Mannigfaltigkeiten wird durch das folgende Theorem K necker's vermittelt, welches wir schon bei der Bespreck der Curven doppelter Krümmung im gewöhnlichen Raum erw haben. Vergl. S. 214.

Jede Mannigfaltigkeit k^{ter} Dimension des Raums R_n l immer als vollständiger Schnitt von höchstens $n + 1$ Hyperflä angesehen werden.

§ 3. Die quadratischen Gebilde im R_n. Angaben ü die cubischen Gebilde im R_4.

Ein quadratisches Gebilde des R_n ist eine Hyperf 2ter Ordnung; sie wird mithin durch eine Gleichung 2ten G in den Coordinaten dargestellt.

Durch $\frac{n(n+3)}{2}$ *Punkte des* R_n *geht im Allgemeinen ein* ziges *quadratisches Gebilde.*

Das quadratische Gebilde ist auch 2ter *Classe.*

Gibt man der Gleichung dieser Fläche die Form

$$\sum_{ij} a_{ij} x_i x_j = 0, \quad (i, j = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

ist die *Discriminante* der Gleichung

$$A = |a_{ij}|.$$

Wenn diese Discriminante von Null verschieden ist, so ibt sich das allgemeine quadratische Gebilde, im anderen Fall ält man die *quadratischen Kegel* oder *specielle quadratische bilde.* Es gibt verschiedene Arten der letzteren, je nach dem *ng* der Determinante A; wenn ins Besondere der *Rang* von der $(n - h + 1)^{\text{te}}$ ist, so sagt man, der *quadratische Kegel von der* h^{ten} *Species.*

Ein quadratischer Kegel h^{ter} *Species enthält unendlich viele ppelpunkte, die einen linearen Raum* R_{h-1} *bilden; für* $h = 1$ *ält man nur einen Doppelpunkt.*

Die allgemeinen quadratischen Gebilde im R_n *haben keine soluten Invarianten; sie haben nur eine Invariante (die Discri- nante); sie sind daher, vom Standpunkt der projectiven Geo- trie aus betrachtet, sämmtlich äquivalent.*

In einem allgemeinen quadratischen Gebilde gibt es lineare ume von der Dimension $\frac{n-2}{2}$ *oder* $\frac{n-1}{2}$, *je nachdem n ade oder ungerade ist.*

Wenn das quadratische Gebilde h^{ter} *Species ist, so werden se Zahlen* $\frac{n+h-2}{2}$ *bez.* $\frac{n+h-1}{2}$, *je nachdem* $n + h$ *gerade er ungerade ist.*

Wenn n eine ungerade Zahl ist, so existiren zwei verschie- ne in dem quadratischen Gebilde enthaltene Systeme von $R_{\frac{n-1}{2}}$. *nachdem* $\frac{n-1}{2}$ *gerade oder ungerade ist, hat man den funda- ntalen Unterschied zu machen, dass sich (im ersten Fall) zwei* $_{\frac{n-1}{2}}$ *nur dann schneiden, wenn sie demselben System angehören, er (im zweiten Fall) nur dann, wenn sie zu verschiedenen stemen gehören.* Segre.

Allgemeiner:

Betrachtet man einen (nicht linearen) Raum von der Dim sion $\frac{n-1}{2}$, *der in dem quadratischen Gebilde enthalten ist, die linearen Räume* $R_{\frac{n-1}{2}}$ *des* 1ten *Systems in* k *Punkten, lincaren Räume* $R_{\frac{n-1}{2}}$ *des* 2ten *Systems aber in* k' *Punkten t und dann einen anderen analogen Raum, dem auf ähnliche Art Zahlen* k_1, k_1' *entsprechen, so ist die Anzahl der Punkte, denen sich die beiden Räume schneiden,*

$$kk_1' + k_1k', \text{ wenn } \frac{n-1}{2} \text{ ungerade,}$$

und

$$kk_1 + k'k_1', \text{ wenn } \frac{n-1}{2} \text{ gerade ist.}$$

Dieses Theorem von Segre ist die Erweiterung e Chasles'schen Satzes über algebraische Curven, die auf quadratischen Flächen des gewöhnlichen Raums liegen. V S. 245.

Mit den quadratischen Gebilden des R_n beschäftigte sich z Veronese im 3. Kap. seines Aufsatzes in den *Math. Ann.*, später widmete ihnen Segre eine umfangreiche Arbeit, *A Acc. Torino,* 1884, der auch Büschel von quadratischen Gebi und die Fläche 4ter Ordnung, welche die *Basis* des Büs ist, studirte und die letztere auf Grund der Theorie der We strass'schen *Elementartheiler* classificirte. Vergl. oben S. und *Repert.*, 1, S. 328 u. ff. Hierher gehören auch ein gemeines von F. Klein angegebenes Theorem über Sch reeller quadratischer Formen (*Dissertation, Math. Ann.*, 23) Untersuchungen von A. Loewy, *Crelle,* 122.

Das Studium und die Classification dieser Fläche 4ter nung steht in naher Beziehung zu den Untersuchungen über *Fläche* 4ter *Ordnung mit Doppelkegelschnitt, welche die Proje der ersteren Fläche auf den Raum* R_3 *ist.* Siehe darüber Ausführungen auf S. 321.

Mit den Büscheln quadratischer Gebilde im R_n beschäf sich auch Bertini, *Rend. Lincei,* 1886 und mit den Büs specieller quadratischer Gebilde (Kegel) Segre, *Atti Acc. To* 1884; andere Arbeiten über die quadratischen Gebilde sind Del Pezzo, *Rend. Acc. Napoli,* 1885, 1895 und über ihre ferentialgleichung von Berzolari, *Rend. Acc. Lincei,* 1896

Ueber die projective Erzeugung der quadratischen Gebilde Ausdehnung der gewöhnlichen Erzeugungsweise (vergl. S. 100) det man Näheres in den citirten Arbeiten von Veronese d Segre.

Die bemerkenswerthesten Fälle der Gebilde 3ter Ordnung s Raums von 4 Dimensionen (speciell die Gebilde, welche enen enthalten und die mit 6, 7, 8, 9, 10 Doppelpunkten) rden von Segre, *Mem. Acc. Torino,* 39; *Atti Acc. Torino,* 87 und von Castelnuovo, *Atti Ist. Veneto,* 1887 studirt.

Mit gewissen Mannigfaltigkeiten von drei Dimensionen, die s Reihen von Ebenen zusammengesetzt sind, befasste sich gre, *Atti Acc. Torino,* 21, 1886.

§ 4. Die Flächen d. h. Mannigfaltigkeiten von zwei Dimensionen des Raums R_n. Die Regelflächen. Die Veronese'sche Fläche V_2^4 im Raum R_5.

Von den im R_n enthaltenen Mannigfaltigkeiten von k mensionen wurden eingehender die Flächen ($k = 2$) und ter diesen die auf die Ebene abbildbaren Flächen und die *egelflächen* von Veronese l. c.; Segre, *Atti Acc. Torino*, 1884, 886; *Rend. Acc. Lincei,* 1887; *Math. Ann.,* 30, 34; Del Pezzo, *end. Acc. Napoli,* 1885—86—87; *Rend. Palermo,* 1, 1887 udirt.

Viele der Betrachtungen, die über die Flächen des gewöhnchen Raums angestellt werden, lassen sich leicht auf die lächen der Räume höherer Dimension ausdehnen; so z. B. die *ene Abbildung,* die Untersuchungen über das *Geschlecht* der läche etc. Ueber diese letzteren siehe die auf S. 223 citirten rbeiten. Man beachte, dass in dem dort erwähnten Aufsatz on Segre die Betrachtungen über einen dem Geschlecht analogen ivarianten *Charakter* auch auf beliebige Mannigfaltigkeiten ausedehnt werden.

Eine Punkt für Punkt auf die Ebene abbildbare Fläche t ein *Homaloid* (oder *Fläche vom Geschlecht Null*, oder *ratiole* oder *unicursale Fläche*).

Schneidet man eine zum R_n gehörige Regelfläche mit linearen Räumen R_{n-1}, so erhält man natürlich Curven von dem-

selben *Geschlecht**); dieses Geschlecht wird als *Geschlecht* *Regelfläche* angesehen. Siehe S. 223.

Alle zu einem R_n (und zu keinem geringeren linearen Ra *gehörigen Flächen $(n-1)^{ter}$ Ordnung sind entweder Re* *flächen oder Kegel mit Ausnahme der sogenannten Verone* *schen Fläche 4ter Ordnung (für $n=5$), von der weiter u* *die Rede sein wird.* Del Pezzo.

Die im R_n enthaltenen Flächen n^{ter} Ordnung sind für n *sämmtlich Regelflächen.*

Die im R_n enthaltenen Flächen ν^{ter} Ordnung sind, w *ν unter gewisse Grenzen herabsinkt, sämmtlich Regelflächen.* D Grenzen wurden von Del Pezzo, *Rend. Acc. Napoli,* 5. F 1887 berechnet, ergeben sich aber nicht sehr einfach.

Jede zum R_n gehörige Regelfläche $(n-1)^{ter}$ Ordnung *rational.*

Eine von *allen* Erzeugenden einer Regelfläche geschnitt Curve heisst *Directrix (Leitlinie).*

Jede Regelfläche $(n-1)^{ter}$ Ordnung des R_n lässt e *einzige Directrix kleinster Ordnung zu, es wäre denn n* *gerade und die kleinste Ordnung gerade $\frac{n-1}{2}$, in welchem* *es ∞^1 Leitlinien geringster Ordnung gibt.*

Die nothwendige und ausreichende Bedingung, damit *Regelflächen $(n-1)^{ter}$ Ordnung des R_n projectiv identisch s* *besteht darin, dass sie Leitlinien von derselben geringsten* *nung haben müssen.*

Daraus ergibt sich eine Classification der Regelflä $(n-1)^{ter}$ Ordnung des R_n nach der Ordnung der Leitl geringster Ordnung, *da diese Ordnung von* 1 *bis* $\frac{n}{2}$ *bez.* $\frac{n}{}$ *variiren kann.* Segre.

Auf einer Regelfläche $(n-1)^{ter}$ Ordnung des R_n schne *sich zwei Leitlinien von den Ordnungen $n-k$, $n-k'$ in*

$$n-k-k'-3$$

Punkten.

Die rationalen Regelflächen eines beliebigen Raums, we *vom Geschlecht $p=0$ und der $(n-1)^{ten}$ Ordnung sind, k* *man sämmtlich als Projectionen von dem R_n angehörigen Re* *flächen $(n-1)^{ter}$ Ordnung auffassen.*

Die elliptischen Regelflächen eines beliebigen Raums, we

---

*) Ueber das Geschlecht der Curven siehe § 5.

Geschlecht $p = 1$ und die Ordnung $(n+1)$ haben und keine ...el sind, müssen stets Projectionen von Regelflächen $(n+1)^{ter}$ ...dnung des R_n sein.

Alle Regelflächen (die keine Kegel sind) vom Geschlecht 2 ... der Ordnung $n+3$ sind Projectionen von Regelflächen der... ...en Ordnung, die zum R_n gehören.

Allgemeiner:

Alle Regelflächen von der Ordnung ν und dem Geschlecht ... die einem Raum angehören, der von geringerer Dimension, ... $R_{\nu-2p+1}$, ist, sind Projectionen von demselben Raum ange... ...igen Regelflächen derselben Ordnung. Segre.

Jede Regelfläche von der Ordnung ν und dem Geschlecht ...enthält Leitlinien von einer Ordnung $\leqq \frac{\nu+p}{2}$; daraus ergibt ..., wie für die rationalen Regelflächen (siehe oben), ein Kri... ...ium zur Classification der Regelflächen nach den *Leitlinien ...ingster Ordnung.*

Eine Formel von Sturm-Segre über die Ordnung und ... Geschlecht einer Curve auf einer Regelfläche wurde auf ... 230 angegeben.

*Eine Regelfläche vom Geschlecht $p > 0$ und der Ordnung $\geq 4p$ *) ist, wenn sie kein Kegel ist, höchstens in einem $R_{\nu-p}$ ...halten.*

Wenn sie im $R_{\nu-p}$ enthalten und $p > 1$ ist, so hat sie eine ...pelte Directrix; ist sie im $R_{\nu-p-1}$ enthalten und ist $p > 2$, ... besitzt sie einen doppelten Kegelschnitt oder eine doppelte oder ...fache gerade Directrix oder schliesslich (für $p = 3$) eine ein...che ebene Curve 4ter Ordnung. Segre.

Wir gehen nun zu der Veronese'schen Fläche über, auf ... wir schon hingewiesen haben.

Die Veronese'sche Fläche, die wir mit V_2^4 bezeichnen ...llen, ist 4ter Ordnung und in dem Raum von 5 Dimensionen ...thalten; *sie ist Punkt für Punkt auf eine Ebene abbildbar ...so ein Homaloid,* vergl. S. 589) und ist eine *Normal*fläche ... R_5. Siehe S. 585.

Sie wird dadurch erzeugt, dass man den Kegelschnitten

---

*) Diese Beschränkung dient nur dazu, die Resultate zu verein...chen. Siehe die Arbeiten von Segre, besonders auch in den *Math. ...nn.*, die vollständiger, als die übrigen, sind.

einer Ebene homographisch die E_4 des R_5 zuordnet; allen du einen Punkt gehenden Kegelschnitten entsprechen ∞^4 sich einem Punkt schneidende E_4 des R_5; *der Ort dieser Punkte die gesuchte Fläche.*

Die Fläche enthält ein doppelt unendliches System Kegelschnitten K; durch zwei ihrer Punkte geht nur ein Ke schnitt und durch einen Punkt von ihr ∞^1 Kegelschnitte.

Zwei Kegelschnitte K treffen sich in einem Punkt und li in einem Raum R_4, der in diesem Punkt die Fläche berühr

Die Berührungsebenen bilden eine Hyperfläche 3ter Clas

Die Ebenen der Kegelschnitte K heissen *Schnittebe 1ter Art.*

Zwei Schnittebenen 1ter Art schneiden sich niemals in e Geraden, sondern immer in einem einzigen Punkt. Sie bi eine Hyperfläche 3ter Ordnung.

Eine Ebene des R_5 hat im Allgemeinen keinen Punkt der Fläche gemeinsam (sie ist keine Secante); sie kann *einen, zwei* oder *drei* Punkte mit ihr gemeinsam haben; es drei und ist sie nicht von der 1ten Art, so heisst *Schnittebene 2ter Art.*

Unter den unendlich vielen linearen Mannigfaltigkeiten die durch die Ebene gehen, welche die Fläche in einem P berührt, gibt es eine einzige, die Fläche in zwei zusammenfalle Kegelschnitten schneidende E_4; diese E_4 heisst *doppelt berühr Hyperebene.*

Die ∞^2 doppelt berührenden Hyperebenen hüllen die gegebenen reciproke Fläche (4ter Classe) ein.

Zwei solche Hyperebenen schneiden sich in einer Berühru ebene; ebenso bestimmen zwei Punkte der Fläche eine Schnitte 1ter Art.

Zwei Berührungsebenen schneiden sich immer in einem zigen Punkt.

Von den nicht in einem R_4 enthaltenen Flächen ist Veronese'sche die einzige, deren Berührungsebenen sich z zweien schneiden. Del Pezzo.

Projicirt man die V_2^4 von einer Geraden R_1 aus auf gewöhnlichen Raum, so ergibt sich eine Steiner'sche Fl Siehe Kap. 12, § 9.

Wenn die Gerade R_1 die V_2^4 in einem Punkt schneidet ist diese Projection eine Regelfläche 3ter Ordnung; trifft R_1 V_2^4 dagegen in zwei Punkten, so erhält man eine Fläche

ads; berührt schliesslich R_1 die V_2^4, so ergibt sich ein Kegel r Ordnung.

Die Veronese'sche Fläche ist in der allgemeinen Kategorie homaloidalen Normalflächen der Ordnung n^2 des Raums von $\frac{n+3)}{2}$ Dimensionen enthalten; diese Flächen haben die fundmentale Eigenschaft, dass sich durch ihre Projection auf seren Raum *alle* Flächen des R_3 ableiten lassen, die Punkt Punkt durch Curven von der Ordnung n oder kleiner als auf eine Ebene abbildbar sind.

Sie wurde zuerst von Veronese in dem citirten Aufsatz *Math. Ann.*, 19 erwähnt und dann in einer besonderen beit von demselben Autor eingehend untersucht. *Mem. Acc. ncei*, 19, 1884.

Mit diesen Untersuchungen stehen die Arbeiten über die ometrie der *Kegelschnitte der Ebene*, die auf S. 388 citirt rden, in naher Beziehung.

§ 5. Die Curven in den Räumen R_n.

Wir gehen nun zu den Mannigfaltigkeiten von nur einer mension (den *Curven*) über.

Vor allen Dingen — wir wollen uns der Kürze wegen ht näher darauf einlassen — ist die Erweiterung der Begriffe rzunehmen: man spricht von der *Osculationsebene* (welche mit Curve drei unendlich nahe Schnitte gemeinsam hat) in em Punkt der Curve, von dem *Osculationsraum* R_3 (der die rve in vier unendlich nahen Schnitten trifft) u. s. w.

Eine Berührungsgerade wird ferner *stationär* oder *Inflexionsgente* genannt, wenn sie mit der Curve *drei* unendlich nahe nitte gemeinsam hat; eine Osculationsebene heisst *stationär*. nn sie die Curve anstatt in drei in *vier* unendlich nahen nkten trifft, etc.

Zuerst handelt es sich bei diesen Curven um das Problem, Beziehungen zwischen den charakteristischen Zahlen festzullen, d. h. die bekannten Formeln von Plücker für die nen Curven und von Cayley für die doppelt gekrümmten rven des gewöhnlichen Raums auf die Curven des R_n auslehnen. Dieses Problem wurde zuerst von Veronese get, l. c.

Projiciren wir die Curve C^m des R_n von einem Punkt des ums R_n aus auf einen linearen Raum R_{n-1}, so erhalten wir

eine Curve des R_{n-1}, projiciren wir dann diese Curve a einen linearen Raum R_{n-2}, so ergibt sich eine Curve d R_{n-2} u. s. w. Wir betrachten dann die *developpable,* dur die Tangenten an die Curve C^m erzeugte Hyperfläche u ihren Schnitt S mit einem linearen Raum R_{n-1} und projicir wie vorher, diesen Schnitt S nach und nach auf niedrigere linea Räume. Wir betrachten ferner die durch die Tangenten an erzeugte Developpable und schneiden diese Developpable dur einen linearen Raum R_{n-2} und fahren so fort, wie vorh d. h. wir projiciren nach und nach auf niedrigere Räume.

Wie man sieht, erhält man auf diese Art $n-1$ ebe Curven, deren charakteristische Zahlen ebensovielen charak ristischen Zahlen der gegebenen Curve C^m entsprechen; wen man die Plücker'schen Formeln auf jede von ihnen an, ergeben sich im Ganzen $3(n-1)$ Relationen zwischen d *charakteristischen Zahlen* der gegebenen Curve.

Wir bezeichnen mit:

m	die *Ordnung* von C^m;
k	den *ersten Rang* von C^m, d. h. die Anzahl der T genten R_1 an C^m, welche einen beliebigen R_n schneiden;
w	den *zweiten Rang* von C^m, d. h. die Anzahl der Os lationsebenen R_2 an C^m, welche einen beliebigen R_n schneiden;
$w^{(1)}$	den *dritten Rang* von C^m, d. h. die Anzahl der Os lationsräume R_3 an C^m, welche einen beliebigen R_n schneiden;
. . . . .	
$w^{(n-4)}$	den $(n-2)^{\text{ten}}$ *Rang* von C^m, d. h. die Anzahl Räume R_{n-2}, welche C^m osculiren und eine belieb Gerade treffen;
$w^{(n-3)}$	die *Classe* der Curve;
w_1	die Anzahl der Inflexionstangenten (welche *drei* une lich nahe Punkte mit der Curve gemeinsam haben)
$w_1^{(1)}$	die Anzahl der stationären Osculationsebenen (die unendlich nahe Punkte mit der Curve gemeinsam hab
$w_1^{(2)}$	die Anzahl der stationären Räume R_3;
. . . . .	
$w_1^{(n-3)}$	die Anzahl der stationären Räume R_{n-2};
$w_1^{(n-2)}$	die Anzahl der stationären Räume R_{n-1};
R	die Anzahl der Spitzen von C^m;

$_1$ die Anzahl der Doppelpunkte von C^m;
$_1$ die Anzahl der Räume R_{n-2}, welche durch $n-2$ willkürliche Punkte gehen und die gewundene Curve zweimal schneiden (der scheinbaren Doppelpunkte);
$_1^{(1)}$ die Anzahl derjenigen Paare von nicht consecutiven Tangenten an C^m, welche einen R_{n-1} in zwei Punkten einer Geraden schneiden, die einen beliebigen R_{n-4} trifft;
$_1^{(2)}$ die Anzahl derjenigen Paare von nicht consecutiven Osculationsebenen von C^m, welche einen R_{n-2} in zwei Punkten einer Geraden schneiden, die einen willkürlichen R_{n-5} trifft;

. . . . . .

$_1^{(n-2)}$ die Anzahl derjenigen Paare von nicht consecutiven Osculationsräumen R_{n-2} von C^m, welche sich in einem Punkt einer beliebigen gegebenen Ebene schneiden oder auch die Ordnung der Doppelhyperfläche von $(n-2)$ Dimensionen der durch die Osculationsräume R_{n-2} von C^m gebildeten Developpablen;
die Anzahl der durch $n-2$ willkürliche Punkte gehenden Räume R_{n-1}, welche zwei nicht consecutive Tangenten von C^m enthalten;
$^{(1)}$ die Anzahl der Paare von nicht consecutiven Osculationsebenen von C^m, welche einen R_{n-1} in zwei Geraden schneiden, die zugleich mit $n-3$ willkürlichen festen Punkten des R_{n-1} in demselben Raum R_{n-2} liegen;

. . . . . .

$_{n-2}$ die Anzahl von Paaren der nicht consecutiven Osculationsräume R_{n-1} von C^m, welche sich in einer Geraden einer festen Ebene schneiden;
die Anzahl der Doppeltangenten von C^m;
$_1^{(1)}$ die Anzahl der Doppelosculationsebenen von C^m;

. . . . . .

$^{(n-2)}$ die Anzahl der Doppelosculationsräume R_{n-1} von C^m.

*Sind diese Bezeichnungen festgesetzt, so erhält man die folgenden Relationen**):

---

*) Wir haben die von Veronese benutzten Zeichen beibehalten, die von den Symbolen für die doppelt gekrümmten Curven gewöhnlichen Raums in Kap. 9 abweichen; die einzige Aenderung, die wir vorgenommen, besteht darin, dass wir $w_1^{(n-2)}$ an die Stelle von $w^{(n-2)}$ gesetzt haben.

$$\begin{cases} k = m(m-1) - 2(D + D_1) - 3R, \\ m = k(k-1) - 2(d + d_1) - 3(w + w_1), \\ w + w_1 - R = 2(k - m), \end{cases}$$

$$\begin{cases} w = k(k-1) - 2(D^{(1)} + d_1) - 3(m + w_1), \\ k = w(w-1) - 2(d^{(1)} + d_1^{(1)}) - 3(w^{(2)} + w_1^{(2)}), \\ m + w_1 - (w^{(1)} + w_1^{(1)}) = 3(k - w), \end{cases}$$

$$\begin{cases} w^{(1)} = w(w-1) - 2(D^{(2)} + d_1^{(1)}) - 3(k + w_1^{(1)}), \\ w = w^{(1)}(w^{(1)} - 1) - 2(d^{(2)} + d_1^{(2)}) - 3(w^{(2)} + w_1^{(2)}), \\ k + w_1^{(1)} - (w^{(2)} + w_1^{(2)}) = 3(w - w^{(1)}), \end{cases}$$

. . . . . .

$$\begin{cases} w^{(n-3)} = w^{(n-4)}(w^{(n-4)} - 1) - 2(D^{(n-2)} + d_1^{(n-3)}) - \\ \qquad - 3(w^{(n-5)} + w_1^{(n- \\ w^{(n-4)} = w^{(n-3)}(w^{(n-3)} - 1) - 2(d^{(n-2)} + d_1^{(n-2)}) - 3 w_1^{(n- \\ w^{(n-5)} + w_1^{(n-3)} - w_1^{(n-2)} = 3(w^{(n-4)} - w^{(n-3)}). \end{cases}$$

Definirt man das *Geschlecht p der Curve* C^m als das schlecht einer beliebigen ebenen Projection von C^m, so ist

$$p = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - (D + D_1) - R =$$

$$= \frac{(k-1)(k-2)}{2} - (d + d_1) - (w + w_1) =$$

$$= \frac{(k-1)(k-2)}{2} - (D^{(1)} + d_1) - (m + w_1) =$$

$$= \frac{(w-1)(w-2)}{2} - (d^{(1)} + d_1^{(1)}) - (w^{(1)} + w_1^{(1)}) =$$

$$= \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Die Curve, welche der vollständige Schnitt von $(n -$ *Hyperflächen des* R_n *von den Ordnungen* $\nu_1, \nu_2, \ldots,$ *bez.* ν *ist, hat bez. die Ordnung* $m = \nu_1 \cdot \nu_2 \ldots \nu_{n-1}$ *und den ersten* I

$$k = \nu_1 \cdot \nu_2 \ldots \nu_{n-1} \left[\sum \nu_i - n + 1\right];$$

der Ausdruck für D lautet:

$$2D = \nu_1 \cdot \nu_2 \ldots \nu_{n-1} \left\{\nu_1 \cdot \nu_2 \ldots \nu_{n-1} - \sum \nu_i + n - 2\right.$$

Daraus lassen sich mit Hülfe der Veronese'schen For die Werthe der übrigen charakteristischen Zahlen ableiten.

Speciell gilt:

Der vollständige Schnitt 8ter Ordnung dreier quadratischer ebilde des Raums von vier Dimensionen hat einen ersten Rang ·ich 8; sein 2ter Rang ist 48, die Classe 32, das Geschlecht 5 id es sind 120 stationäre Räume R_3 in ihm vorhanden.

Der Raum höchster Dimension, dem eine Curve von der rdnung v und dem Geschlecht p, wenn $v > 2p - 2$ ist, anhören kann, ist ein R_{v-p}. Dieses wichtige Theorem, welches i einen Satz über die Regelflächen in § 4 erinnert, ist von lifford, *Phil. Trans.*, 1878; mit ihm haben sich auch Vero·se, *Math. Ann.*, 19, p. 213 und Segre, ib., 30, p. 207 behäftigt.

Aus einem Theorem in § 2 geht hervor, dass die *niedrigste rdnung der dem Raum R_n angehörigen Curven n selbst ist.*

Die Curve von der Ordnung n, welche dem R_n angehört, ; rational (vom Geschlecht Null).

Offenbar ist diese Curve eine *Normalcurve* für den Raum R_n.

Für sie sind der 1te und $(n-2)$te Rang, der 2te und $-3)$te Rang etc. bez. zu je zweien gleich

$$2(n-1),\quad 3(n-2),\ldots$$

Die Classe der Curve ist die $n$te; sie hat keine Doppel·er stationären Elemente.

Durch $n+3$ Punkte des R_n, von denen $n+1$ niemals einer E_{n-1} liegen, geht eine und nur eine Curve $n$ter Ord·ng des R_n.

Zwei Curven $n$ter Ordnung des R_n sind immer projectiv entisch.

Mit der Normalcurve $n$ter Ordnung des R_n können eine erade, eine Ebene, ein Raum R_3, ... höchstens zwei, drei, er, ... Punkte gemeinsam haben.

Diese Curve kann als der Ort der Schnitte der sich entrechenden E_{n-1} von $n-1$ Büscheln von projectiven E_{n-1} ·geschen werden.

Durch einen Punkt P des R_n können n osculirende E_{n-1} an e Curve gelegt werden; wenn n ungerade ist, so liegen die n Berührungspunkte dieser Ebenen in einer durch P gehenden Ebene. ehe das analoge Theorem von Chasles für die doppelt·krümmte Curve auf S. 250.

Die Curven $(n+1)$ter Ordnung des R_n sind elliptisch (vom eschlecht $p=1$) und haben mit Ausnahme von $(n+1)^2$

stationären Räumen R_{n-1} keine Doppel- oder stationären Eleme Ihre Classe ist die $n(n+1)^{\text{te}}$ und ihr bezüglicher Rang:

$$k = 2(n-1) + 2,$$
$$w = 3(n-2) + 6,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$w^{(n-4)} = n^2 - 1.$$

Auch diese Curve ist normal für den Raum R_n, da keine Projection einer Curve $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung des Ra R_{n+1} sein kann, weil die letztere sonst *rational* wäre.

Alle in $R_2, R_3, \ldots, R_{n-1}$ enthaltenen rationalen Cur der Ordnung $m \leqq n$ sind immer Projectionen einer Normalc n^{ter} Ordnung des R_n.

Alle in $R_2, R_3, \ldots, R_{n-1}$ enthaltenen elliptischen Cu der Ordnung $m \leqq n+1$ sind immer Projectionen einer Norn curve $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung des R_n.

Allgemein:

Die dem R_n angehörigen Curven von der Ordnung $n+p$ dem Geschlecht p bilden, mit ihren Projectionen auf niedri Räume zusammengenommen, die Gesammtheit der einem angehörigen Curven dieser Ordnung und dieses Geschlechts, u $r \leqq n$ ist; für $n+p > 2p-2$ bilden diese sämmtlichen Cu die Gesammtheit aller Curven dieser Ordnung und dieses schlechts; denn in dem letzteren Fall gibt es nach dem ob Theorem Clifford's ausser den in Räumen R_r $(r \leqq n)$ ex renden Curven dieser Ordnung und dieses Geschlechts *anderen.*

Ueber die algebraischen Curven des Raums R_n siehe in dem vorigen Paragraphen citirten Arbeiten und auch Se *Giorn. di Batt.,* 26; *Rend. Palermo,* 2.

Man kann die Betrachtungen über die vielfachen Seca am Ende des § 4, Kap. IX, S. 230 auch auf die Räume dehnen, die eine algebraische Curve von R_n mehrfach sch den. Siehe darüber eine neuere Arbeit von Tanturri, *di mat.,* (3), 4, 1900.

Kapitel XX.

e Infinitesimalgeometrie und die natürliche Geometrie den linearen Räumen R_n und den Räumen R_n von constanter Krümmung.

§ 1. Die Curven in den linearen Räumen R_n.

Wir wollen uns die Coordinaten x eines Punkts der Curve s Functionen eines Parameters t gegeben denken.

Durch $k+1$ Punkte der Curve kann man einen linearen aum von k Dimensionen legen; wir lassen die $k+1$ Punkte, e gewöhnlich, sich bei der Annäherung an einen Punkt P ander unbegrenzt nahe kommen; die Grenzlage dieses linearen aums heisst der die Curve in P *osculirende lineare Raum n k Dimensionen. Die Zahl k kann von* 1 *bis* $n-1$ *variiren.*

Der Abstand eines dem Punkt P benachbarten Punkts der rve von dem in P osculirenden linearen Raum von k Dimenonen ist ein Unendlichkleines $(k+1)^{\text{ter}}$ *Ordnung.*

Die Gleichungen des die Curve osculirenden linearen Raums n k Dimensionen erhält man, wenn die Minoren der Matrix

$$\left\| \begin{array}{cccc} X_1 - x_1, & X_2 - x_2, & \ldots, & X_n - x_n \\ x_1', & x_2', & \ldots, & x_n' \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_1^{(k)}, & x_2^{(k)}, & \ldots, & x_n^{(k)} \end{array} \right\|$$

ich Null gesetzt werden; dabei bezeichnen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *die ordinaten von P und* $x_1', x_1'', \ldots; x_2', x_2'', \ldots$ *die Derirten dieser Coordinaten nach der unabhängigen Variabeln t.*

Wir wollen unter θ_k den Winkel verstehen, den die beiden zwei benachbarten Punkten der Curve osculirenden linearen iume von k Dimensionen miteinander bilden und unter s den n den beiden Punkten begrenzten Bogen; die Grenze des Ver-

hältnisses $\frac{\theta_k}{s}$ heisst, wenn s der Null zustrebt, *die* k^{te} *Kri*
mung der Curve in diesem Punkt und der reciproke We
dieser Krümmung, wie auch sonst, *der* k^{te} *Krümmungsrad*
Es gibt $n-1$ *Krümmungsradien.*

Stellt M_k, $(0 \leqq k \leqq n)$ die Summe der Quadrate
Minoren k^{ter} Ordnung dar, die in der Matrix

$$\begin{Vmatrix} x_1', \ldots, x_n' \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)} \end{Vmatrix}$$

enthalten sind und wird $M_0 = 1$ gesetzt und der k^{te} Kr
mungsradius R_k genannt, *so erhält man die allgemeine For*

$$\frac{1}{R_k^2} = \frac{M_{k+1}\, M_{k-1}}{M_1\, M_k},$$

wobei offenbar

$$M_1 = x_1'^2 + x_2'^2 + \cdots + x_n'^2 \quad \textit{ist.}$$

Es gilt auch die Formel

$$\frac{1}{R_k^2\, R_{k-1}^4 \cdots R_1^{2k}} = \frac{M_{k+1}}{M_1^{\frac{(k+1)(k+2)}{2}}}.$$

Wenn M_n *für alle Punkte der Curve verschwindet, so*
diese in einem linearen Raum geringerer Dimension; ist M
für alle Punkte der Curve Null, dagegen M_k *nicht, so liegt*
Curve in einem linearen Raum von k Dimensionen, aber in kei
von niederer Dimension.

Die Punkte der Curve, in denen $M_n = 0$ ist, sind die
genannten *stationären Punkte der Curve.*

Es sei P ein Punkt der Curve. Wir wollen das folg
System von n Geraden betrachten, die zu je zweien senkr
aufeinander stehen: vorerst die Tangente an die Curve,
das Loth auf die Tangente, welches in dem Osculationsr
von 2 Dimensionen liegt, dann das Loth auf den letzteren R
welches in dem Osculationsraum von 3 Dimensionen liegt, u.

Nennt man nun

$$\begin{aligned} &\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1n}, \\ &\alpha_{21}, \ldots, \alpha_{2n}, \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &\alpha_{n1}, \ldots, \alpha_{nn} \end{aligned}$$

ez. die Richtungswinkel, welche die n Geraden mit den n rimitiven Coordinatenaxen bilden, *so ergeben sich die fol-enden Formeln, die als Erweiterung der Formeln von Frenet nd Serret in Bezug auf die Curven doppelter Krümmung* vergl. S. 460) *anzusehen sind, und welche die Differentiale der* ^{2} *Cosinus der Winkel* α *als lineare Functionen der Cosinus elbst liefern:*

$$\frac{d\cos\alpha_{ki}}{ds} = \frac{\cos\alpha_{k+1,i}}{R_k} - \frac{\cos\alpha_{k-1,i}}{R_{k-1}};$$

'arin ist angenommen, dass für $k = 1$ *auf der rechten Seite las zweite Glied und für* $k = n$ *auf der rechten Seite das erste Glied wegfällt.* Ueber diese Formeln siehe Brunel, *Math. Ann.,* 9 und Landsberg, *Crelle,* 114.

In Bezug auf die Ausdehnung des Bonnet'schen Theorems iber den Abstand zweier unendlich naher Tangenten der Curve und iber den Abstand eines Punkts der Curve von der Osculations-bene in einem unendlich nahen Punkt siehe Jordan, *Compt. Rend.,* 79, 1874, p. 796. Andere Arbeiten über die Infini-esimaltheorie der Curven in einem beliebigen Raum sind von Hoppe, *Arch. der Math.,* (1), 64; (2), 6, 11, 12, 1880—1892.

§ 2. Differentialgeometrie der in linearen Räumen enthaltenen Mannigfaltigkeiten von mehreren Dimensionen. Quadratische Differentialformen.

Wie in der Theorie der Flächen die bekannte quadratische Differentialform von zwei Variablen eingeführt wird, welche das Quadrat des der Fläche angehörigen *Linienelements* angibt, so wird auch bei Mannigfaltigkeiten von mehr als zwei Dimensionen *eine quadratische Differentialform von n Variabeln*

$$ds^2 = \sum_1^n a_{ij}\, dx_i\, dx_j \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

benutzt, welche das Quadrat des unendlich kleinen Abstands zweier unendlich naher Punkte dieser Mannigfaltigkeit darstellt, d. h. wie man sagt, *das Quadrat des dieser Mannigfaltigkeit angehörigen Linienelements. Wir wollen annehmen, die Form* (1) *sei eine definite positive Form und die Determinante der* a *sei von Null verschieden.*

Dass man eine *quadratische* Differentialform und nicht eine beliebige andere Form, z. B. 4ter oder 6ter Ordnung etc. zu

Grunde legt, ist eine durchaus specielle Hypothese, welche si nicht machen lassen würde, wenn sie nicht die *Folge* einer and ren Hypothese wäre, die hier ausdrücklich aufgestellt sei: da nämlich unsere Mannigfaltigkeit immer in einem *linearen* Rau von einer grösseren Anzahl von Dimensionen enthalten ist.

Ferner:

Unter der *Voraussetzung, das Linienelement lasse sich dur eine quadratische Form, wie* (1), *ausdrücken, kann immer ei Zahl h*

$$0 \leqq h \leqq \frac{n(n-1)}{2}$$

derart gefunden werden, dass, wenn $y_1, \ldots, y_{n+h}$ *geeignete Fu tionen von* $x_1, \ldots, x_n$ *sind, die Beziehung* (1) *sich aus Differentialform*

$$\sum_{i=1}^{n+h} dy_i^2$$

ableiten lässt, welche einem linearen Raum von $n + h$ *Dim sionen entspricht.* Siehe Schläfli, *Ann. di mat.*, (2), 5, p. 1 Ricci, ib., 12, p. 137.

Die kleinste der Zahlen h heisst die *Classe* der Mann faltigkeit. Ricci.

Die natürliche Geometrie der Mannigfaltigkeiten reduc sich somit auf das Studium der quadratischen Differentialform und ihrer Transformationen.

In der Theorie der quadratischen Differentialformen benu man mit Vortheil die sogenannten *Christoffel'schen Symb* von denen es vier Kategorien gibt: die Drei-Indices-Symb 1ter und 2ter Art und die Vier-Indices-Symbole 1ter und 2ter A Siehe Christoffel, *Crelle*, 70 und auch weiter oben S. 4 475. *Die Drei-Indices-Symbole* 1ter *Art sind:*

$$\left[\begin{matrix} k\,h \\ i \end{matrix}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{ki}}{\partial x_h} + \frac{\partial a_{hi}}{\partial x_k} - \frac{\partial a_{kh}}{\partial x_i}\right);$$

und die zweiter Art:

$$\left\{\begin{matrix} k\,h \\ i \end{matrix}\right\} = \sum_l A_{il}\left[\begin{matrix} k\,h \\ l \end{matrix}\right],$$

worin die A die algebraischen Adjungirten der Elemente bezei nen, die in der Determinante der a dieselben Indices haben.

Die Vier-Indices-Symbole 2ter *Art lauten:*

$$\{kh, ij\} = \frac{\partial \left\{ \begin{matrix} ki \\ h \end{matrix} \right\}}{\partial x_j} - \frac{\partial \left\{ \begin{matrix} kj \\ h \end{matrix} \right\}}{\partial x_i} + \\ + \sum_l \left[\left\{ \begin{matrix} ki \\ l \end{matrix} \right\} \cdot \left\{ \begin{matrix} lj \\ h \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} kj \\ l \end{matrix} \right\} \cdot \left\{ \begin{matrix} li \\ h \end{matrix} \right\} \right],$$

ıd schliesslich die *Vier-Indices-Symbole 1ter Art:*

$$(kh, ij) = \sum_l a_{il} \{kl, ij\} .$$

Zwischen diesen Symbolen bestehen viele Relationen. Näheres ıdet man in den auf S. 604 citirten Arbeiten von Christoffel ıd Lipschitz und in Kap. 2 der *Differentialgeometrie* von ianchi, Leipzig 1899.

Wenn eine quadratische Differentialform (1) gegeben ist ıd angenommen wird, die x seien Functionen von n anderen ariabeln x', so kann (1) in die Differentialform

$$\sum_1^n a'_{ij} dx'_i dx'_j$$

ansformirt werden.

Diese beiden Differentialformen heissen *äquivalent.*

Eines der wichtigsten Probleme der Theorie der Differential-rmen besteht in der Ermittelung der Bedingungen, unter elchen zwei quadratische Differentialformen äquivalent sind.

Zuerst werden die Beziehungen aufgesucht, denen die unctionen x und x' genügen müssen; *sie sind durch* $\frac{n^2(n+1)}{2}$ *multane partielle Differentialgleichungen vom Typus*

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial x'_r \partial x'_s} + \sum_{hk} \left\{ \begin{matrix} hk \\ i \end{matrix} \right\} \frac{\partial x_h}{\partial x'_s} \frac{\partial x_k}{\partial x'_r} = \sum_j \left\{ \begin{matrix} rs \\ j \end{matrix} \right\}' \frac{\partial x_i}{\partial x'_j}$$

geben, worin unter $\left\{ \begin{matrix} rs \\ j \end{matrix} \right\}'$ *das Christoffel'sche Symbol für die ansformirte Form verstanden wird.*

Die Integrabilitätsbedingungen dieses Systems partieller ifferentialgleichungen sind Bedingungsgleichungen, denen die a nd die a' sowie ihre Derivirten genügen müssen. Wenn sie uf geeignete Art combinirt werden, so kann man diesen Be-ingungsgleichungen eine invariante Form geben und kann auf iese Art Differentialinvarianten oder -parameter erhalten, d. h. usdrücke, die bei jeder Transformation der Variabeln unver-ndert bleiben. Siehe *Repert.,* 1, p. 218 u. ff.

Wir wollen uns jedoch nicht auf die Einzelheiten der Co
struction dieser Differentialparameter einlassen und verweis
auf die unten citirte Literatur.

*Die Anzahl der Bedingungen für die Transformirbarl
zweier quadratischer Differentialformen von n Variabeln betr*

$$\frac{n^2(n^2-1)}{12}.$$

*Damit eine quadratische Differentialform von n Variab
sich in eine solche transformiren lasse, deren Linienelement
Form* $\sum_1^n dx_i^2$ *hat, müssen die Bedingungen*

$$(hk, ij) = 0$$

erfüllt sein, worin (hk, ij) *das oben definirte Christoffel's
Symbol bedeutet.*

Das Problem der Transformation der Differentialform
enthält als speciellen Fall die Ermittelung der Bedingung
unter denen ein gegebener Raum *linear* ist, sein Lini
element sich mithin auf die Form

$$\sum_{i=1}^{n} dx_i'^2$$

reduciren lässt.

Die Lamé'schen Gleichungen für die dreifachen Ortho
nalsysteme (vergl. Kap. 16, § 14) entsprechen gerade den
dingungen, unter denen der Raum von drei Dimensionen linear

Ein diesem Transformationsproblem verwandtes Probl
besteht darin, aufzusuchen, wann eine Differentialform *von
Classe Null, von der Classe 1, etc.* ist. Siehe oben. In die
Hinsicht sind die Arbeiten von Ricci zu erwähnen, *Ann. di m*
(2), 12; *Rend. Acc. Lincei,* März 1888; *Lezioni sulla teo
delle superficie,* Verona-Padova 1898, p. 73.

Das Problem der Transformation der quadratischen Di
rentialformen wurde zuerst von Christoffel, *Crelle,* 70
von Lipschitz, ib. 70, 71, 72, 74, 78, 81 behandelt; si
auch das *Bull. de Darboux,* 4, 1873. Der letztere untersuc
auch den Fall der Differentialformen höheren Grads. In ei
Arbeit von Suworoff, russisch, im Auszug reproducirt in d
Bull. de Darboux, 4 wird nur der Fall quadratischer *ternä*

fferentialformen betrachtet und werden für ihn *drei* invariante sdrücke construirt; mit dem allgemeinen Fall der quadra-chen Formen beschäftigte sich später dann auch Voss, *Math. nn.*, 16.

§ 3. Deformation, errückungen und Riemann'sche Krümmung eines Raums. Räume von constanter Riemann'scher Krümmung.

Wenn man sich an die Fundamentaleigenschaft der Gauss-hen Krümmung K der Flächen, bei einer Transformation der ndamentaldifferentialform invariant zu bleiben, erinnert, so ängt sich unmittelbar der Gedanke auf, von den Studien über e Transformation der Differentialformen auf die Ausdehnung s *Begriffs der Krümmung* überzugehen. Wir werden in diesem aragraphen die Krümmung eines Raums in dem Riemann-hen Sinn behandeln.

Vor Allem wollen wir das folgende wichtige Theorem von eez aufstellen (*Zeitschr. für Math. u. Phys.*, 20, 21; siehe ch Ricci, *Ann. di mat.*, (2), 12, p. 163 und Cesàro, *Geom. trinseca*, deutsch von Kowalewski, *Vorlesungen über natür-che Geometrie*):

Ein Raum von n Dimensionen $(n > 2)$, *welcher in einem aum von* $n + 1$ *Dimensionen enthalten ist, lässt sich im All-meinen nicht deformiren, wenn man immer in dem Raum n* $n + 1$ *Dimensionen bleiben will, d. h. es ist nicht möglich, n in dem umgebenden Raum zu verbiegen und dabei das inienelement unverändert zu erhalten, wie es mit der grössten Un-ngeschränktheit mit den Räumen einer Dimension (den Linien) nd mit etwas mehr Einschränkung mit den Räumen von zwei imensionen (den Flächen) geschehen kann. Die Biegung ist ur bei speciellen Räumen ausführbar. Die einzigen Verände-ungen, die ein allgemeiner Raum von n Dimensionen* $(n > 2)$ *leiden kann, ohne aus dem Raum von* $n + 1$ *Dimensionen, n dem er sich nach der Voraussetzung befinden soll, heraus-utreten, sind starre Verrückungen, d. h. Translationen, Rotatio-en etc.*

Wir gehen nun dazu über, den Begriff von der *Krümmung ines Raums in einem Punkt* nach Riemann zu erklären.

Wir wollen den Punkt P des Raums betrachten und von hm aus in seiner unendlich kleinen Umgebung die sämmtlichen nöglichen *geodätischen* Linien in allen Richtungen ziehen, d. h.

die Linien, welche den *kürzesten* Weg von dem Punkt P na einem ihm unendlich nahen Punkt in demselben Raum da stellen, also Linien, für welche das ihren Bogen darstellende I tegral ein Minimum ist. *Solcher Linien kann man ∞^{n-} ziehen, wenn der Raum n Dimensionen hat. Unter ihnen lass sich stets n (und nicht mehr als n) Linien auswählen, die so l schaffen sind, dass, wenn die Differentiale ihrer vom Punkt P a gerechneten Bogen $ds_1, \ldots, ds_n$ genannt werden, die Gröss $ds_1, \ldots, ds_n$ linear unabhängig sind. Das Bogendifferent jeder anderen geodätischen Linie lässt sich dann immer line durch $ds_1, \ldots, ds_n$ ausdrücken.*

Wir wollen *zwei* solche Linien, z. B. die den Bogendif rentialen ds_1, ds_2 entsprechenden, und zugleich die unendli vielen anderen betrachten, deren Bogendifferential durch Formel

$$ds_{12} = \lambda_1 ds_1 + \lambda_2 ds_2$$

ausgedrückt wird.

Die Punkte aller dieser unendlich vielen Linien, die si über ein unendlich kleines Gebiet um P erstrecken, bild eine in dem totalen Raum enthaltene Mannigfaltigkeit von z Dimensionen (eine Fläche); solcher *unendlich kleiner* Fläch ausdehnungen um P kann man

$$\frac{n(n-1)}{2}$$ herstellen.

Von jeder dieser Flächen berechnen wir auf die Gaus sche Art die *Krümmung* in P (sie wird, wie auch sonst, a den Coefficienten jener quadratischen Differentialform von z Variabeln gebildet, die das Quadrat des Linienelements der betr fenden Fläche darstellt); diese Krümmung nennen wir nach d Vorgang Riemann's *Krümmung des Raums in dem Punkt nach dieser bestimmten Flächenorientirung.* Wie man also sie gibt es nach diesem Begriff in jedem Punkt des Raums viele Krümmungen, als voneinander verschiedene Flächenori tirungen vorhanden sind, also $\frac{n(n-1)}{2}$. Nimmt man an, di verschiedenen Krümmungen in Bezug auf einen und denselb Punkt seien einander sämmtlich gleich und bleiben auch bei d Uebergang von einem Punkt des Raums zu einem ande unverändert, so erhält man *die Räume constanter Riemann'sc Krümmung.*

Eine solche constante Krümmung kann positiv, nega oder Null sein; *ist sie Null, so ist der Raum linear.*

Wenn die Krümmung constant positiv ist, so wird der Raum
härischer oder *Riemann'scher* oder *elliptischer* Raum genannt;
sie dagegen negativ, so heisst der Raum *pseudosphärischer*
er *Lobatschefskij'scher* oder *hyperbolischer* oder *nicht-Euclischer* in engerem Sinn; ist die Krümmung schliesslich Null,
ergibt sich, wie schon gesagt, der *lineare* oder, wie er auch
nannt wird, *der Euclidische* oder *parabolische Raum.* Siehe
ap. 21.

*Der pseudosphärische oder hyperbolische Raum dehnt sich
das Unendliche aus, während der elliptische Raum nicht un-
dlich gross ist.* Riemann.

Die Riemann'schen Räume constanter Krümmung besitzen
e bemerkenswerthe Eigenschaft, *dass sie auf sich selbst derart
wickelbar sind, dass man ohne Deformation von einem Punkt
jedem beliebigen anderen übergehen kann, was sonst nach dem
eez'schen Theorem nicht möglich ist; für diese Räume gilt also
s Princip der vollkommenen Bewegungsfähigkeit der Figuren
ne Deformation, wie es z. B. bei den sphärischen Flächen des
wöhnlichen Raums der Fall ist.* Lipschitz, siehe das Citat
vorigen Paragraphen; Bianchi, *Rend. Acc. Lincei*, 1898.

*Dem Linienelement eines jeden Raums constanter Riemann-
her Krümmung K kann immer bei geeigneter Auswahl der
ordinaten (welche auch stereographische genannt werden)
e (Riemann'sche) Form*

$$ds^2 = \frac{dx_1^2 + dx_2^2 + \cdots + dx_n^2}{1 + \frac{K}{4}(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)}$$

*geben werden; die Coefficienten der quadratischen Differential-
rm sind mithin constanten Grössen proportional, da der Pro-
rtionalitätsfactor eine Function aller x ist.*

*Wählt man ein anderes Coordinatensystem, so lässt sich
s Linienelement für jeden Raum constanter negativer Krüm-
ung* $-\frac{1}{R^2}$ *durch die Formel*

$$ds^2 = \frac{R^2}{x^2}(dx^2 + dx_1^2 + \cdots + dx_n^2)$$

rstellen, worin die x an die Relation

$$x^2 + x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = a^2$$

*bunden sind und a eine Constante bedeutet, während das Linien-
ement eines jeden Raums constanter positiver Krümmung* $+\frac{1}{R^2}$
rch

$$ds^2 = \frac{R^2}{x^2}(dx_1^2 + dx_2^2 + \cdots + dx_n^2 - dx^2)$$

ausgedrückt werden kann, worin die x die Gleichung

$$x^2 = a^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2$$

erfüllen müssen.

Wichtig ist die folgende Eigenschaft der Riemann'sch Räume constanter Krümmung:

Wählt man in ihnen das Coordinatensystem auf geeign Art aus (nimmt man insbesondere das System, für welches d Linienelement die zuletzt angegebene Form hat), so lassen s die geodätischen Linien durch lineare Gleichungen ausdrücke Theorem von Beltrami, *Ann. di mat.*, (2), 2; und umgekeh *wenn in einem Raum bei einer speciellen Auswahl des Coor natensystems diese letztere Eigenschaft besteht, so hat der Ra eine im Riemann'schen Sinn constante Krümmung.* Schläf *Ann. di mat.*, (2), 5; Beltrami, ib., id. Siehe auch Kap. § 11, S. 492.

In einem Raum von constanter negativer Krümmung stimmen zwei Punkte ohne Ausnahme eine geodätische Li und zwei durch einen Punkt gehende geodätische Linien hal keine anderen Punkte gemeinsam; dagegen kann es in Räumen von constanter positiver Krümmung vorkommen, d zwei durch einen Punkt gehende geodätische Linien sich noch einem anderen Punkt treffen (man denke nur an die gewöl liche Kugel); es ist damit aber nicht gesagt, dass dieser S für alle Räume von constanter positiver Krümmung gültig s muss, eine Bemerkung, die von Klein herrührt. Ve Kap. 21, § 2.

Dem Linienelement eines Raums von constanter positi Krümmung $\frac{1}{R^2}$ kann man die Form geben (Bianchi, *Re Acc. Lincei*, 7, 1898, p. 155):

$$ds^2 = R^2\{dx_1^2 + \sin^2 x_1\, dx_2^2 + \\ + \sin^2 x_1 \sin^2 x_2\, dx_3^2 + \cdots + \sin^2 x_1 \cdots \sin^2 x_{n-1}\, dx_n^2$$

und demjenigen eines Raums von constanter negativer Krümmu $-\frac{1}{R^2}$ jede der drei folgenden Formen (Bianchi, *Vorlesun über Differentialgeometrie*, deutsch von Lukat, p. 580, 5 vergl. auch weiter oben Kap. 16, § 11):

$$\ldots^2 = dx_1^2 + \cosh^2\left(\frac{x_1}{R}\right) \sum_{i,k}^{2\ldots n} b_{ik}\, dx_i\, dx_k,$$

(hyperbolischer Typus),

$$\ldots^2 = dx_1^2 + e^{\frac{2x_1}{R}} \sum_{i,k}^{2\ldots n} b_{ik}\, dx_i\, dx_k,$$

(parabolischer Typus),

$$\ldots^2 = dx_1^2 + \sinh^2\left(\frac{x_1}{R}\right) \sum_{i,k}^{2\ldots n} b_{ik}\, dx_i\, dx_k,$$

(elliptischer Typus).

Ein anderes sehr einfaches Coordinatensystem für die Räume nstanter Krümmung wird nach Weierstrass benannt, obleich es schon in einer früheren Abhandlung aus dem Jahr 68, *Ann. di mat.*, (2), 2 von Beltrami benutzt wurde; es ot dem Linienelement eine der folgenden Formen:

$$\ldots^2 = R^2\left(\sum_i dy_i^2 - dy^2\right) \quad \text{mit} \quad y^2 - \sum_i y_i^2 = 1$$

für die Räume mit constanter negativer Krümmung $-\frac{1}{R^2}$,

d:

$$\ldots^2 = R^2\left(dy^2 + \sum_i dy_i^2\right) \quad \text{mit} \quad y^2 + \sum_i y_i^2 = 1$$

für die Räume mit constanter positiver Krümmung $\frac{1}{R^2}$.

Dieses Coordinatensystem lässt sich aus dem weiter oben gegebenen System, welches die bemerkenswerthe Eigenschaft sitzt, den Gleichungen der geodätischen Linien eine lineare estalt zu geben, dadurch ableiten, dass man

$$\frac{a}{x} = y, \quad \frac{x_i}{x} = y_i$$

tzt.

Ueber die Formeln, welche dazu dienen, von diesem System f das Riemann'sche überzugehen, siehe Bianchi, *Ann. di mat.*,), 2, p. 102.

Damit ein dreidimensionaler Raum constante Krümmung K n Riemann'schen Sinn habe, müssen sechs Relationen erfüllt in (siehe § 2); *sie lauten für* $i, j, k \equiv 1, 2, 3$, *wenn dem inienelement des Raums die Form*

$$ds^2 = H_1\,dx_1^2 + H_2\,dx_2^2 + H_3\,dx_3^2$$

gegeben wird, folgendermassen:

$$\frac{\partial^2 H_i}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{1}{H_k}\frac{\partial H_k}{\partial x_j}\frac{\partial H_i}{\partial x_k} + \frac{1}{H_j}\frac{\partial H_j}{\partial x_k}\frac{\partial H_i}{\partial x_j},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{H_i}\frac{\partial H_k}{\partial x_i}\right) + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{1}{H_k}\frac{\partial H_i}{\partial x_k}\right) + \frac{1}{H_j^2}\frac{\partial H_i}{\partial x_j}\frac{\partial H_k}{\partial x_j} = -KH_iH$$

Suworoff, *Bull. de Darboux*, 4, p. 192.

Für $K = 0$ erhält man die Lamé'schen Formeln, si Kap. 16, § 14, S. 505, welche die Bedingungen angeben, un denen der Raum linear ist.

Der Begriff der Krümmung eines Raums in dem oben gegebenen Sinn ist Riemann zu verdanken: *Ueber die Hy thesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen* (nach des Verfass Tod erschienen); dann folgten: der bereits erwähnte Aufsatz Beltrami, *Ann. di mat.*, (2), 2, *Ueber die Räume consta Krümmung* und andere, die ebenfalls schon citirt wurd wie Schläfli und Beltrami, *Ann. di mat.*, (2), 5.

Die Arbeiten von Lipschitz, Voss etc., auf die wir § 2 hingewiesen haben, dehnten in einer anderen Art den Beg der Gauss'schen Krümmung auf Mannigfaltigkeiten in Räun von höheren Dimensionen aus und lieferten auch einen anse lichen Beitrag zu der Riemann'schen Krümmungstheorie; n findet bei ihnen z. B. eine Formel, welche die Riemann's Krümmung durch die Coefficienten der quadratischen Fundam taldifferentialform ausdrückt. Wir verweisen schliesslich n auf einen Aufsatz von Schur, *Ueber den Zusammenhang Räume constanten Riemann'schen Krümmungsmasses mit den p jectiven Räumen, Math. Ann.*, 27.

Ein Raum constanter Riemann'scher Krümmung hat, bereits gesagt wurde, unendlich viele Bewegungen in sich sell *er kann ins Besondere auf* $\infty^{\frac{n(n+1)}{2}}$ *verschiedene Arten auf sich se abgewickelt werden, worin n die Anzahl seiner Dimensionen ang*

Man kann nun danach fragen, wie wohl die anderen Räu beschaffen sein mögen, die nur ∞^r Transformationen gestatten, wo r kleiner als $\frac{n(n+1)}{2}$ ist. So gibt es z. B. in dem gewö

hen Raum ausser der Kugel, welche ∞^3 Bewegungen in sich bst hat, die Rotationsflächen, die nur ∞^1 solche Bewegungen lassen, etc.

Mit diesem Problem beschäftigten sich Lie, *Theorie der ansformationsgruppen,* unter Mitwirkung von Engel bearbeitet, Abschn., Leipzig 1888, 1890, 1893, 1, p. 310 und 3, p. 575; illing, *Crelle,* 109, p. 121; Bianchi, *Mem. della Soc. ital. lle scienze,* (3), 11, 1897, p. 267, der den Fall $n = 3$ erhöpfend behandelte; Ricci, *Sui gruppi di movimenti in a varietà qualunque a tre dimensioni, Mem. della Soc. ital. lle scienze,* (3), 12, 1899; Ricci und Levi-Civita, *Math. nn.,* 54, p. 173.

4. Eine andere Ausdehnung des Begriffs der Krümmung f Mannigfaltigkeiten oder Räume, die mehr als zweimensional und in einem höheren Raum enthalten sind.

Die Ausdehnung, welche Riemann dem Begriff der Krümung für einen höheren Raum gab, hat sich von grosser Beutung erwiesen und ist speciell in dem Fall von Nutzen gesen, in welchem diese Riemann'sche Krümmung überall constant t. Ist sie dieses nicht, so erhält man eine Erweiterung der auss'schen Krümmung, die vor Allem den Missstand zeigt, dass e nicht für jeden Punkt des Raums oder der Mannigfaltigkeit nen einzigen Werth, sondern soviele Werthe hat, als es diesem unkt zugehörige Flächenorientirungen gibt, also $\frac{n(n-1)}{2}$.

Es scheint daher von Vortheil zu sein, den Begriff der *rümmung* auf eine andere Art auszudehnen.

Wir wollen uns einen Raum oder eine Mannigfaltigkeit I_{n-1} von $n-1$ Dimensionen denken, die in einem *beliebigen* aum M_n von n Dimensionen enthalten ist. Wie wir in dem all der in einem linearen Raum enthaltenen Flächen die in nem Punkt die Fläche berührenden Geraden, so wollen wir im llgemeinen Fall die *geodätischen* Linien von M_n betrachten, die I_{n-1} in einem Punkt P berühren.

Bei den gewöhnlichen Flächen lassen sich die Richtungen er *Krümmungslinien* als die Halbirungsgeraden der Richtungen er Asymptotenlinien ansehen, d. h. als die Axen des Kegelhnitts, der diese letzteren Richtungen zu Asymptoten hat, ehe Kap. 16, § 9; ähnlich betrachten wir im allgemeinen

Fall statt der Tangenten an die Asymptotenlinien *die geo tischen Linien von* M_n, *welche* M_{n-1} *in dem Punkt P os liren (dreipunktig berühren);* sie bilden eine quadratische M nigfaltigkeit, deren $(n-1)$ Axen mit vollem Recht als Richtungen der *Krümmungslinien* anzusehen sind; *diese A stehen zu je zweien senkrecht aufeinander und ihre Läng stellen genau so, wie in dem gewöhnlichen Fall der Dup schen Indicatrix für die Flächen, die Krümmungsradien der Mannigfaltigkeit* M_{n-1} *normalen Schnitte dar, die in den R tungen dieser Krümmungslinien gemacht werden (die Hauptkr mungsradien); sie entsprechen genau den Maxima und Mini der Krümmungsradien aller unendlich vielen Normalschnitte.*

Der reciproke Werth des Products dieser Hauptkrümmun radien heisst *die totale Krümmung der Mannigfaltigkeit in d betrachteten Punkt.*

Die vorstehenden Begriffe ergeben sich aus Betrachtung die Lipschitz und Voss in den im § 2 citirten Arbeiten an stellt haben; diese Autoren gehen von der Theorie der quad tischen Differentialformen aus.

Kronecker, *Berl. Ber.*, 1869, p. 170, 695 Beez, *Zeitschr. für Math.*, 21, 24; *Math. Ann.*, 7 dage suchten einen anderen Gedankengang zu Grund zu legen, sich übrigens auf sehr natürliche Art darbietet.

Wir wollen uns der Einfachheit wegen auf den Fall schränken, in welchem die Mannigfaltigkeit M_{n-1} *in ei linearen Raum* R_n *enthalten ist* und wollen in ihm eine sp rische Mannigfaltigkeit von $n-1$ Dimensionen und d Radius 1 betrachten, die durch die Gleichung

$$f = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 - 1 = 0$$

dargestellt werde, während die Gleichung der gegebenen M nigfaltigkeit

$$F(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

laute.

Wir wollen jeden Punkt von F jedem Punkt von f zuord und wollen dabei so verfahren, wie es bekanntlich bei der sp rischen Abbildung der Flächen geschieht (vergl. Kap. 16, § d. h. wir lassen diejenigen Punkte einander entsprechen, denen *die normalen Geraden* parallel sind. Betrachtet man Volumen eines unendlich kleinen Elements der Mannigfaltig um einen Punkt P und das Volumen des entsprechenden Elem der Kugel, so ist die Grenze des Verhältnisses zwischen dem

ren und dem des Elements der Mannigfaltigkeit die *Gauss-he Krümmung* der Mannigfaltigkeit im Punkt P; *sie ist der ciproke Werth des Products der Hauptkrümmungsradien, wie i den früheren Betrachtungen.*

Der Ausdruck für die Krümmung K lautet

$$K = -\frac{1}{S^{n+1}} \begin{vmatrix} 0, & F_1, & F_2, & \ldots, & F_n \\ F_1, & F_{11}, & F_{12}, & \ldots, & F_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ F_n, & F_{n1}, & F_{n2}, & \ldots, & F_{nn} \end{vmatrix},$$

orin die F_i, F_{ij} die ersten und zweiten Derivirten von F ezeichnen und S sich aus

$$S = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2} \quad \textit{ergibt.}$$

Ueber den Ausdruck für K siehe auch Ricci, *Ann. di nat.*, (2), 12, p. 165 und über $n = 4$ Suworoff, *Bull. de Darboux*, 4, p. 186. Vergl. auch Lie, *Gött. Nachr.*, 1871.

Nennt man allgemein ebene bez. sphärische Mannigfaltigeiten M_{n-1} solche, die einem M_n angehören und so beschaffen ind, dass in jedem Punkt die $(n-1)$ Hauptkrümmungsradien ämmtlich entweder unendlich gross oder derselben endlichen rösse gleich sind, die auch dann dieselbe bleibt, wenn man von inem Punkt der Mannigfaltigkeit zu einem anderen übergeht, o gilt der Satz:

In einem beliebigen Raum M_n existiren im Allgemeinen eine ebenen und sphärischen Mannigfaltigkeiten; wenn die Coefficienten des Linienelements von M_n gewisse Bedingungen erfüllen, o enthält M_n ∞^n Ebenen oder Kugeln (von gegebenem Radius); n dem Fall, in welchem M_n ∞^n Ebenen enthält, können jedoch n ihm keine Mannigfaltigkeiten von der Beschaffenheit existiren, lass die Hauptkrümmungsradien zwar für jeden Punkt sämmtlich inander gleich sind, von Punkt zu Punkt der Mannigfaltigkeit ber variiren. Siehe Voss, *Math. Ann.*, 16, p. 157. Dieses Theorem entspricht dem im gewöhnlichen Raum geltenden Satz, dass es ausser den Kugeln keine Flächen gibt, deren Punkte sämmtlich Nabelpunkte sind.

In einem Raum constanter Riemann'scher Krümmung (siehe § 3) *existiren Mannigfaltigkeiten, für welche die Hauptkrümmungshalbmesser zwar in jedem Punkt einander gleich sind, sich aber von Punkt zu Punkt ändern.* Voss, l. c., p. 160.

Wenn die totale Krümmung in jedem Punkt einer Mannig-

faltigkeit Null ist, so ist diese dadurch ausgezeichnet, dass von jede ihrer Punkte eine geodätische Linie von M_n ausgeht, welche ei vierpunktige Berührung mit ihr hat. Will man die Benennung gebrauchen, die für die Flächen benutzt werden, so kann m sagen, jeder Punkt sei ein *parabolischer Punkt.* Siehe Kap. 16, §

Wenn die *totale Krümmung* Null ist und ins Besonde $n-2$ der Hauptkrümmungsradien für jeden Punkt der Ma nigfaltigkeit von $n-1$ Dimensionen unendlich gross sind, heisst die Mannigfaltigkeit der Analogie mit den Flächen d gewöhnlichen Raums wegen eine *Developpable*, weil sie alsda durch eine geodätische Linie des Raums M_n auf ähnliche A erzeugt wird, wie eine Developpable durch eine Gerade des g wöhnlichen Raums.

Ein den vorstehenden Sätzen verwandtes Theorem ist v A. Brill, *Math. Ann.*, 26, p. 302:

Eine pseudosphärische dreidimensionale Mannigfaltigkeit (v constanter negativer Riemann'scher Krümmung) kann es, wenn reell sein soll, in einem linearen Raum von 4 Dimensionen ni geben, sondern nur in einem linearen Raum von 5 Dimensio

Allgemeiner (siehe Bianchi, *Differentialgeometrie*, Leip 1899, p. 615, 619):

In einem Raum R_{n+1} von $n+1$ Dimensionen ($n>$ constanter Riemann'scher Krümmung K gibt es keinen Ra constanter Riemann'scher Krümmung K_0, wenn $K_0 - K$ nega ist. Ist diese Differenz (die relative Krümmung) positiv, so si die entsprechenden Hyperflächen ausschliesslich Hypersphären.

Am Schluss dieses Paragraphen wollen wir noch erwähn dass auch andere Begriffe und Theoreme der Flächentheorie a die mehrdimensionalen Räume ausgedehnt wurden.

Die Erweiterung der *Codazzi'schen Formeln* führt einem System von $\frac{1}{6}n(n-1)(5n-1)$ Formeln für eine einem linearen Raum enthaltene Mannigfaltigkeit von n Dim sionen; über die Ausdehnung des *Euler'schen Theorems* si Jordan, *Compt. Rend.*, 79, 1874, p. 912 und über die *Dupin'schen Theorems:* Lie, *Gött. Nachr.*, 1871; Klein, *Ma Ann.*, 5 und auch Cesàro, *Vorlesungen über natürliche G metrie.* Eine Darstellung der Differentialgeometrie der m dimensionalen Räume findet man bei Killing, *Die nicht-Eu dischen Raumformen in analytischer Behandlung*, Leipzig 18

§ 5. Die Differentialgeometrie der Mannigfaltigkeiten n zwei Dimensionen (Flächen) in den Räumen constanter Riemann'scher Krümmung.

In einigen neueren Arbeiten, besonders von Bianchi, wird Versuch gemacht, die gewöhnliche Differentialgeometrie der chen auf den Fall auszudehnen, in welchem diese in drei- nensionalen Räumen *constanter Krümmung* enthalten sind.

Wir wollen dem Element des dreidimensionalen Raums n constanter positiver Krümmung $\frac{1}{R^2}$ oder negativer Krüm- ıng $-\frac{1}{R^2}$ bez. die Form

$$ds^2 = R^2(\pm dx^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)$$

ben (siehe § 3), und es seien die x durch die Relation

$$x^2 \pm x_1^2 \pm x_2^2 \pm x_3^2 = 1$$

rbunden, worin die oberen Zeichen für den elliptischen, die teren für den hyperbolischen Raum gelten.

Zu jeder Fläche in diesem Raum gehören die bekannten iden quadratischen Differentialformen mit den Coefficienten , F, G, D, D', D'', zwischen denen drei Relationen bestehen; e beiden ersten sind die *Codazzi'schen Formeln* selbst (vergl. 469, 470), die dritte Gauss'sche wird dagegen auf folgende ct modificirt:

$$\frac{DD'' - D'^2}{EG - F^2} = k - K;$$

bei bedeutet K die Krümmung des Raums und k die *ab- lute Krümmung* der Fläche (d. h. die, welche der ersten ndamentaldifferentialform entspricht). Die linke Seite dieser tzten Relation heisst die *relative Krümmung* der Fläche und t dem reciproken Werth des Products der beiden *reducirten auptkrümmungsradien* r_1, r_2 gleich.

Bianchi studirte in den Räumen constanter Krümmung *die Flächen, deren absolute Krümmung Null ist, Atti Acc. To- no,* 1895; *Ann. di mat.,* (2), 24; (3), 2; zu diesen Flächen gehört e *Clifford'sche;* vergl. Klein, *Math. Ann.,* 37; Killing, ib., 9; dann 2) die *Minimalflächen,* Bianchi, *Rend. Acc. Lincei,* 888; *Ann. di mat.,* (3), 2; siehe über die letzteren auch Lipschitz, *relle,* 78 und Cayley, *Compt. Rend.,* 111, 1890; ferner 3) *die lächen vom Liouville'schen Typus,* für welche $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = 2$

oder $r_1 + r_2 = 0$, etc. ist; man vergleiche die citirten Arbeit
Bianchi beschäftigte sich auch mit den Weingarten'sch
Systemen (Kap. 16, § 14) in den Räumen constanter Krü
mung, *Mem. Acc. Lincei,* (4), 4, 1887.

Ueber die Bestimmung der Volumina in den Räumen c
stanter Krümmung siehe Simon, *Math. Ann.*, 42; D'Ovid
Atti Acc. Torino, 1893; Loria, *Giorn. di Batt.*, 26; in Bezug
andere Arbeiten, die zwar dieselben Räume betreffen, aber ni
speciell ihre *Infinitesimal*geometrie, verweisen wir auf das
gende Kapitel.

Wir erwähnen schliesslich noch, dass *die reguläre Theil
eines nicht-Euclidischen oder pseudosphärischen Raums in c
gruente Polyeder* auf das Problem der unstetigen Gruppen linea
Substitutionen einer Variabeln führt, Poincaré; siehe *Rep*
1, Kap. 14, § 2. Studien dieser Art findet man bei Bianc
Math. Ann., 38, 40, 42; *Rend. Acc. Lincei,* 1893, sowie
Fricke und Klein, *Vorlesungen über die Theorie der a
morphen Functionen,* 1897, Abschn. 1; vergl. auch Hilbe
Mathematische Probleme, Gött. Nachr., 1900, Nr. 18, *Aufl
des Raumes aus congruenten Polyedern.*

Kapitel XXI.

Die absolute Geometrie d speciell die nicht-Euclidische Geometrie in der Ebene und im Raum.

1. Historische Bemerkungen über die nicht-Euclidische Geometrie.

Die ganze Metrik der Euclidischen Geometrie beruht auf ier Hypothese, die anderen ähnlichen Hypothesen vorzuziehen *isch* kein Grund vorliegt; die alleinige Ursache, weshalb an gerade ihr den Vorzug gegeben hat, rührt von einer ahrscheinlichen Uebereinstimmung mit den Erfahrungen her, e unsere Sinne uns verschaffen.

Diese Hypothese ist in dem berühmten *Postulat* V *oder m Postulat über die Parallelen* der Euclidischen Elemente *τοιχεῖα*) enthalten*).

Sehr zahlreiche Versuche sind zu verschiedenen Zeiten geacht worden, das Postulat zu beweisen oder es durch andere ı ersetzen; ausgedehnte ins Einzelne gehende Angaben findet an in dem Werk von Stäckel und Engel, *die Theorie der arallellinien von Euclid bis auf Gauss, eine Urkundensammng zur Vorgeschichte der nichteuclidischen Geometrie,* Leipzig 895. Bekannt sind die Untersuchungen Legendre's in den sten beiden Ausgaben seiner *Éléments de géométrie*, Paris 1794

*) Früher wurde es in Folge eines Irrthums der Copisten, die ns den griechischen Text übermittelt haben, *das Axiom XI* genannt. Die Euclidischen Elemente zerfallen in 13 Bücher und enthalen die wesentlichsten elementar-geometrischen Kenntnisse, welche ie Griechen hatten; sie sind etwa um 300 v. Chr. verfasst. Vergl. ber dieses einzigartige Werk M. Cantor, *Gesch. der Math.*, 1, . 246, sowie die Clebsch-Lindemann'schen *Vorlesungen über nalytische Geometrie des Raums,* in denen Lindemann den *στοιχεῖα* ine eingehende Besprechung zu Theil werden lässt.

(die neueste Ausg. ist von 1894); siehe auch die *Mém. de l'A de Paris*, 1833 und die Baltzer'sche *Planimetrie*. Beachter werth sind auch die früheren Forschungen von Girolan Saccheri, *Euclides ab omni naevo vindicatus* etc., Milano 17 die lange vergessen waren, und auf welche Beltrami die A merksamkeit der Mathematiker lenkte, *Rend. Acc. Lincei*, 188 ferner die Arbeiten von Lambert, 1766 (vergl. das oben citi Stäckel-Engel'sche Werk).

Nach den neuesten Forschungen ist es unzweifelhaft, d schon Gauss die Art erkannt hat, auf welche das Problem lösen ist, siehe Stäckel-Engel, l. c.; *Math. Ann.*, 49, p. 4 und *Bull. de Darboux*, 1897, p. 206; ferner Gauss, *G Werke*, Bd. 8 (Nachlass) und die *Urkunden zur nichteucli schen Geometrie*, I. Lobatschefskij von Engel, Leipzig 189 vergl. auch den Briefwechsel zwischen Gauss und Wolfga Bolyai, Leipzig bei Teubner.

Lobatschefskij und Johann Bolyai, der Sohn Wo gang's, waren die ersten, welche in separat erschienenen Sch ten neue und originelle Ideen über die wahre Natur der gemeinen Parallelentheorie entwickelten und dabei den Fun mentalsatz zu Grund legten, dass das Postulat V nicht etwa e Wahrheit darstellt, die sich logisch aus den anderen Voraussetzun Euclid's ableiten lässt, sondern von diesen durchaus un hängig ist. Sie verfuhren dabei auf eine Art, wie man es jedem indirecten Beweis thut. Sie legten nämlich an Stelle fünften Postulats ein ihm widersprechendes zu Grund und v folgten dann die Hypothese, dass sich durch einen Punkt auss halb einer Geraden nicht lediglich eine die gegebene Ger nicht schneidende Gerade ziehen lasse. Sie entwickelten diese Art durch elementar-geometrische Betrachtungen n Euclid's Vorbild eine in sich einwandfreie Geometrie, die all dings zu anderen Sätzen, wie die Euclidische Geometrie fül

Die betreffenden Werke Lobatschefskij's sind: *Exposit des principes de la géométrie* etc., der Universität Kasan üb reicht 1826, aber ungedruckt; *Ueber die Anfangsgründe Geometrie.* Kasaner Bote 1829, 30; *Neue Anfangsgründe Geometrie mit einer vollständigen Theorie der Parallelen, Ac der Universität Kasan*, 1835—1838 (eine deutsche Uebersetzu dieser drei Arbeiten mit eingehender Würdigung und werthvol Anmerkungen von Engel ist bei Teubner erschienen, Leip 1899); *Géométrie imaginaire*, *Crelle*, 17; *Geom. Unters.*, Ber 1840; *Pangéométrie*, Kasan 1855 (italienische Uebersetzung

taglini, *Giorn. di Batt.*, 5, p. 273). Das Werk Johann yai's führt den Titel: *Appendix scientiam spatii absolute um exhibens* etc. und erschien als Anhang zu dem Buch Wolfg Bolyai's *Tentamen* etc. (vergl. das Namenverzeichniss), 1832; tsch frei bearb. von J. Frischauf, 1872; ital. von Battani, *Giorn. di Batt.*, 6; franz. von Houël, 2. éd., Paris 1895.

Die Theorie, die sich auf diese Art ausbildete, wurde *abte Geometrie, imaginäre Geometrie, abstracte Geometrie, Panetrie, Metageometrie* oder auch weniger treffend *nichtlidische Geometrie* genannt.

Man kann nun einerseits nach denjenigen geometrischen zen fragen, die unabhängig vom fünften Postulat sind, andereits eine Geometrie aufbauen, die alle Euclidischen Voraussungen enthält, nur an Stelle des fünften Postulats eine ere diesem widersprechende Voraussetzung hat.

Wir bemerken noch, dass Lobatschefskij und J. Bolyai, sie sich stets an das Postulat der *unendlich grossen* Geraden lten, nur zu der sogenannten hyperbolischen Geometrie (siehe § 2) nen, einer einzigen der beiden nicht-Euclidischen Theorien, sich der Euclidischen gleichberechtigt zur Seite stellen.

In den Formeln der absoluten Geometrie tritt eine unbenmte Constante auf, deren Werth den Raum, in dem wir uns geometrischen Gebilde vorstellen, ebenso kennzeichnet, wie eine iche constanten Krümmungsmasses in unserem Euclidischen Raum rch den Werth des Krümmungsmasses charakterisirt wird. r *Werth dieser unbestimmten Constanten kann nur durch e Erfahrung geliefert werden.*

Auf solche Art erscheint das Euclidische Postulat oder ein leres ihm ähnliches lediglich als *ein Datum der Erfahrung, lches sich innerhalb der Grenzen unserer Beobachtungen als t der Wirklichkeit übereinstimmend erweist.*

Zum vollen Verständniss und der Begründung der neuen issenschaft trugen in zwei verschiedenen Richtungen die Ideen emann's in seiner Habilitationsrede (siehe Kap. 20) und dienigen Cayley's, *Phil. Trans.*, 1859 über die Art, die metrischen genschaften der Figuren *projectiv* zu definiren, wesentlich bei. rch Riemann wurde darauf hingewiesen, dass es auch eine ometrie der geschlossenen Geraden geben könne; ferner aber rte er den Raum als Mannigfaltigkeit constanten Krümmungsasses auffassen. Auf den Zusammenhang mit den Flächen conanter Krümmung der Euclidischen Geometrie wies zuerst Belami hin. Jedem Satz über Flächen constanten negativen Krüm-

mungsmasses im Euklidischen Raum entspricht ein Satz der hy
bolischen Geometrie und umgekehrt, Beltrami, *Saggio d'i
pretazione della Geometria non-euclidea*, *Giorn. di Batt.*, 6, 1
Ann. di mat., (2), 2 (Siehe § 5). Klein, *Math. Ann.*,
hat auf die Beziehungen zwischen den Untersuchungen C
ley's und den Begriffen der absoluten Geometrie aufmerk
gemacht. Erst in Folge der Herstellung dieses Zusammenhang
lang der strenge Beweis für die Unmöglichkeit, das Postulat
gisch aus den übrigen Voraussetzungen, die der Geometrie zu Gr
liegen, abzuleiten; diese Unmöglichkeit haben Lobatschef
und J. Bolyai im Grund ohne Beweis als bestehend angenom

Besonders hervorzuheben sind noch die Untersuchungen
Helmholtz, *Ueber die Thatsachen, die der Geometrie zu Gr
liegen*, *Gött. Nachr.*, 1868 oder *Wissensch. Abh.*, 2, p. 618. D
Riemann und Helmholtz wurde das (von Lie) sogena
Riemann-Helmholtz'sche Raumproblem geschaffen, welches Li
3. Bd. seiner *Theorie der Transformationsgruppen* sehr einge
behandelt hat.

Andere specielle Arbeiten über die absolute Geometrie
von Cayley, *Math. Ann.*, 5; Story, *Amer. Journ.*, 4, 5; Si
Crelle, 109, welche die trigonometrischen Formeln erweite
Battaglini, *Giorn. di Batt.*, 12, 16; D'Ovidio, *Mem.
Lincei*, 1875, 1876; *Atti Acc. Torino*, 1891—1893; etc.

Von den hervorragendsten Darstellungen der nicht-Eu
schen Geometrie citiren wir Frischauf: 1) *absolute Geon
nach Joh. Bolyai;* 2) *Elemente der absoluten Geom
3) *Elemente der Geometrie*, 2. Aufl., Leipzig 1872, 1876, 1
Killing, *die nicht-Euclidischen Raumformen in analytischer
handlung*, Leipzig 1885; Killing, *Einführung in die Grund
der Geometrie;* Bd. 1 und 2, Paderborn 1893, 1898; Mans
*Sur les principes fondamentaux de la géométrie, de la méca
et de l'astronomie*, Paris 1893; *Mathesis* 1895, wozu noch
*autographirten Vorlesungshefte, Hft. 6, Nicht-Euclidische Geon
W.-S.* 1889/90 *und S.-S.* 1890 von Klein hinzuzufügen

Weitere Originalarbeiten über die nicht-Euclidische Geom
verdankt man De Tilly, *Recherches sur les éléments de
métrie*, Bruxelles 1860; *Essai sur les principes fond. etc.*,
de Bordeaux, (2), 3, 1877; *Essai de géom. anal. génér.*,
de Belg., 1892 und Flye S. Marie, *Études anal.* etc., Paris 1

Von allgemeinerer Natur ist der Gegenstand, mit dem
die *Grundzüge der Geometrie* von Veronese und die üb
in Kap. 19, § 1 citirten Werke beschäftigen; der Anhang

le des Veronese'schen Buchs enthält ausgedehnte und ein- ende historisch-kritische Notizen über das vorliegende Thema; gl. auch einen Artikel von Mansion in der *Revue des Quest. nt.*, 1895, in welchem über die De Tilly'schen Arbeiten chtet wird.

. Das Postulat V Euclid's. Die vor Lobatschefskij d Bolyai erhaltenen Resultate. Die drei Geometrien von elementarem Standpunkt.

Das Postulat V Euclid's lautet:

Es soll gefordert werden, dass, wenn eine Gerade zwei rade trifft, und mit ihnen auf derselben Seite innere Winkel let, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind, die beiden raden, ins Unendliche verlängert, einander zuletzt auf derselben te treffen, auf welcher die Winkel liegen, die kleiner als zwei chte sind (Fassung der στοιχεῖα).

Wir geben noch die übrigen Postulate Euclid's an*):

st. I. *Zwei gegebene Punkte lassen sich immer durch eine Gerade verbinden.*

st. II. *Eine Gerade kann verlängert werden.*

st. III. *Um ein gegebenes beliebiges Centrum und mit einem gegebenen beliebigen Radius lässt sich immer ein Kreis beschreiben.*

st. IV. *Alle rechten Winkel sind einander gleich.*

st. VI. *Zwei Gerade schliessen keinen endlichen Raum zwischen sich ein.*

Die drei ersten sind *Constructionspostulate.*

Das vierte Euclidische Postulat ist, wie Hilbert in seinen undlagen der Geometrie, *Festschrift zur Feier der Enthüllung s Gauss-Weber-Denkmals in Göttingen*, 1. Thl., Leipzig 1899, 16 gezeigt hat, ein beweisbarer Lehrsatz, der von Euklid mit recht unter die Postulate gestellt wurde.

Die Anstrengungen, die man machte, das Postulat V zu weisen, führten dazu, an seine Stelle andere Postulate zu setzen.

Wallis hat im Jahr 1693 zwei seiner Vorlesungen über

*) Wir haben diesen Postulaten die Nummern beigelegt, die sie wöhnlich in den Euclid-Ausgaben erhalten; siehe z. B. die wich- ge von Heiberg, 1883—88 besorgte Ausgabe. Kritische Notizen er die Postulate findet man bei P. Tannery, *Bull. de Darboux*,), 5, 8. Vergl. auch einen Artikel von Mansion, *Soc. scient. de ruxelles*, 14, 1889, 1890, ferner die Besprechung von Lindemann, f die schon verwiesen wurde.

Parallelentheorie im zweiten Band seiner Werke p. 665—
veröffentlicht. Er ersetzt die fünfte Forderung Euclid's d
die andere (vergl. Stäckel-Engel):

Es existiren ähnliche Dreiecke.

Dieses Postulat ist übrigens zu weitgehend; Saccheri
statt seiner das folgende angegeben:

Es existiren zwei gleichwinklige und nicht congruente Drei

Ein anderes Postulat, das dem Euclidischen substit
werden kann, lautet:

a) *Von einem Punkt ausserhalb einer Geraden lässt sich eine einzige Parallele zu ihr ziehen;* dies entspricht Annahme, *dass auf der Geraden nur ein einziger Punkt Unendlichen existirt.*

Dem Euclidischen Postulat gleichwerthig sind auch Propositionen:

b) *Die Summe der drei Winkel eines Dreiecks ist zwei Rec gleich.*

c) *In einem Viereit, in welchem zwei Winkel Rechte sind, die den rechten Winkeln anliegenden beiden Gegens gleich sind, müssen die beiden anderen Winkel Rechte s* von Saccheri angenommene Forderung.

d) *In einem Viereit mit drei rechten Winkeln ist der v Winkel ein Rechter;* von Lambert adoptirtes Postulat, sich von dem vorhergehenden nur wenig unterscheidet.

Die Hypothesen, nach welchen diese Winkel, die Sacch und Lambert benutzen, *stumpf* oder *spitz* sind, wollen der Kürze wegen die *Hypothese des stumpfen Winkels* und *des spitzen Winkels* nennen.

Unabhängig von der Annahme eines dieser Postulate ge die folgenden Sätze:

Wenn man die Existenz eines einzigen Dreiecks zugibt, welches die Summe der Winkel zwei Rechte beträgt, so gilt selbe für jedes andere Dreieck. Gewöhnlich Satz von Legen genannt, findet sich aber schon bei Saccheri.

Nimmt man an, die Gerade erstrecke sich ins Unendl so kann die Summe der drei Winkel eines Dreiecks nicht grö als zwei Rechte sein. Legendre.

Dabei ist die Hypothese des stumpfen Winkels Sacche oder Lambert's nicht zulässig.

Wenn das Postulat Saccheri's oder Lambert's in ei Fall gilt, so ist es immer richtig.

Wenn die Hypothese des spitzen oder stumpfen Winkels Saccheri oder Lambert in einem Fall zutrifft, so ist sie ner gültig.

Je nachdem die Summe der drei Winkel eines Dreiecks ner, ebenso gross oder grösser als zwei Rechte ist, trifft die pothese des spitzen Winkels, des rechten oder des stumpfen nkels zu. Saccheri.

Bei Annahme der Hypothese, dass die Summe der Winkel es Dreiecks kleiner als zwei Rechte sei, schneiden sich zwei rade entweder, oder verhalten sich wie Asymptoten zueinander hern sich unbegrenzt, ohne sich jemals zu treffen) oder haben Loth gemeinschaftlich, von welchem aus gerechnet sie divergiren. eorem von Saccheri.

Gilt dieselbe Hypothese, so ist der Flächeninhalt des Drei- s dem Winkeldefect proportional, wenn man diesen Namen Differenz zwischen zwei Rechten und der Summe der drei nkel gibt. Theorem von Lambert.

Gibt man zu, es könne durch einen Punkt, der im Innern Winkels eines Dreiecks liegt, eine Gerade gezogen werden, lche die beiden Schenkel schneidet, so folgt, dass die Summe drei Winkel nicht weniger als zwei Rechte beträgt. Legendre; he auch Baltzer, *Leipz. Ber.*, 1870, *Crelle*, 73, p. 372.

Durch die vorstehenden Theoreme ist die Theilung der gemeinen Geometrie in drei Hauptspecies klar vorgezeichnet:

I. *Die sogenannte Lobatschefskij'sche oder hyperbolische ometrie.* Die Gerade ist unendlich lang und nicht geschlossen.

Das Postulat V gilt nicht, dagegen gilt Postulat VI.

Die Summe der Dreieckswinkel ist kleiner als zwei Rechte.

Diese Geometrie entspricht der Hypothese des spitzen nkels Saccheri's oder Lambert's.

Von einem Punkt aus können *zwei* Parallele zu einer gebenen Geraden (unendlichviele, die gegebene Gerade nicht meidende Gerade, deren Grenzlagen die zwei Parallelen bilden) zogen werden. In dieser Geometrie denkt man sich, die Gerade be *zwei* unendlich ferne Punkte.

Nennt man, wie gewöhnlich, a, b, c die Seiten und A, B, C e Winkel des Dreiecks, so gelten die folgenden trigonometri- hen Relationen:

$$\sin\frac{b}{R}\sin C = \sin\frac{c}{R}\sin B, \quad \text{das Sinustheorem,}$$

$$\cos\frac{c}{R}\cos A + \sin\frac{a}{R}\cos\frac{b}{R}\cos C = \sin\frac{b}{R}\cos\frac{a}{R},$$

$\cos \frac{a}{R} = \cos \frac{b}{R} \cos \frac{c}{R} + \sin \frac{b}{R} \sin \frac{c}{R} \cos A$, das Cosinustheor

$\cos A + \cos B \cos C = \sin B \sin C \cos \frac{a}{R}$,

$\sin C \sin A = \sin B \cos \frac{a}{R} - \cos C \sin A \cos \frac{b}{R}$;

darin ist R eine constante und *rein imaginäre* Grösse; könnte mithin in diesen Formeln auf die gewohnte Art Kreisfunctionen durch hyperbolische ersetzen.

Die dritte Relation wurde 1826 von Taurinus veröff licht, der sich fast zu derselben Zeit, wie Lobatschefs und J. Bolyai mit den Principien der Geometrie beschäfti Staeckel-Engel, l. c.

Lambert hatte schon 1766 die Vermuthung geäussert, die aus einer solchen Hypothese, d. h. der Hypothese des spi Winkels, abgeleitete Geometrie sich auf einer *Kugel von ginärem Radius* interpretiren lasse; die vorstehenden trig metrischen Formeln zeigen, dass dieser Zusammenhang in That besteht.

In der Lobatschefskij'schen Geometrie besitzen Curven, deren Punkte gleichen Abstand von einer festen Ger haben, *(die Curven gleichen Abstands)* die Eigenschaften:

1. *Ihre Normalen stehen sämmtlich senkrecht auf der Ger und umgekehrt.*
2. *Jede Gerade, welche die Curve in zwei Punkten schn bildet in diesen Punkten gleiche Winkel mit der Curve.*
3. *Die beiden von einem Punkt an die Curve gezogenen genten haben gleiche Länge.*

Eine Curve, welche die Eigenschaften 2 und 3 hat, überdies dadurch ausgezeichnet ist, dass ihre Normalen sän lich parallel sind, heisst *eine Grenzlinie* oder *ein Oricyclus batschefskij's.*

Sie ist ein Grenzfall der Linie gleichen Abstands und gleich auch des Kreises.

Sie ist einem Kreis vergleichbar, dessen Mittelpunkt im endlichen liegt.

Auf ähnliche Art erhält man im hyperbolischen Raum drei Dimensionen die *Grenzfläche* (*Orisphära*) *Lobatschefs* diese Flächen entsprechen denen, die Johann Bolyai mi bezeichnete.

II. *Die Euclidische oder parabolische Geometrie.* Die Gerade i unendlich lang, aber geschlossen.

Es gelten die Postulate V und VI.

Die Summe der Dreieckswinkel beträgt zwei Rechte.

Diese Geometrie entspricht der Hypothese vom rechten nkel Saccheri's oder Lambert's.

Von einem Punkt aus kann *nur eine einzige* Parallele zu er gegebenen Geraden gezogen werden. Die Gerade hat *einen* igen Punkt im Unendlichen.

Die oben angegebenen trigonometrischen Formeln behalten i e Gültigkeit, wenn $\frac{1}{R} = 0$, d. h. $R = \infty$, vorausgesetzt und n hin

$$a \text{ an die Stelle von } R \sin \frac{a}{R} \text{ und}$$

$$1 \text{ „ „ „ „ } \cos \frac{a}{R}$$

etzt wird.

III. *Die sogenannte Riemann'sche oder elliptische Geometrie.* e Gerade ist geschlossen und hat endliche Länge.

Es gilt weder das Postulat V noch das Postulat VI.

Die Summe der Dreieckswinkel ist grösser als zwei Rechte.

Diese Geometrie entspricht der Hypothese vom stumpfen inkel Saccheri's oder Lambert's.

Von einem Punkt aus kann keine Parallele zu einer raden gezogen werden; die Gerade hat keinen unendlich nen Punkt.

Die trigonometrischen Formeln bleiben dieselben, wie vor-; nur muss in ihnen R als eine wesentlich reelle positive ösee vorausgesetzt werden.

Bei dieser Geometrie lassen sich, wie zuerst Klein gezeigt t, auf die folgende Art zwei Fälle unterscheiden:

Aus den trigonometrischen Formeln ergibt sich, dass zwei rade, die sich in einem Punkt schneiden, sich in dem Ab-nd $R\pi$ von diesem Punkt zum zweiten Mal treffen, und dass n überdies, von einem Punkt aus auf einer Geraden fort-reitend, nach einem Weg, der *höchstens* die Länge $2R\pi$ hat, ter allen Umständen wieder zu dem Ausgangspunkt zurückkehrt. f Grund dieser Principien sind dann zwei Hypothesen mög-h, nämlich:

a) Dass man, eine Gerade durchschreitend, zum ersten Mal eder nach dem Ausgangspunkt zurückkommt, nachdem man

einen Weg zurückgelegt hat, dessen Länge nur $R\pi$ beträgt; a dann ist der zweite Punkt, in dem sich zwei Gerade treff derselbe, wie der erste; es besteht mithin der Satz: *Z Gerade schneiden sich in einem einzigen Punkt und durch z Punkte geht nur eine Gerade. Die Länge der Geraden ist* Die aus dieser Hypothese abgeleitete Geometrie kann die *einfa Riemann'sche* oder die *einfach elliptische Geometrie* genannt w den. Klein.

In dieser Geometrie ist der grösste Abstand zweier Pun $\frac{1}{2}R\pi$*; wenn ein Punkt gegeben ist, bilden alle Punkte,* $\frac{1}{2}R\pi$ *von ihm abstehen, eine Gerade.*

Die Ebene wird in dieser Geometrie durch eine ihrer Gera nicht in zwei Theile zerlegt.

b) Dass man, eine Gerade durchschreitend, zum ersten wieder nach einem Weg $2R\pi$ zu dem Ausgangspunkt zurü kehrt; *alsdann schneiden sich zwei Gerade immer in zwei Punk und es gibt Paare von Punkten, durch welche unendlich v Gerade gehen.*

Die Länge einer jeden Geraden ist $2R\pi$; die aus di zweiten Hypothese abgeleitete Geometrie heisst die *dopp Riemann'sche* oder *elliptische Geometrie.* Klein.

Der grösste Abstand zweier Punkte ist $R\pi$ *und, wenn Punkt gegeben ist, so gibt es nur einen Punkt, der von ihm* $R\pi$ *absteht.*

Es existirt immer ein zweien gegebenen Geraden gem schaftliches Loth.

Die Ebene wird durch jede ihrer Geraden oder allgem durch jede ihrer geschlossenen Linien zerlegt.

Jeder Kreis hat zwei Mittelpunkte.

Dieser specielle Fall der Riemann'schen Geometrie entspr der sphärischen Geometrie und lässt sich auf einer Kugel in pretiren.

Wird die elliptische Geometrie auf einer Fläche von stanter positiver Krümmung interpretirt, so steht die Un scheidung zweier Arten dieser Geometrie in Beziehung zu beiden Hypothesen der *Zweiseitigkeit* bez. *Einseitigkeit* di Fläche. Vergl. Kap. 18, § 1, S. 556, 557.

Die Zweitheilung der Riemann'schen Geometrie entging ein Autoren, wie z. B. Beltrami; sie wurde von Klein entd *Math. Ann.*, 4, p. 604, Anm. und 6, p. 125. Siehe auch N comb, *Crelle*, 83 und Killing, l. c.; der letztere Autor nennt

fach elliptischen Raum die *Polarform des Riemann'schen Raums.* ın kann auch Heft 1, p. 243, 293 der oben citirten Klein'- ıen *autograph. Vorlesunghefte* vergleichen.

Zum Schluss unserer Betrachtungen wollen wir noch bemerken, ss De Tilly in seinen in dem vorigen Paragraphen citirten ·beiten, speciell in der vom Jahr 1893, die drei Geometrien f den Begriff des Abstands allein gründete, indem er nur ı als primitiv ansah und die Winkel ausschloss. Schon ›urier hatte die Idee gehabt, den Abstand der ganzen ıclidischen Geometrie zu Grund zu legen; siehe die Stelle von ›urier, die in der *Mathesis,* 9, 1889, p. 139—141 repro- cirt wird. De Tilly benutzte zur Kennzeichnung der drei ·ometrien die Beziehung zwischen den Abständen von 4 Punkten der Ebene und zwischen den Abständen von 5 Punkten im ıum, auf welche Lagrange hingewiesen hatte, und die von ıyley studirt und später von Schering auf die nicht- ıclidischen Räume ausgedehnt wurden; vergl. S. 20 und 34 ıd die Citate auf S. 35; der letztere Autor baute auf diese eziehungen die Fundamente der drei Geometrien auf. Aus nselben Principien folgerte er auch einen Beweis für die Un- öglichkeit, das Euclidische Postulat *logisch* abzuleiten, welche e ersten Schriftsteller Bolyai und Lobatschefskij, die sich it der absoluten Geometrie beschäftigten, noch nicht nach- weisen vermochten, die sich aber schon als Folge aus den rbeiten von Riemann, Helmholtz, Beltrami und Klein gab. Ueberdies gab Schering einen kurz gefassten Beweis s Satzes, *dass ausser dem Euclidischen und den beiden nicht- uclidischen kein anderes geometrisches System existirt.* Eine itische Besprechung der De Tilly'schen Arbeiten findet man ıf S. 665 u. ff. der deutschen Uebersetzung des Veronese'schen uchs und in Bd. III von Lie's Transformationsgruppen.

§ 3. Die gewöhnlichen metrischen Relationen in projectiver Form.

Vorerst bemerken wir, dass die gewöhnlichen metrischen eziehungen sich in projective Form bringen lassen, wenn in er Ebene die beiden unendlich fernen imaginären Kreispunkte ıd in dem Raum der unendlich ferne imaginäre Kreis (der ugelkreis) zu Hülfe genommen werden. Vergl. S. 83 und 105.

Es seien x_1, x_2, x_3; x_1', x_2', x_3' die homogenen Coordi ten zweier Punkte P, P' und ξ_1, ξ_2, ξ_3; ξ_1', ξ_2', ξ_3' die beiden Kreispunkte der Ebene (vergl. S. 28; diese unendlich fer Kreispunkte haben die Coordinaten $1, i, 0$ bez. $1, -i, 0$); *Abstand der beiden Punkte wird dann durch die Formel*

$$r = R \frac{\sqrt{(x x' \xi)(x x' \xi')}}{(x \xi \xi')(x' \xi \xi')}$$

ausgedrückt, in welcher R eine von der Masseinheit abhän Constante bezeichnet. Dabei bedeutet $(x x' \xi)$ *die Determinan*

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1' & x_2' & x_3' \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \end{vmatrix} \text{ u. s. w.}$$

Wenn man die Masseinheit einführt und sich denkt, Punkte a', a stehen um die Einheit von einander ab, *so* *der projective Ausdruck für r:*

$$r = \frac{\sqrt{(x x' \xi)(x x' \xi')}\,(a \xi \xi')(a' \xi \xi')}{\sqrt{(a a' \xi)(a a' \xi')}\,(x \xi \xi')(x' \xi \xi')}.$$

Wir gehen nun zu dem *Winkel* zweier Geraden über: Es seien $u_x = 0$, $u_x' = 0$ die auf homogene Coordina bezogenen Gleichungen zweier Geraden in der Ebene; *der Wi* ω *zwischen ihnen ist durch die folgenden projectiven Form gegeben:*

$$\cos \omega = \frac{1}{2} \frac{u_\xi u'_{\xi'} + u'_\xi u_{\xi'}}{\sqrt{u_\xi u_{\xi'} \cdot u'_\xi u'_{\xi'}}},$$

$$\sin \omega = \frac{i}{2} \frac{u_\xi u'_{\xi'} - u'_\xi u_{\xi'}}{\sqrt{u_\xi u_{\xi'} \cdot u'_\xi u'_{\xi'}}}.$$

Dabei ist das *Laguerre'sche Theorem, Nouv. Ann.*, 1853, p. 64 zu erwähnen; vergl. S. 28:

Der Winkel ω *wird durch*

$$\omega = \frac{i}{2} \log \frac{u_\xi \cdot u'_\xi}{u_{\xi'} \cdot u'_{\xi'}}$$

bestimmt, d h. ω *ist gleich* $\frac{i}{2}$, *multiplicirt mit dem Logarith des anharmonischen Verhältnisses des Quadrupels, welches den beiden gegebenen Geraden und den nach den zwei K punkten gezogenen Geraden gebildet ist.*

Um analoge Formeln im Raum zu erhalten, muss der ndlich ferne imaginäre Kreis in die Betrachtung eingezogen den.

Man habe den Abstand der Punkte zu untersuchen, deren nogene Coordinaten

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4;\quad x_1',\ x_2',\ x_3',\ x_4'$$

d.

Wir bilden den *Kegel 2ten Grads*, der von dem Punkt

$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4$$

Raums aus den unendlich fernen imaginären Kreis projicirt, $F(X, y) = 0$ sei die Gleichung dieses Kegels, worin die die laufenden Coordinaten sind; es sei ferner $T(X) = 0$ die ichung der Ebene, welche durch denselben unendlich fernen iginären Kreis geht; *der Abstand der beiden Punkte im um wird dann durch die Formel*

$$r = R\,\frac{\sqrt{F(x, x')}}{\sqrt{T(x)\,T(x')}}$$

gedrückt, worin, wie oben, R eine von der Masseinheit abgige Constante bedeutet, welche sich so, wie früher, bestimn lässt.

Man habe ferner zwei von einem Punkt (y) ausgehende Gerade; der einen liege der Punkt (x), auf der anderen der Punkt); man bezeichne mit $F_{x'}$ die Polare von F mit dem Pol) in Bezug auf die Variabeln (x) und mit $\Phi_{x'}(x, y) = 0$ Gleichung der durch den Punkt (x') an den Kegel mit der itze (y) gelegten Berührungsebene.

Der Winkel der beiden Geraden ist dann durch die Formeln

$$\cos\omega = \frac{F_{x'}(x, y)}{\sqrt{F(x, y)\,F(x', y)}},$$

$$\sin\omega = i\,\frac{\sqrt{\Phi_{x'}(x, y)}}{\sqrt{F(x, y)\,F(x', y)}}$$

eben und zwischen F und Φ besteht die Beziehung:

$$\Phi_{x'}(x, y) = F_{x'}^2(x, y) - F(x, y)\,F(x'y).$$

Der zwischen zwei Ebenen enthaltene Winkel ist das Pro- t von $\frac{i}{2}$ mit dem Logarithmus des Doppelverhältnisses des adrupels, welches aus den beiden gegebenen und den zwei nen besteht, die durch die Schnittlinie der ersteren gehen und unendlich fernen imaginären Kreis berühren.

Betrachtet man den unendlich fernen imaginären Kreis eine degenerirte Enveloppenfläche 2ten Grads, *so sind die Hauptaxen einer beliebigen Fläche* 2ten *Grads drei Kanten Tetraeders, das in Bezug auf die gegebene Fläche* 2ten *Gr und die durch den unendlich fernen imaginären Kreis dargest degenerirte Fläche* 2ten *Grads sich selbst conjugirt ist.* Ve S. 103—124.

Confocal (S. 120) *sind die Flächen* 2ter *Ordnung, die die nämliche abwickelbare und den unendlich fernen imagin Kreis enthaltende Fläche eingeschrieben sind.*

§ 4. Das absolute Gebilde Cayley's. Die projective Met Projective Interpretation der drei Geometrien.

Es soll jetzt die tiefgreifende Idee besprochen werden, von Cayley in dem 6ten Memoir über die Theorie der a braischen binären und ternären Formen, *Phil. Trans.*, 1859 geregt und später von Klein, *Math. Ann.*, 4, 6 auf eleg Art zur projectiven Interpretation der nicht-Euclidischen Ge trie nutzbar gemacht wurde.

Gebilde 1ter *Stufe.* Wir beginnen mit den Gebilden 1ter S d. h. von nur einer Dimension.

Wir denken uns auf der Geraden ein *Paar* von Pun festgesetzt, welches wir das *absolute Gebilde der Geraden* ne wollen. Wenn x_1, x_2 die laufenden homogenen Coordin eines Punkts der Geraden sind, so wird das Paar Punkte d eine in x_1, x_2 quadratische binäre Form

$$\sum_{i=1}^{i=2}\sum_{k=1}^{k=2} \alpha_{ik} x_i x_k = 0$$

dargestellt, deren linke Seite wir mit Σ_{xx} bezeichnen; auf d absolute Gebilde beziehen wir die metrischen Verhältnisse zwis den Punkten der Geraden.

Sind zwei Punkte x, x' gegeben und werden die P des *absoluten Gebildes* ξ, ξ' genannt, so bilden wir das Do verhältniss

$$D = \frac{(x\xi)\,(x'\xi')}{(x\xi')\,(x'\xi)}$$

und nennen *Abstand* der beiden Punkte x, x' den Ausdru

$$r = R \log D,$$

worin R eine beliebige Constante bedeutet.

Bezeichnet man mit $\sum_{xx'}$ *die Polare von* $\sum_{xx}$ *für den Pol also* $\sum_{i=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} \alpha_{ik} x_i x'_k$, *so ist*

$$r = R \log \frac{\sum_{xx'} + \sqrt{\sum_{xx'}^2 - \sum_{xx}\sum_{x'x'}}}{\sum_{xx'} - \sqrt{\sum_{xx'}^2 - \sum_{xx}\sum_{x'x'}}}.$$

Der Abstand r genügt der Fundamentalrelation (der thatlich die Abstände auf einer Geraden in dem gewöhnlichen n des Worts genügen):

$$r_{12} + r_{23} + r_{31} = 0,$$

nn mit r_{ij} *der Abstand zwischen den Punkten i und j bezeich- wird.*

Es lassen sich nun die drei Fälle unterscheiden:

I. Die beiden Punkte ξ, ξ' des absoluten Gebildes, das der Massbestimmung zu Grund liegt, sind verschieden (d. h. die Discriminante von Σ verschwindet nicht) und conjugirt imaginär. In diesem Fall ergibt sich die *elliptische Geometrie* auf der Geraden.

II. Die beiden Punkte ξ, ξ' fallen zusammen. Man erhält die *parabolische Geometrie.*

III. Die beiden Punkte ξ, ξ' sind reell. Es folgt die *hyperbolische Geometrie.*

In der hyperbolischen Geometrie haben die beiden Punkte ξ′ unendlich grossen Abstand von jedem beliebigen anderen nkt und die Gerade hat zwei Punkte im Unendlichen.

Die Definition des Abstands r ergibt im Fall der *paraboschen* Geometrie für r immer Null, wenn R von Unendlich rschieden ist, und wird unbestimmt, wenn man R gegen Undlich convergiren lässt.

Man setzt in dem letzten Fall $\xi_1' = \xi_1 + \varepsilon\zeta_1$, $\xi_2' = \xi_2 + \varepsilon\zeta_2$ id $\frac{R}{\varepsilon}$ an Stelle von R und definirt den Abstand als Grenze, imlich

$$r = \lim_{\varepsilon=0} \left\{ \frac{R}{\varepsilon} \log D \right\}.$$

In der parabolischen Geometrie ist nur der Punkt ξ undlich ferner Punkt, d. h. er hat unendlich grossen Abstand n jedem beliebigen anderen Punkt; der Abstand r zweier Punkte ird als die Differenz zweier Doppelverhältnisse

$$r = \frac{(x'O)(E\xi)}{(x'\xi)(EO)} - \frac{(xO)(E\xi)}{(x\xi)(EO)}$$

ausgedrückt, worin O den Anfangspunkt auf der Geraden x E den Einheitspunkt bezeichnet.

In der elliptischen Geometrie ist die Länge der Gera endlich und gleich $2R\pi$.

Gebilde 2ter *Stufe.* Wir denken uns in der Ebene ei Kegelschnitt, dessen Gleichung $\Sigma_{xx} = 0$ laute, und nennen *das absolute Gebilde der Ebene.* Seine Gleichung in Linienco dinaten sei $S_{uu} = 0$.

Jede Gerade der Ebene schneidet den Kegelschnitt in z Punkten, die entweder reell oder conjugirt imaginär sind o zusammenfallen; diese Punkte sind die *Fundamentalpunkte* die *Geometrie auf dieser Geraden der Ebene.*

Von jedem Punkt der Ebene aus kann man zwei Tang ten an den absoluten Kegelschnitt ziehen; diese beiden Gera sind die *Fundamentalgeraden* für die *Geometrie des von die Punkt ausgehenden Strahlenbüschels.*

Als *Abstand zweier Punkte* (x), (x') definiren wir Ausdruck

$$r = R \log \frac{\sum_{xx'} + \sqrt{\sum_{xx'}^2 - \sum_{xx} \sum_{x'x'}}}{\sum_{xx'} - \sqrt{\sum_{xx'}^2 - \sum_{xx} \sum_{x'x'}}}$$

und als den *Winkel zweier Geraden* (u), (u') den Ausdruck

$$\omega = R' \log \frac{S_{uu'} + \sqrt{S_{uu'}^2 - S_{uu} S_{u'u'}}}{S_{uu'} - \sqrt{S_{uu'}^2 - S_{uu} S_{u'u'}}}.$$

Der absolute Kegelschnitt ist der Ort der Punkte der Eb die unendlich grossen Abstand von einem gegebenen Punkt ha

Der Ort der Punkte der Ebene, die constanten Abst von einem festen Punkt (x) *haben, ist ein Kegelschnitt, wel den absoluten Kegelschnitt in den beiden Punkten berührt, welchen dieser von der Polaren von* (x) *geschnitten wird.*

Und correlativ:

Die Geraden, welche mit einer gegebenen Geraden (u) selben Winkel bilden, hüllen einen Kegelschnitt ein, der den soluten Kegelschnitt in den beiden Schnittpunkten des letzt mit (u) *berührt.*

Die Geraden, die sich auf dem absoluten Kegelsc schneiden, bilden den Winkel Null miteinander und sind d als parallel anzusehen.

Mithin:

Im Allgemeinen lassen sich von jedem Punkt zwei (reelle, imaginäre, zusammenfallende) Parallelen zu einer gegebenen Geraden ziehen.

Nimmt man an, der Kegelschnitt Σ sei *imaginär* und setzt $= iR_1$ und $R' = iR_1'$, *so ist die Länge jeder reellen Geraden Ebene endlich und gleich* $2R_1\pi$ *und die Summe der Winkel einem Strahlenbüschel* $2R_1'\pi$. *Setzt man dann noch* $R_1' = \frac{1}{2}$, erhält man die *Riemann'sche oder elliptische Geometrie.* rgl. § 2.

Nimmt man dagegen an, der Kegelschnitt Σ sei *reell* und zt wieder $R = iR_1$, $R' = iR_1'$ und $R_1' = \frac{1}{2}$, so ergiebt sich *Lobatschefskij'sche oder hyperbolische Geometrie.*

Wird schliesslich vorausgesetzt, der Kegelschnitt sei degenet und reducire sich als Enveloppe auf ein Punktepaar, so mmt man zu der *parabolischen Geometrie im weiteren Sinn,* lche sich auf die *Euclidische Geometrie* reducirt, wenn diese nkte die *(conjugirt imaginären) Kreispunkte* sind.

Hat man diese Principien für die Gebilde 2ter Stufe aufgestellt, bietet ihre Erweiterung auf die Gebilde 3ter Stufe, speciell auf n gewöhnlichen Raum keine weitere Schwierigkeit dar. In m letzteren ist *das absolute Gebilde eine Fläche* 2ter *Ordnung.* nachdem diese Fläche 2ter Ordnung imaginär oder reell aber it nicht reellen Erzeugenden oder (als Enveloppe) in einen enen Kegelschnitt und speciell den imaginären Kugelkreis degenert ist, erhält man *die drei Geometrien, die elliptische, hyperlische und parabolische* des § 2.

§ 5. Beltrami's Darstellung der nicht-Euclidischen eometrie auf Mannigfaltigkeiten der Euclidischen Räume.

Die Lobatschefskij'sche Geometrie fällt mit der Geometrie in nem Raum constanter Riemann'scher negativer Krümmung zummen, vergl. Kap. 20; *es genügt, an die Stelle der Geraden ie geodätischen Linien zu substituiren.*

Daher deckt sich ins Besondere die *ebene Lobatschefskij'sche der hyperbolische Geometrie* mit der Geometrie auf einer Fläche on constanter negativer Krümmung in unserem gewöhnlichen aum, vergl. Kap. 16, § 11, S. 496; aus diesem Grund wird die bene Lobatschefskij'sche auch *pseudosphärische Geometrie* genannt.

Wie schon in § 2 gesagt wurde, hatte Lambert bereits m Jahr 1766 bemerkt, dass die aus der sogenannten *Hypo-*

these des spitzen Winkels abgeleitete Geometrie sich auf ei Kugel mit imaginärem Radius interpretiren lasse; weiter ha dann Minding, *Crelle*, 19, 1839; 20, 1840 gezeigt, dass trigonometrischen Formeln in Bezug auf die pseudosphärisc Dreiecke sich aus den Formeln für die sphärischen Drei ergeben, wenn man R durch $R\sqrt{-1}$ ersetzt (vergl. S. 49 später hatte sich Codazzi, *Ann. di Tortolini*, 1857 mit d selben Gegenstand beschäftigt; es war jedoch Beltrami, *Gio di Batt.*, 4, 1868, der zuerst die wahre Bedeutung dieser l ziehungen auf elegante Art nachwies. In einer späteren Arb *Ann. di mat.*, (2), 2, p. 261, dehnte Beltrami die Betra tungen, die er vorher nur für die Ebene angestellt hatte, a auf die Räume von drei Dimensionen aus.

Die Constante R, welche in die Formeln der Lobatschefs schen Geometrie eingeht (siehe § 2), *ist so nichts Anderes, die Quadratwurzel aus dem reciproken Werth der Krümm jenes gekrümmten Raums, in dem sich diese Geometrie interp tiren lässt.*

Was die ebene *Riemann'sche* oder *elliptische* Geometrie geht, so zerfällt sie, wie wir schon in § 2 bemerkt haben, zwei Unterabtheilungen, von denen *nur eine* auf der *Ku* interpretirt werden kann; die andere dagegen entspricht imn der Geometrie auf einer *Fläche constanter positiver Krümmu* die aber einen anderen *Zusammenhang* hat, als die Kugel. Si darüber die Betrachtungen von Klein in seinen schon citir Vorlesungsheften, VI, Hft. 1, p. 243—293 und unsere Anga auf S. 626.

§ 6. Vollständiges Axiomensystem der Geometrie.

Bisher haben wir uns in diesem Kapitel mit der Fr über die Stellung, welche das Parallelenaxiom in der Geomet einnimmt, beschäftigt; diese Frage ist jedoch eigentlich nur e untergeordnete gegenüber der viel weitergehenden nach ein vollständigen System voneinander unabhängiger Axiome und Stellung dieser Axiome untereinander.

Sie wurde zuerst von M. Pasch in seinen *Vorlesun über neuere Geometrie*, Leipzig 1882 behandelt. Eine and sehr tiefgehende Behandlung dieses Problems verdankt man da Veronese, *Grundzüge der Geometrie*, deutsch von A. Schep

ipzig 1894. Veronese hat vor allen Dingen den Versuch nacht, eine von dem Archimedischen Axiom unabhängige Geo-trie aufzubauen.

Bei dieser Gelegenheit sei ferner auf die *Elementi di geometria* n Veronese, Verona-Padova, Fratelli Drucker, 1897, 2. Ausg., 01 hingewiesen, welche das erste für Mittelschulen bestimmte hrbuch der Elementargeometrie darstellen, das den heutigen nforderungen an eine strenge Begründung zu genügen sucht.

Ausser diesen eben citirten Werken wollen wir noch die lgenden Arbeiten, die sich mit den Axiomen beschäftigen, an-hren: Peano, *Sui fondamenti della geometria, Rivista di Matematica* 1894; Ingrami, *Elementi di geometria per le scuole condarie superiori*, Bologna 1899; Pieri, *Della geometria mentare come sistema ipotetico deduttivo, Mem. Acc. Torino,* 899. Ganz besonders sind aber die ausgezeichneten Unter-uchungen von Hilbert, *Grundlagen der Geometrie,* Leipzig 899 zu nennen, die jeder Mathematiker studiren sollte.

Hilbert theilt das von ihm verwandte Axiomensystem in nf Gruppen ein:

I. Axiome der Verknüpfung (die eine Verknüpfung zwischen den Begriffen: Punkt, Gerade, Ebene darstellen),

II. Axiome der Anordnung (die den Begriff „zwischen" definiren und auf Grund dieses Begriffs die Anordnung der Punkte auf einer Geraden, in der Ebene und im Raum ermöglichen),

III. Axiom der Parallelen,

IV. Axiome der Congruenz,

V. Axiom der Stetigkeit oder Archimedisches Axiom.

Die erste Gruppe umfasst 7, die zweite 5, die dritte 1, die vierte 6, die fünfte 1 Axiom.

Um einen Begriff von diesen Axiomen zu geben, führen wir einige von ihnen in Hilbert's Nummerirung und Fas-sung an:

I_1. *Zwei von einander verschiedene Punkte bestimmen stets eine Gerade.*

I_2. *Irgend zwei von einander verschiedene Punkte einer Geraden bestimmen stets diese Gerade.*

I_7. *Auf jeder Geraden gibt es wenigstens zwei Punkte, in jeder Ebene wenigstens drei nicht auf einer Geraden gelegene Punkte, im Raum gibt es wenigstens vier nicht in einer Ebene gelegene Punkte.*

II_1. *Wenn A, B, C Punkte einer Geraden sind, und zwischen A und C liegt, so liegt B auch zwischen C und*

Wir heben dann nur noch *das Archimedische Axiom* Hilbert's Fassung hervor:

V. *Es sei A_1 ein beliebiger Punkt auf einer Geraden zwisch den beliebig gegebenen Punkten A und B; man co struire dann die Punkte A_2, A_3, A_4, ... so, dass zwischen A und A_2, ferner A_2 zwischen A_1 und ferner A_3 zwischen A_2 und A_4, u. s. w. liegt, und überd die Strecken*

$$AA_1,\ A_1A_2,\ A_2A_3,\ A_3A_4, \ldots$$

einander gleich sind; dann gibt es in der Reihe der Puni A_2, A_3, A_4, ... stets einen solchen Punkt A_n, dass zwischen A und A_n liegt.

Ueber die Geschichte dieses *Archimedischen Axion* das schon auf ältere Geometer zurückzuführen ist, vergleic M. Cantor, *Gesch. der Math.*, 1, p. 229; ferner O. Stolz, *Ma Ann.*, 22.

Hilbert hat für seine in den Gruppen III, IV, V enth tenen Axiome ihre Unabhängigkeit von den übrigen nachgewi fen. Statt der Hilbert'schen Axiome kann man auch ande zu Grund legen, wie wir z. B. über verschiedenartige Fassung des Parallelenaxioms schon in § 2 gesprochen haben.

Es empfiehlt sich, mit den Hilbert'schen Untersuchung die hervorragende Abhandlung von F. Schur, *Ueber die Grun lagen der Geometrie, Math. Ann.*, 55 zu vergleichen. M findet dort eine andere Fassung der Axiome und unter Andere auch den Nachweis, dass sich die Hilbert'schen Axiome d Gruppen I und II noch reduciren lassen (*Math. Ann.*, 5 p. 271).

Von den durch diese Untersuchungen erzielten Resultat sei vor Allem hervorgehoben, dass der Aufbau der projectiv Geometrie, vorzüglich der Beweis des Fundamentalsatzes:

„Eine projective Beziehung zwischen zwei Geraden dadurch bestimmt, dass drei Punkten der einen Geraden d Punkte der anderen als entsprechend zugewiesen werden",

unabhängig von dem Parallelenaxiom (v. Staudt, *Geometr der Lage;* Klein, *Math. Ann.*, 4, 6) und unabhängig von de Archimedischen Axiom (F. Schur, *Ueber den Fundamentalsa der projectiven Geometrie, Math. Ann.*, 51) ist. Durch Hilbert i

strenge Nachweis geführt, dass man den Fundamentalsatz ht lediglich mit Hülfe der Axiome der Verknüpfung und ordnung, die man als projective Axiome bezeichnet, beweisen n; entweder muss man zu den erwähnten Axiomen noch sämmtie Congruenzaxiome oder das Axiom des Archimedes in seiner jectiven Fassung hinzunehmen (Kap. VI der Hilbert'schen undlagen).

Auch die elementare Proportionslehre der Euclidischen Geotrie ist, wie diese Untersuchungen lehren, von dem Archidischen Axiom unabhängig. Dies geht schon aus den Unterhungen von Schur in seinem *Lehrbuch der analytischen ometrie,* Leipzig 1898 hervor, ist aber vorzüglich von Hilbert, c. dargethan worden.

Bezüglich der Fragen dieses Paragraphen sei auch noch f die Schriften von F. Klein, *Zur ersten Vertheilung des batschefskij-Preises, Math. Ann.,* 50 und auf Hölder, *Anauung und Denken in der Geometrie,* Leipzig 1900 verwiesen.

Auf die Verwerthung des Archimedischen Axioms in seiner jectiven Fassung zum Beweis des Fundamentalsatzes hat ein in dem eben citirten Aufsatz hingewiesen. (Vergl. auch hur, *Math. Ann.,* 51, p. 402; 55, p. 274).

Man kann den Fundamentalsatz auch mit Hülfe der Axiome r Anordnung und Verknüpfung beweisen, wenn man noch ein iom über Punkte, die durch Grenzprocesse definirt sind, herizieht. Diesem Axiom kann man etwa folgende Form geben: *der Punkt, der durch einen convergenten unendlichen Process finirt wird, soll wirklich existiren. (Axiom von Georg ntor, Math. Ann.,* 5. Vergl. F. Klein, *Math. Ann.,* 6.)

Namenregister.

Wir machen darauf aufmerksam, dass das Jahrbuch über Fortschritte der Mathematik seit dem Jahr 1868 über alle Ersch nungen der mathematischen Literatur berichtet und daher ein s wichtiges, fast unentbehrliches Hülfsmittel darstellt.

Die Zahlen, vor denen ein S. steht, beziehen sich in dies Register, wie in den folgenden, auf die Seiten des Textes. Auf hinter dem Wort „ausserdem" aufgeführten Seiten ist der Name Autors ohne Angabe einer seiner Schriften citirt.

Abel (1802—1829), Crelle, 3, S. 534; ausserdem S. 267, 306.
Aeschlimann, Zur Theorie der ebenen Curven 4ter Ordnung, Dis tation, Zürich 1880, S. 199.
Affolter, Grunert's Archiv, 56, S. 289.
Agnesi, *Maria Gaetana* (1718—1799), Istitutioni analitiche ad della gioventù Italiana, Milano 1748, S. 529; ausserdem S. 527
Ameseder, Crelle, 97, S. 407; Wiener Berichte, 37, S. 259.
Amodeo, Monografia sulle curve tautocrone, Avellino 1883, S. 5 Acc. Napoli, 1896, S. 156; Ann. di mat., 21, 24, S. 156; Giorn. mat., 25, 1885, S. 176; Lincei, 1893, S. 156.
Ampère (1775—1836), Ann. de chim. et phys., 39, 1828, S. 311; aus dem S. 502.
Aoust, Ann. di mat., (1), 6; (2), 2, 3, 5, S. 507; Crelle, 58, S. 50
Apollonius (c. 200 v. Chr.), S. 93.
Appell, Americ. Journ., 10, S. 503; Compt. Rend., 1876, S. 264.
Appell-Goursat, Fonct. algébr., Paris 1895, S. 573.
Archimedes (287—212 v. Chr.), S. 544, 566, 567, 636.
Armenante (1844—1878), Ann. di mat., (2), 4, 1870, S. 242, 369; Acc. Lincei, (2), 3, 1876, S. 175; Giorn. di mat., 11, 12, S. 26
Aronhold (1819—1884), Berl. Monatsber., 1864, S. 198, 199; aus dem S. 304.
Artzt, *A.*, Untersuchungen über ähnliche Punktreihen auf den Sei eines Dreiecks etc., Recklinghauser Programmabhandlung, 1 S. 73; Untersuchungen über ähnliche Dreiecke, die einem fes Dreieck umschrieben sind, etc., Recklinghauser Programmabha lung, 1886, S. 73.
Aschieri, Giorn. di Batt., 8, S. 402; Mem. Ist. Lomb., 1883, S. 3 Rend. Ist. Lomb., 1879, S. 388, 405.
August, *Friedrich*, Disquisitiones de superficiebus tertii ordi Dissert., Berlin 1862, S. 278, 280, 291.

Bacharach, Math. Ann., 26, S. 129.
Baecklund, Lunds Univ. Årsskrift, 19, 1883, S. 495; Math. Ann., 9, S. 495.

litrand, Journ. de Longchamps, 1893, S. 543.
ltzer (1818—1887), Analytische Geometrie, Dresden 1882, S. 47, 125; Elemente der Mathematik, 2 Bde., 7. Aufl., Leipzig 1885, von Crenona ins Italienische übersetzt, Genua 1881, bereits in 3. Aufl., S. 67, 564, 567, 618; Crelle, 73, S. 623; Leipziger Berichte, 1870, S. 623; Monatsber. der Berl. Ak., 1861, S. 564; vergl. auch Möbius.
ttaglini (1826—1894), Acc. Napoli, 1863, S. 16; 1864—1868, S. 57; Atti Acc. Napoli, 3, 1866, S. 378, 392; ib., 4, 1868, S. 378; ib., 1879, S. 176; ib., 1880, S. 173; Giorn. di mat. di Battaglini, 4, 1866, S. 543; ib., 6, S. 378, 392; ib., 7, 10, S. 378; ib., 12, S. 405, 620; ib., 16, S 620; ib., 19, 1881, S. 176; ib., 21, 22, S. 173; Mem. Acc. Lincei, (3), 9, 1880, S. 173; ib., (4), 4, 1887, S. 176; Rend. Acc. Napoli, 1862, S. 71; ib., 1866, S. 378; ib., 1869, 1870, S. 378; ausserdem S. 379, 382, 389, 393, 394, 402; vergl. auch *Lobatschefskij.*
ule, Dissertation, Göttingen 1872, S. 268.
uer, Gustav, Abh. der Münch. Akad., 1883, S. 284.
ur, G. W., Schlömilch's Zeitschr., 12, S. 71.
aune, de, Florimond vergl. *Descartes.*
ez, Math. Ann., 7, S. 612; Schlömilch's Zeitschr., 20, S. 605; ib., 21, S. 605, 612; ib., 24, S. 612; ausserdem S. 607.
llavitis (1803—1880), Sulla classificazione delle curve di terzo ordine, Memorie della Società italiana delle scienze, Bd. 25, 2. Thl., Modena 1851, S. 188; Esposizione del metodo delle equipollenze, ib., 25, 1854, in das Französische übersetzt von Laisant, Paris 1874, S. 544; Atti Ist. Veneto, 1852, S. 181.
ltrami, Eugenio (1835—1900), Saggio di una interpretazione della geometria non-euclidea, Giorn. di Batt., 6, 1868, franz. von Houël, Ann. de l'Éc. norm., 6, 1869, S. 496, 620; Ricerche di analisi applicata alla geometria, Giorn. di Batt., 2, 3, S. 511; Dalle variabili complesse sopra una superficie qualunque, Ann. di mat., (2), 1, 1867, S. 475; Teoria generale dei parametri differenziali, Mem. Acc. Bologna, (2), 8, 1869, S. 475; Zur Theorie des Krümmungsmasses, Math. Ann., 1, S. 475; Risoluzione del problema, riportare i punti di una superficie sopra un piano in modo che le geodetiche vengano rappresentate da linee rette, Ann. di mat., (1), 7, 1865, S. 491, 496, 504; Sulle proprietà generali delle superficie d'area minima, Mem. della Acc. di Bologna, (2), 7, 1868, S. 502; Ann. di mat., (2), 2, S. 608, 609, 610, 620, 634; ib., (2), 5, S. 608, 610; Acc. Bologna, 10, 1879, S. 335; Bull. des sciences math., 11, 1876, S. 584; Giorn. di Batt., 1, S. 71, 279, 235; ib., 2, S. 482; ib., 4, 1868, S. 634; Mem. Acc. Bologna, (2), 2, 1863, S. 71; ib., (3), 5, 7, 1875, 1877, S. 71, 72, 73; Rend. Ist. Lombardo, (2), 1, 1868, S. 254, 486; ib., 1879, S. 288; Rend. Acc. Lincei, 1889, S. 618; ausserdem S. 334, 492, 583, 619, 626, 627, 633.
erent, Th., S. 439.
ergstedt, Om regelytor af 6. graden, Dissert., Lund 1886, S. 361.
ernoulli, Jacob (1654—1705), Acta Erudit., 1691, S. 545; ib., 1694, S. 532; Mém. de l'Ac. de Paris, 1703, 1705, S. 552; ausserdem S. 519, 531, 535, 542, 549.
ernoulli, Johann (1667—1748), Acta Erudit., 1692, S. 554.
ertini, Ann. di mat., (2), 12, S. 289; ib., 22, S. 156; Atti Acc. di Torino, 1887, S. 582; Collect. math. in memor. D. Chelini, Me-

diolani 1881, S. 267; Ist. Lombardo, 1889, S.162; ib., 1898, S. 3
Math. Ann., 34, 35, S. 129; ib., 44, S. 161; Rend. Acc. Lin
1879, 1880, S. 416; ib., (5), 10, 1901, siehe die Berichtigung
Rend. Ist. Lomb., 1886—87, S. 578, 582; ib., 1872, S. 263; ib.,
24, 1891, S. 129; ib., (2), 15, 1882, S. 142; Rend. Lincei, 1
S. 588; ausserdem S. 262.
Bertrand (1822—1900), Crelle, 8, S. 460; ib., 15, S. 461.
Berzolari, Ann. di mat., 13, S. 321; ib., 20, S. 264; ib., 21, S. 2
ib., 24, S. 212; Math. Ann., 21, S. 271; Mem. Lincei, 1893, S. 2
Rend. Acc. Lincei, 1896, S. 588; Rend. Palermo, 9, 1895, S. 23
Besant, Notes on Roulettes and Glisettes, Cambridge, 1870, S. 5
Nouv. Ann., 1871, S. 523.
Betti (1823—1892), Ann. di mat., (2), 4, 1870, S. 561, 562.
Bianchi, Lezioni di Geometria differenziale, Pisa 1894, deutsch
Max Lukat: Vorlesungen über Differentialgeometrie, Leipzig 1
S. 469, 470, 474, 475, 512, 550, 603, 608, 614; Dissertation, P
1879, S. 494; Ann. di mat., (2), 13, 14, S. 507; ib., 15, S. 410,
512; ib., 18, 19, S. 507; ib., 24, S. 615; ib., (3), 2, S. 496,
615; Atti Acc. Torino, 1895, S. 615; Giorn. di Batt., 20, S. 4
ib., 21, S. 507; ib., 22, S. 507; Math. Ann., 16, S. 494, 496;
38, 40, 42, S. 616; Mem. della Soc. It. delle scienze, (3), 11, 1
S. 611; Mem. Acc. Lincei, (4), 4, 1887, S. 507, 616; Rend. A
Lincei, 1885, 1886, S. 507; ib., (4), 4, 1887, S. 616; ib., 1888, S. 6
ib., 1890, S. 507; ib., 1892, S. 496; ib., 1893, S. 616; ib., 7, 1
S. 607, 608; ib., 1899, S. 496; ib., Dec. 1901, siehe die Beric
gungen; ausserdem S. 494, 495, 615, 616.
Bierens de Haan, Nouvelles tables d'intégrales définies, Leyden 18
siehe die Berichtigungen.
Biermann, O., Wiener Ber., 90, 1884, S. 564.
Binder, Theorie der unicursalen Plancurven 4ter bis 3ter Ordnung
synthetischer Behandlung, Leipzig 1896, S. 181.
Binet (1786—1856), S. 124.
Bischoff, Johann (1827—1893), Crelle, 56, S. 436.
Bobek, Wiener Akad., 93, S. 155; ausserdem S. 156.
Bobillier (1797—1832), Ann. de Gergonne, 18, 19, 1828, S. 140.
Bôcher, Die Reihenentwicklungen der Potentialtheorie, Leipzig 18
S. 328.
Böklen, Schlömilch's Zeitschr., 24, 25, 27, 1879—1882, S. 311.
Bohlmann vergl. *Serret.*
Bolyai, Johann (1802—1860), Appendix scientiam spatii absol
veram exhibens etc., (Anhang zu Wolfgang Bolyai's Tentamen e
Maros-Vásárhely 1832; siehe diesen Namen), deutsch frei bearb.
J. Frischauf, 1872; ital. von Battaglini, Giorn. di Batt., 6; fra
von Houël, 2. éd., Paris 1895, S. 619; ausserdem S. 582, 618, 6
620, 621, 624, 627.
Bolyai, Wolfang (1775—1856), Tentamen juventutem studiosam
elementa mateseos purae elementaris ac sublimioris methodo
tuitiva introducendi, Maros-Vásárhelyini 1832, 2. Ausg., Budap
(auch Leipzig) 1897, S. 619; siehe auch *Johann Bolyai* u
Gauss.
Bomie, Mém. de l'Ac. de Paris, 1712, S. 550.
Bonnet (geb. 1819 etwa), Compt. Rend., 1853, S. 502; Journ. de l'

ol., 32, 1848, S. 461; ib., 33, 1853, S. 486; ib., 61, 62, S. 490; ausserdem S. 481, 484, 490, 496, 497, 498, 499, 601.
rchardt (1817—1880), Crelle, 83, S. 302.
ubals, Journ. de math. élém. de Longchamps, 1891, S. 71.
ur (1832—1866), Journ. de l'Éc. pol., 59, 1861, S. 490; ausserdem S. 489.
etschneider, Dissert., Erlangen 1875, S. 202.
eusing, A. (1818—1892), Das Verebenen der Kugeloberfläche etc., Leipzig 1892, S. 247.
ianchon (geb. 1785), S. 60, 76, 416.
ianchon und *Poncelet*, Ann. de Gerg., 11, 1820, S. 71.
ill, Ludwig, Catalog math. Modelle etc., Darmstadt 1892; die Sammlung ist jetzt im Besitz von Schilling in Halle, S. 280, 308, 312, 327, 331, 335, 345, 495, 502, 568.
ill, Alexander, Crelle, 65, S. 201; Math. Ann., 4, S. 153; ib., 6, S. 155, 201; ib., 7, S. 155; ib., 10, S. 434; ib., 12, S. 203; ib., 13, S. 141; ib., 26, S. 614; ib., 31, S. 155; ib., 36, S. 271; Münch. Abh., 1883, S. 486; Quart. Journ., 27, 1895, S. 583, 584; ausserdem S. 154, 432.
ill, A. und *Noether*, Ueber die algebraischen Functionen und ihre Anwendung in der Geometrie, Math. Ann., 7, S. 150, 151, 156, 160; Gött. Nachr., 1873, S. 151; Jahresber. der Deutsch. Math.-Ver., 3, 1892, 1893, S. 156; ausserdem S. 152, 160.
ioschi (1825—1897), Ann. di mat., (2), 1, S. 507; ib., (2), 7; (2), 24, 1896, siehe die Berichtigungen; Ann. di scienze mat. e fis. di Tortolini, 4, 1853, S. 486; Atti Acc. Lincei, (2), 3, 1875—76, siehe die Berichtigungen; Math. Ann., 4, S. 201
ocard, Notes de bibliographie des courbes géométriques, Bar le Duc 1897, lithogr. mit Supplement, 1899, S. 523, 530, 531, 533, 542, 545, 547, 555; Ann. de Toulouse, 1887, S. 72; Bull. de Darboux, 1879, 1. Thl., S. 553; Bull. de la Soc. math., 1872, 1877, S. 72; Catalan, Nouv. Corresp. math., 2, 1876, S. 522; ib., 3, 1877, 1879, 1880, S. 72; Journ. des math. spéciales, 1889, S. 72; Nouv. Ann., 1886, S. 547; ausserdem S. 67, 68, 69, 70, 71.
ückner, Max, Vielecke und Vielflache, Theorie und Geschichte, Leipzig 1900, S. 567.
unel, Math. Ann., 19, S. 601.
rkhardt, Gött. Nachr., 1892, S. 287.

hen, Nouv. Ann., 1875, S. 543.
ntor, Moritz, Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik, 3 Bde., Leipzig 1892—1898, S. 525, 527, 538, 540, 542, 617, 636.
ntor, Georg, Acta math., 2, S. 583; Crelle, 84, S. 583; Math. Ann., 5, S. 637.
porali (1855—1886), Doctordissertation, Ann. di mat., 7, S. 349; Piani e punti singolari d. superf. di Kummer, Mem. Acc. Lincei, (3), 2, 1878, S. 303, 393, 414; Collectanea mathematica in memoriam D. Chelini, Mailand 1881, S. 148; Mem. Acc. Lincei, 1877—1878, S. 388; Rend. Acc. Napoli, 1879, S. 416; ausserdem S. 303.
rnot (1753—1823), Sur la relation qui existe entre les distances respectives de cinq points quelconques pris dans l'espace, suivi d'un Essai des transversales, Paris 1806, S. 35; Géométrie de posi-

tion, Paris 1803, deutsch von Schumacher, S. 64, 88, 137; aus
dem S. 46; vergl. auch *Gauss*.
Cartesius siehe *Descartes*.
Casey, A sequel to the first 6 books of Euclid, containing an
Introduction to modern geometry with examples, London 1
auch französisch: Géom. élém. récente, Paris 1890, S. 72; Ma
sis, 1890, S. 73; Phil. Trans., 161, 1871, S. 321, 328; Quart. Jo
4, 1860, S. 71; Trans. Irish Ac., 1866, S. 423; ib., 24, 1869, S.
ib., 1886, S. 73; ausserdem S. 320, 321.
Casorati (1835—1890), Acta math., 14, S. 487.
Caspary, Compt. Rend., 1891, S. 297.
Cassini (1625—1712), S. 519, 531.
Castelnuovo, Atti Acc. Torino, 36, 1901, siehe die Berichtigun
Atti Ist. Veneto, 1887, S. 589; ib., 1891, S. 584; Math. Ann.,
S. 370; ib., 48, S. 370; Mem. Acc. Torino, 1891, S. 147; Rend.
Lincei, 1889, S. 150, 578; ib., 1894, S. 333, 371; ausserdem S.
Castelnuovo und *Enriques*, Math. Ann., 48, S. 223, 239, 371,
Compt. Rend., 1895, S. 371.
Castilioneus, J. (1708—1791), siehe *Newton*.
Catalan, Acta math., 15, S. 487; Mém. de Belgique, 49, 1891, S.
Cauchy (1789—1857), Exercises mathématiques, 5, Paris 1830, S.
Compt. Rend., 11, 12, 18, S. 311; ib., 24, 25, 1847, S. 582; Jo
de l'Éc. pol., 1813, S. 564.
Cavalieri (1598—1647), S. 62.
Cayley (1821—1895), Collected mathematical papers, 13 Bde. und
Indexband, Cambridge 1889—1898, S. 141, 153, 181, 208, 212,
218, 219, 225, 227, 238, 245, 247, 267, 296, 298, 299, 300, 311,
364, 365, 375, 582, 583; Mem. on Cubic Surfaces, Lond.
Trans., 159, 1869, S. 222, 272, 280, 345, 395; An elementary trea
on elliptic functions, Cambridge and London 1876, S. 535; On
curves which satisfy given conditions, Lond. Phil. Trans.,
1858, S. 141; On the quartic surfaces $(+)\ (u, v, w)^2$, Quart. Jo
of math., 10, 11, 1870, S. 298, 299, 326; On the rational tra
between two spaces, Proc. Lond. Math. Soc., 3, 1870 = Coll. m
papers, 7, p. 189, S. 212; Ann. di mat., (2), 1, S. 423; ib., 2, 1
S. 361; ib., 20, 1892, S. 311; Cambr. math. Journ., 2, S. 35; ib
1843, S. 128; ib., 4, 1845, S. 582; ib., 5, 1850, S. 263, 353, 3
ib., 7, 1852, S. 208, 364; Compt. Rend., 52, 1861, S. 297; ib.,
1862, S. 216, 267; ib., 58, 1864, S. 267; ib., 62, 1865, S. 155; ib.,
1890, S. 615; Crelle, 30, 1846, S. 582; ib., 64, S. 134, 334; ib., 65, S. 3
ib., 68, S. 199; ib., 73, S. 300; ib., 83, S. 302; ib., 87, S. 311;
111, S. 218; Journ. de Liouville, 9, 1844, S. 181, 279; ib., 10, 1
S. 225; ib., 11, 1846, S. 311; ib., 1849, S. 515; London Phil. Tra
147, 1857, S. 141, 181, 520; ib., 149, 1859, S. 199, 583, 619, 630;
151, 1861, S. 199; ib., 153, 1863, S. 365; ib., 154, 1864, S. 280, 3
ib., 158, 1868, S. 153, 435; Math. Ann., 3, S. 223, 239; ib.
S. 620; ib., 30, S. 129; Phil. Mag., 22, 1861, S. 241, 246;
1862, S. 280; ib., 25, 26, 1863, S. 486; ib., 1, 1864, S. 280, 2
Proc. of the London math. Soc., 1865, S. 131; ib., 1, 1866, S. 1
ib., 3, 1870, S. 158, 161, 238, 293, 296, 334, 335; ib., 4, S. 2
ib., 5, 1873, S. 334; Quart. Journ. of math., 3, 1860, S. 215, 3
ib., 5, 1862, S. 183, 215; ib., 1864, S. 353; ib., 7, 1865, S. 1

61; ib., 9, 1867, S. 361; ib., 10, 1870, S. 320; ib., 11, 1870, S. 134, 27, 486; ib., 11, 1871, S. 320; Transact. of Cambridge etc., 11, 865, S. 188, 375; ausserdem S. 46, 137, 146, 154, 158, 159, 187, 03, 214, 215, 221, 224, 237, 276, 300, 308, 309, 321, 323, 329, 32, 336, 337 u. ff., 360, 361, 362, 369, 375, 378, 387, 396, 432, 586, 93, 620, 627.

ley und *Salmon*, Cambr. math. Journ., 4, 1849, S. 280, 289; ib., , 1850, S. 263.

iro, Geometria intrinseca, Napoli 1896, deutsch von G. Kowalewski, orlesungen über natürliche Geometrie, Leipzig 1901, S. 462, 520, 47, 549, 605, 614; Mathesis, 2, S. 461; ib., 1882, S. 550; ib., 1890, . 72; Mem. Acc. Lincei, 6, 2. Thl., 1877, S. 568; Nouv. Ann., 885, S. 542; ib., 1887, S. 72; Riv. di mat., 2, 1868, S. 461.

a (Ende des 17., Anfang des 18. Jahrhunderts), S. 59.

sles (1796—1880), Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie, 1. éd., Paris 1837, 2. éd., ib., 875, deutsch von L. A. Sohncke, Geschichte der Geometrie hauptächlich mit Bezug auf die neueren Methoden, Halle 1839, S. 94, 24, 187, 246, 247, 254, 542; Traité de géométrie supérieure, Bruelles 1852, S. 46, 181; Traité de sections coniques, Paris 1865, S. 46; nn. de Gergonne, 18, 19, S. 246; Compt. Rend., 21, 1845, S. 535; ., 41, 1853, S. 148, 183; ib., 45, 1857, S. 254; ib., 52, 1861, S. 241, 47, 259, 345; ib., 54, 1862, S. 221, 259, 353, 361; ib., 1864, S. 16, 34, 435; ib., 1866, S. 16; ib., 1871—1877, S. 435; Corresp. math., , 1830, S. 387; Journ. de Liouville, (1), 4, 1839, S. 386, 387; ib., 2, 854, S. 254, 369; Mém. de Belgique, 6, S. 247; ausserdem S. 44, 5, 46, 54, 105, 182, 187, 247, 250, 251, 323, 363, 364, 430, 431, 32, 433, 434, 435, 436, 437, 439, 537, 588, 597.

ni, Giorn. di Batt., 27, 1889, S. 497.

istoffel (1829—1900), Ann. di mat., 10, S. 150; Berliner Abh., 868, S. 484; Crelle, 70, S. 474, 602, 603, 604; ausserdem S. 469, 80, 602, 603, 604.

ni, Ann. di mat., (3), 2, S. 304; Rend. Ist. Lomb., 1898, S. 304.

usen (1801—1885), Astr. Nachr., 1842, S. 535.

iraut (1715—1765), Recherches sur les courbes à double courbure, Paris 1731, S. 461; ausserdem S. 483.

bsch, *A.* (1833—1872), Vorlesungen über Geometrie, herausgeg. on Lindemann mit Vorwort von Klein, 2 Bde.; 1. Bd. Geometrie er Ebene; 2. Bd. die Flächen 1. und 2. Ordnung oder Classe und er lineare Complex, Leipzig 1875, 1891, S. 28, 46, 94, 123, 125, 29, 134, 153, 155, 161, 167, 173, 175, 181, 199, 241, 244, 247, 35, 617; Theorie der binären algebraischen Formen, Leipzig 1871, . 55, 57; Compt. Rend., 67, 1868, S. 223, 239; Crelle, 49, S. 282; b., 59, S. 281; ib., 63, S. 130, 181, 199, 268, 283; ib., 64, S. 130, 131, 41, 543; ib., 65, S. 241, 293; ib. 67, S. 334; ib., 68, S. 16, 369; b., 69, S. 242, 320; Gött. Abh., 14, 1868, 1869, S. 287; ib., 15, . 350; Gött. Nachr., 1872, S. 280; Math. Ann., 1, S. 171, 173, 175, 42, 293, 331, 350; ib., 2, S. 239, 242, 378, 382, 383; ib., 3, . 161, 349, 350; ib., 4, S. 280, 282; ib., 5, S. 242, 333, 369, 378, 81; ib., 6, S. 175, 434, 569, 570; ausserdem S. 173, 213, 295, 15, 317, 332, 334, 335, 379, 393; vergl. auch *Plücker*.

Clebsch und *Gordan*, Theorie der Abel'schen Functionen, Leip 1866, S. 199.
Clifford (1845—1879), On the classification of loci, Phil. Trans., 1 oder Math. Papers, p. 305, S. 152, 597; Proc. of the London m Soc., (7), 1876, S. 584; ausserdem S. 158, 598, 615; siehe a *Riemann*.
Codazzi (1824—1873), Ann. di mat., (2), 1, 4, 5, 1867—1873, S. 5 ib., (2),2, 1868, S. 470, 507; Ann. di scienze mat. e fis. di To lini, 8, 1857, S. 507, 634; Mémoire relatif à l'application des faces les unes sur les autres, Mém. prés. par divers sav. étr l'Ac. de Paris, 27, 1879, S. 490; ausserdem S. 614, 615.
Colson, *J.*, gest. 1760, siehe *Newton*.
Commandino siehe *Pappos*.
Conon = Konon aus Samos (300 bis 260 v. Chr. in Italien Alexandrien lebend), S. 544.
Cotes (1682—1716), Harmonia mensurarum, Cambridge 1722, S. 1
Cramer (1704—1752), Introduction à l'analyse des lignes courbes al briques, 4 Bde., Genevae 1750, S. 134; ausserdem S. 140.
Cremona, Elementi di Geometria projettiva, Torino 1873, deut von Trautwetter, S. 46; Preliminari di una teoria geometrica d superficie, Bologna 1866 (Mem. Bologna, (2), 6, 7, 1866, 18 deutsch von M. Curtze: Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Ol flächen in synthetischer Behandlung, Berlin 1870, S. 53, 213, 228, 280, 283, 293; Introduzione ad una teoria geometrica d curve piane, Bologna 1862, auch in Mem. Acc. Bologna, 12, 1 deutsch von M. Curtze: Einleitung in eine geometrische Theorie ebenen Curven, Greifswald 1865, S. 134, 141, 143, 148, 183, 236, 435; Trasf. biraz. dello spazio, Rend. Ist. Lomb., 1 Acc. Bologna, 1861, S. 263; ib., 1872, S. 321; Ann. di mat., (1 S. 254; ib., (1), 2, S. 254; ib., (1), 5, S. 254; ib., (2), 1, S. 242, 369; (2), 5, S. 238; ib., 7, 1864, S. 143; Ann. di Tortolini, 4, S. 263; Ist. Lombardo, 1861, S. 273; Collectanea mathematica in me riam D. Chelini, Mediolani, 1881, S. 346, 370; Compt. Rend., 1862, S. 353, 407; (ib.), 1864, S. 435; ib., 69, S. 435; Crelle, 58, S. ib., 60, S. 254, 273, 280, 441; ib., 63, S. 254, 334; ib., 64, S. ib., 68, erhielt den halben Steiner-Preis (vergl. *Sturm*) und ist a in der deutschen Uebers. der Grundzüge einer allg. Th. d. Ob von Cremona enthalten, S. 280, 283, 289; ib., 69, S. 241; Gi di Batt., 1, 3, S. 161; ib., 8, S. 388; Gött. Nachr., 1871. S. Math. Ann., 4, S. 201, 238, 349; ib., 13, S. 287; Mem. Acc. logna, 8, 1868, S. 345; ib., 2, 1863, S. 161; ib., 5, 1865, S. 1 ib., 1871, 1872, S. 238; Mem. Lincei, 1876, 1877, S. 254, Nouv. Ann., (2), 1, S. 254; Rend. Ist. Lomb., 1860, S. 280; 1867, S. 334; ib., (2), 1, 1868, S. 264; ib., 3, 1870, S. 289; (ib. 1871, S. 238, 289, 318, 320, 350; ausserdem S. 146, 157, 158, 236, 237, 250, 253, 259, 262, 283, 284, 288, 291, 292, 293, 295, 320, 334, 336, 337 u. ff., 351, 397, 398; siehe auch *Baltzer*.

Dandelin (1794—1847), Mém. de l'Ac. de Belg., 4, S. 519.
Darboux, Sur une classe remarquable de courbes et surfaces a briques, Paris 1873, 2. éd., ib., 1896, S. 328, 421, 423, 514, 540, 554; Leçons sur la théorie générale des surfaces, 4 Bde., P

887—1896, S. 423, 474, 491, 502; Leçons sur les systèmes rthog. etc., Paris 1898, S. 507; Ann. de l'Éc. norm. sup., 1865, . 328; ib., 1866, S. 328, 505, 507; ib., 1872, S. 328, 423; ib., 878, S. 507; ib., 1890, S. 496; Bull. des sciences math., 1871, . 349; ib., 1, p. 348, S. 98; ib., 2, 1880, S. 333; Compt. Rend., 864, S. 323; ib., 1877, 1881, S. 486; ib., 1883, S. 496; ausserdem . 320, 321, 325, 460, 480, 500.
dekind, S. 156; vergl. auch *Riemann*.
Jonquières siehe *Jonquières*.
la Goupillière siehe *Goupillière*.
lahire siehe *Hire*.
lambre (1747—1822), Connaiss. des temps, 1808, S. 65.
launay (1816—1872), Journ. de Liouville, 6, 1841, S. 502; ausserdem S. 497, 548.
l Pezzo siehe *Pezzo*.
l Re siehe *Re*.
rsch, Math. Ann., 7, S. 199.
sargues (1593—1662), Traité des sections coniques, Paris 1639, S. 77; ausserdem S. 14, 46, 47, 69, 77, 93, 513, 514, 515.
scartes (1596—1650), Discours sur la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences; plus la Dioptrique, les Météores et la géométrie, Leyden 1637, lateinisch mit Noten von Florimond de Beaune und Commentar von F. van Schooten, Lugd. Bat. (Lüttich) 1649 (der letzte Abschnitt enthält die Geometrie), S. 45, 93, 537; ausserdem S. 201, 325, 531, 536, 537, 542, 545, 564.
smoulin, Bull. de la Soc. math., 20, S. 403.
Vries siehe *Vries*.
ni, Ulisse, Ann. di mat., (2), 1, S. 486; ib., (1), 7, S. 502, 504; Giorn. di Batt., 2, S. 491; ib., 3, S. 496; Compt. Rend., 1865, S. 494; Mem. Soc. italiana dei quaranta, 3, 1869, S. 486; ausserdem S. 494, 550.
ino, Salvatore, Giorn. di Batt., 3, S. 353.
inostrates, griech. Mathem. zu Plato's Zeiten, etwa 360 v. Chr., S. 551.
iocles, griech. Mathem. von ziemlich unbestimmtem Zeitalter, jedenfalls vor 70 v. Chr. lebend, S. 527, 528.
ostor, Journ. des math. pures et appliquées, (2), 5, 1879, S. 568.
rach, Einleitung in die Theorie der cubischen Kegelschnitte, Leipzig 1867, S. 254; Math. Ann., 2, S. 375.
upin, Charles (1784—1873), Développements de géométrie pour faire suite à la géométrie pratique de Monge, Paris 1813, S. 478, 486; Application de Géométrie et de Mécanique à la Marine pour faire suite aux Développ. de géom. etc., Paris 1822, S. 328, 512; Ann. de Gerg., 14, S. 519; Corr. de l'Éc. polyt., 2, S. 124; ausserdem S. 46, 205, 320, 321, 323, 325, 327, 478, 505, 614. Vergl. auch *Malus*.
urège (1821—1893), Die ebenen Curven dritter Ordnung, Leipzig 1871, S. 181; Crelle, 75, 76, S. 188; Wiener Ber., 1880, S. 561.
urrande, Ann. de Gerg., 7, S. 72.
yck, W., Regulär verzweigte Riemann'sche Flächen und durch sie definirte Irrationalitäten, Dissert., München 1879, S. 573; Math.

Ann., 17, S. 573; ib., 20, S. 573, 574; ib., 32, S. 557, 561; 37, S. 561.

Eberhard, Crelle, 106, S. 568; Math. Ann., 36, S. 564.
Eckardt, Math. Ann., 5, 10, S. 279, 280; Schlömilch's Zeitschr. Math. u. Phys., 15, 1870, S. 543.
Eisenstein (1823—1852), Crelle, 30, 39, S. 535.
Emmerich, Die Brocard'schen Gebilde und ihre Beziehungen zu verwandten merkwürdigen Punkten und Kreisen des Dreie Berlin 1891, S. 73.
Engel, Urkunden zur nichteuklidischen Geometrie, 1. Lobatschef Leipzig 1899, S. 618; vergl. auch *Lie, Lobatschefskij* und *Stä*
Enneper (1830—1885), Elliptische Functionen, Theorie und Geschic 2. Aufl., Halle 1890, S. 525, 535, 552; Crelle, 94, S. 486; (Nachr., 1868, S. 494; Schlömilch's Zeitschr., 9, 1864, S. ausserdem S. 480, 494, 495, 500.
Enriques, Lezioni di geometria proiettiva, Bologna 1898, S. 46; M Ann., 48, S. 213, 371; ib., 52, S. 371; Rend. Lincei 1893, S. ib., 1898, S. 371; vergl. auch *Castelnuovo*.
Euclid (studirte zu Athen unter Plato, hielt um 300 v. Chr. mathematische Schule zu Alexandrien), Elementa ed. Heib in 5 Bänden, Leipzig 1883—1888, S. 617, 621; ausserdem S. 617, 621, 622, 633.
Eudoxus (408—355 v. Chr.), S. 552.
Euler (1707—1783), Introductio in analysin infinitorum, Lausar 1748, deutsch von Michelsen, Berlin 1788 und von Maser, B 1885, S. 124, 133, 187; Sur une contradiction apparente dan doctrine des courbes, Ac. de Berlin 1748, S. 134; Methodus veniendi lineas curvas etc., Lausannae et Genevae 1744, S. Recherches sur la courbure des surfaces, Mém. de Berlin, 1 S. 474; Acta Petrop., 1784, S. 543; Mém. de Berlin, 1753, auc Ostwald's Classikern, herausgegeben von Hammer, S. 64, 67; M de St. Pétersb., 1751, 1752, S. 535; Nova Acta Petrop., 1779, a in Ostwald's Classikern, herausgegeben von Hammer, S. 67; N Comm. Petrop., 4, 1752, S. 564; ib., 1761, S. 525; ib., 11, 1 S. 70; ib., 1766, 1781, S. 543; ausserdem S. 67, 213, 247, 477, 563, 564, 614. Siehe auch *Goldbach*.

Fagnano (1682—1766), Produzioni matematiche, 2 Bde., Pesaro 1 S. 525, 526, 534, 535.
Fano, Ueber Gruppen, insbesondere Gruppen von Cremona-Trans mationen der Ebene und des Raumes, Monatshefte für Math. Physik, 9. Jahrg., 1898; Atti Acc. Torino, 1894, 1895, 1896, S. Mem. Acc. Torino, (2), 50, 1901, S. 420.
Fermat (1608—1665), S. 546.
Feuerbach (1800—1834), Eigenschaften einiger merkwürdiger Pu des geradlinigen Dreiecks, Nürnberg 1822, S. 70; ausserdem S
Fiedler, W., Die darstellende Geometrie in organischer Verbind mit der Geometrie der Lage, 3. Aufl., 3 Thle., Leipzig 1883, 1 1888, S. 45, 46, 125. Vergl. auch *Salmon*.
Fink, Ueber windschiefe Flächen im Allgemeinen und insbeson über solche des 6. Grads, Tübinger Dissertation, auch im C

spondenzblatt für die Gelehrten- und Realschulen Württembergs, 1887, S. 361.
Lye St. Marie, Études analytiques sur la théorie des parallèles, Paris 1871, S. 620.
Lurier (1768—1830), citirt in Mathesis, 9, 1889, p. 139—141, S. 627. Siehe auch die Berichtigungen.
Lahm, Math. Ann., 7, S. 242.
Lanck, P., Ueber die Flächeninhalte und Bogenlängen von Fusspunktcurven und Rollcurven, Leipziger Diss., 1899, S. 516.
Lenet, Crelle, 17, 1852 = Doctordissert., Toulouse 1847, S. 462; ausserdem S. 459, 461, 601.
Lesnel, Augustin Jean (1788—1827), Mém. de l'Ac. de Par., 7, 1827, S. 311; ausserdem S. 308, 310, 311, 394, 403.
Lricke und *Klein,* Vorlesungen über die Theorie der automorphen Functionen, 1897, Abschn. 1, S. 616.
Lrischauf, Absolute Geometrie nach Johann Bolyai bearbeitet, Leipzig 1872, S. 620; Elemente der absoluten Geometrie, ib. 1876, S. 620; Elemente der Geometrie, 2. Aufl., ib. 1877, S. 620.
Lrobenius, Crelle, 79, S. 423; ib., 99, S. 198, 199.
Lrost, Quart. Journ., 10, S. 486.

Galilei (1564—1642), S. 541, 549.
Galois, Evariste (1811—1832), S. 573.
Ganter und *Rudio,* die Elemente der analytischen Geometrie, 1. Thl., der Ebene, 4. Aufl., Leipzig 1900, 2. Thl., des Raums, 2. Aufl., ib. 1899, S. 47.
Gauss (1777—1855), Werke, herausgeg. von der Kgl. Gesellsch. der Wissenschaften in Göttingen, Leipzig von 1873 an, S. 470, 474, 535, 618; Disquisitiones generales circa superficies curvas, der Kgl. Gesellsch. der Wissensch. in Göttingen überreicht am 8 Oct. 1827, abgedr. in den Comm. recent. soc. Gott., Bd. 6, (ad a. 1823—1827), 1828; sind auch in Bd. 4 der „Werke" enthalten und franz. in der Liouville'schen Ausg. der Monge'schen „Application etc."; eine deutsche mit Anmerkungen versehene Ausgabe von A. Wangerin ist in Ostwald's Classikern der exacten Wissenschaften, N. 57 erschienen, S. 470, 474, 490; Disquisitiones arithmeticae, Leipzig 1801, S. 535; Briefwechsel mit Wolfgang Bolyai, herausgeg. von Franz Schmidt und Paul Stäckel, Leipzig 1899, S. 618; Zusätze zu der im Jahr 1810 in Altona erschienenen Schumacher'schen Uebersetzung der Géométrie de position von Carnot, Paris 1803, S. 64; Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis ambientium, Hamburg 1809, S. 65; ausserdem S. 67, 247, 473, 476, 480, 482, 484, 486, 487, 534, 605, 606, 610, 611, 615.
Gegenbauer, Wien. Ber., 93, S. 259.
Geiser, Ann. di mat., 9, S. 141; Collectanea mathematica in memoriam D. Chelini, Mediolani 1881, S. 231; Crelle, 70, S. 318; ib., 73, S. 199; Math. Ann., 1, S. 196, 199, 290; ausserdem S. 200; vgl. auch *Steiner.*
Genocchi (1817—1889), Ann. di mat., (1), 6, S. 537; Ann. di Tortolini, 6. S. 519; Compt. Rend., 80, 1875, S. 537; Mathesis, 1884, S. 537; Nouv. Ann., 14, 1855, S. 537.
Gerbaldi, La superficie di Steiner studiata nella sua rappresentazione analitica mediante le forme ternarie quadratiche, Torino 1881,

S. 335; Mem. Torino, 1880, S. 254; Rend. Palermo, 7, S. 200; 8, S. 148.
Gerbaldi und *Schoute,* Rend. Palermo, 3, 1889, S. 52.
Gergonne (1771—1859), Ann. de Gerg., 4, 1813, 1814, S. 72; ib. 11, 14, S. 519; ib., 15, 1824, 1825, S. 519, 520, 564; ib., 18 S. 46; ausserdem S. 134, 512, 518.
Gerono (geb. 1799), S. 531, 535.
Giorgini, Mem. della Soc. it. delle scienze, 20, 1827, S. 44, 387.
Girard, Albert (starb 1633), S. 62, 484.
Godt, der Connex 1. Ordnung und 2. Classe, Dissert., Göttingen 18 S. 173, 174.
Göpel (1812—1847), Crelle, 35, S. 302; ausserdem S. 303, 304.
Goldbach's und *Euler's* Briefe, Corresp. math. et phys. de quelq célèbres géométres du 18me siècle, St. Petersburg 1843. Siehe Berichtigungen.
Gordan, Math. Ann., 5, S. 281; vergl. auch *Clebsch.*
Gordan und *Noether,* Math. Ann., 10, S. 143.
Goupillière, Haton de la, Intermédiaire des mathématiciens, Pa 1894, S. 555; Nouv. Ann., 1876, S. 546; ausserdem S. 546.
Gournerie, Maillard de la (1814—1883), Traité de géométrie descr tive, Paris 1862, 1864, S. 369; Recherches sur les surfaces régl tétraèdrales symétriques, Paris 1867, S. 369; Rech. des carac ristiques des systèmes élém. de courbes planes du 3me ordre, D sertation, Paris 1871, S. 440; Bull. de Darboux, 3, 1872, S. 4 Journ. de l'Éc. polyt., 23, 1863, S. 326; Journ. de Liouville (10, 1865, S. 326; ausserdem S. 324.
Goursat, Americ. Journ., 10, S. 503; vergl. auch *Appell.*
Graefe, Vorlesungen über die Theorie der Quaternionen, Leip 1883, siehe die Berichtigungen.
Graf, Beiträge zur Theorie der Riemann'schen Flächen, Dissertati Bern 1878, S. 569.
Grassmann, Hermann (1809—1877), Wissenschaft der extensiv Grösse oder die Ausdehnungslehre, 1. Theil, Leipzig 1844; Ausde nungslehre, vollständig und in strenger Form, Berlin 1862, S. 58 Crelle, 24, S. 140; ib., 49, S. 278, 280; ausserdem S. 183, 292. (V seinen gesammelten mathematischen und physikalischen Werk 3 Bde., ist bis jetzt Bd. I, 1, die Ausdehnungslehre von 18 und die geometrische Analyse, Leipzig 1894; Bd. I, 2, die Au dehnungslehre von 1862, ib. 1896 erschienen.)
Grassmann, Justus, Dissertation, Berlin 1875, S. 199.
Grebe (1804—1874), Das geradlinige Dreieck in Beziehung auf d Quadrate der Perpendikel, welche man von einem Punkt sein Ebene auf seine Seiten fällen kann, Grunert's Archiv 9, 1847, S. 6
Grunert (1797—1872), Crelle, 2, S. 564.
Guccia, Compt. Rend., 1888, S. 129; Rend. del circolo mat. di P lermo, 1, S. 232, 233; ib., 7, S. 148.
Gudermann (1798—1852), Lehrbuch der niederen Sphärik, Münst 1836, S. 67; Crelle, 6, S. 247.
Günther, Sig., Studien zur Geschichte der mathem. Geographie, Hal 1879, S. 553; Bibl. math., 1887, S. 542.
Guichard, Ann. de l'Éc. norm. sup., (3), 6, 1889, S. 512; ib., 189 S. 496; Compt. Rend., 1890, 1891, 1892, S. 512.

ndelfinger, Analytische Geometrie der Kegelschnitte, 1895, S. 94; vergl. auch *Hesse.*

ibich, S. 516.
chette (1769—1834), Éléments de géométrie à trois dimensions, Paris 1817, S. 247; Crelle, 8, S. 369; ausserdem S. 46, 124.
damard, Bull. de la soc. math. de France, 24, 1896. Siehe die Berichtigungen.
dley (1656—1742), Phil. Trans., 1696, S. 247; vergl. auch Menelaus.
lphen (1844—1889), Traité des fonctions elliptiques, 3 Thle., Paris 1886—1891, S. 97, 181, 259, 486, 552; Mémoire sur la classification des courbes gauches algébriques, Journ. de l'Éc. pol., 52, 1882 (von der Berl. Ak. 1882 preisgekrönt), S. 210, 211, 217, 220, 267; Bull. de la Soc. math., 1, S. 434; ib., 2, 1875, S. 435, 586; ib., 4, S. 504; ib., 5, S. 129; Compt. Rend., 74, 1872, S. 377; ib., 78, 80, S. 134; ib., 83, p. 537, 886, S. 434; Journ. de l'Éc. polyt., 45, S. 434; Journ. de math., (4), 5, 1889, siehe die Berichtigungen; Math. Ann., 15, S. 434; Mém. des sav. étrang., 26, S. 134; Proc. Lond. Math. Soc., 9, 10, S. 434; ausserdem S. 216, 218, 219, 433, 436, 503.
milton, W. (1805—1865), Irish Trans., 15, 1828; ib., 16, 1830; 17, 1837, S. 410, 512; Nouv. Ann., 1862, S. 70; ausserdem S. 71, 409, 509.
mmer, Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie, 2. Aufl., Stuttgart 1897, S. 67; vergl. auch *Ostwald* und *Euler.*
rnack (1851—1888), Math. Ann., 9, S. 576; ib , 10, S. 132; ib., 12, S. 259; vergl. auch *Serret.*
rt, S. 71.
skell, Dissertation, Baltimore 1890, S. 576.
aton siehe *Goupillière.*
zzidakis, Crelle, 88, S. 496.
eegard, S. 561.
iberg siehe *Euclid.*
elmholtz (1821—1894), Ueber die Thatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen, Gött. Nachr., 1868 oder Wissensch. Abh., 2, p. 618, S. 583, 620; ausserdem S. 620, 627.
enneberg, S. 500.
rmite, Charles (1822—1901), Sur quelques applications des fonct. ellipt., Paris 1885, siehe die Berichtigungen; Cours d'analyse de l'Éc. polyt., 2. Aufl., Paris 1883, S. 451; Crelle, 47, 52, 53, S. 45; ib., 82, S. 210.
esse (1811—1874), Vorlesungen über analytische Geometrie des Raums, 3. Aufl., rev. von Gundelfinger, Leipzig 1876, S. 47, 125, 247; Vier Vorlesungen aus der analytischen Geometrie, ib. 1866, S. 47; Sieben Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der Kegelschnitte, ib. 1874, S. 47; Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der geraden Linie, des Punkts und des Kreises in der Ebene, 3. Aufl., rev. von Gundelfinger, ib. 1881, S. 47; Ueber die Wendepunkte der Curven 3ter Ordnung, Crelle 38, S. 181; Crelle, 18, 20, S. 124; ib., 26, S. 124, 254, 256; ib., 28, S. 141, 181; ib., 36, S. 181, 199; ib., 40, S. 199; ib., 41, S. 141, 199; ib., 49, S. 195, 199; ib., 55, 59, S. 199; ausserdem S. 45, 52, 79, 137, 197, 200, 233, 235, 236, 280, 299.

Hessel (1796—1872), Crelle, 8, S. 564.
Hettner, Gött. Nachr., 1880, S. 570.
Hierholzer (1840—1871), Math. Ann., 2, 4, S. 297.
Hilbert, Ueber die reellen Züge algebraischer Curven, Math. An 38, S. 132; Grundlagen der Geometrie, Leipzig 1899, S. 583, 6 Mathematische Probleme, Nachr. der Kgl. Gesellsch. der Wissens zu Göttingen, 1900, S. 616, 635. Ausserdem S. 636, 637.
Hill, Americ. Journ., 19, S. 350; Math. Review, 1, S. 350.
Hire, de la (1640—1718), Mémoires sur les Epicycloides, Anc. M de l'Ac. de Paris, 1694, 1706, S. 543; ausserdem S. 93, 519.
Hirst (1830—1892), Collectanea mathematica in memoriam D. C lini, Mediolani 1881, S. 399; Proc. Lond. Math. Soc., 10, S. 3 ib., 14, S. 414, 420; ib., 16, 17, S. 420; Rend. Palermo, 1, S. 4
Hölder, Anschauung und Denken in der Geometrie, Leipzig 1900, S. 6
Hoffmann, Crelle, 48, S. 535.
Holzmüller, Einführung in die Theorie der isogonalen Verwan schaften, Leipzig 1882, S. 162.
Hooke (1635—1703), S. 247.
Hoppe, R. (1816—1900), Regelmässige linear begrenzte Figuren vier Dimensionen, Grunert's Archiv der Math., 67, 1882, S. 5 568; ib., 55, S. 424; ib., (1), 64, 1879, S. 561, 601; ib., 65, 18 S. 462, 561; ib., 70, 1883, S. 486; ib., 1885, 1889, S. 462; ib., 6, 11, 12, 1880—1892, S. 601; Crelle, 60, 63, S. 462.
l'Hospital (1661—1704), S. 519.
Houël (1823—1886), siehe *Lobatschefskij, Bolyai, Riemann, Beltra*
l'Huilier, Ann. de Gergonne, 3, 1812, S. 564.
Humbert, Compt. Rend., 1895, S. 359; Journ. de Math., (4), 9, S. 3 ausserdem S. 372.
Hunyady (1838—1889), Crelle, 92, S. 297.
Hurwitz, *Ad.*, Gött. Nachr., 1876, S, 434; Math. Ann., 28, S. 1 ib., 32, S. 571; ib., 38, siehe die Berichtigungen; ib., 39, S. 5 ib., 41, S. 571, 574.
Huyghens (1629—1695), Horologium oscillatorium, Paris 1673, S. 4 541; ausserdem S. 542, 549.

Ingrami, Elementi di geometria per le scuole secondarie superi Bologna 1899, S. 635.
Intrigila, Giorn. di Batt., 1885, S. 543.
Irmer, Ueber Strahlensysteme 3ter Ordnung mit Brenncurven, Dis tation, Halle 1870 (vergl. die Fortschritte der Mathem., 1 p. 611), S. 420.

Jacobi, K. G. J. (1804—1851), Vorlesungen über Dynamik, herausgeg. A. Clebsch, Berlin 1866, S. 507; Crelle, 3, S. 97; ib., 14, S. 4 ib., 15, S. 127, 211, 212; ib., 16, S. 461; ib., 19, S. 486; ausserd S. 143, 233, 235, 236.
Jellett, Journ. de Liouv., 18, S. 502.
Joachimsthal (1818—1861), Anwendung der Differential- und Integ rechnung auf die allgemeine Theorie der Flächen und der Lin doppelter Krümmung (Vorlesungen, nach seinem Tod erschien 3. Aufl., bearb. von Natani, Leipzig, 1890, S. 462, 553; Nouv. A 1847, S. 544.

lles, Theorie der Osculanten, Habilitationsschrift, Aachen 1886, S. 263.
nes, W. (1675—1749), siehe *Newton*.
nquières, Fauque de (geb. 1820), Essai sur la génération des courbes géométriques, Mém. prés. par divers sav. à l'Ac. de Paris, 16, 1858, S. 148; Crelle, 66, S. 153; Journ. de Liouville, 1851, S. 51; ib., 1857, S. 140; ib., 6, 1861; ib., 10, 1865, S. 436; Math. Ann., 1, S. 148; ausserdem S. 435; vergl. auch *Maclaurin*.
ordan, Camille, Traité des substitutions et des équations algébriques, preisgekrönt, Paris 1870, S. 287, 306; Bull. de la Soc. math., 3, S. 579, 583, 584; Compt. Rend., 79, 1874, S. 601, 614; Crelle, 66, 68, S. 568; ib., 70, S. 306, 568, 583, 584; ausserdem S. 287, 306, 310, 583.
uel, C., Ueber einige Grundgebilde der projectiven Geometrie, Acta math., 14, p. 1—30, S. 45.
Jung, Ann. di mat., 15, 16, S. 148; Ist. Lomb., 1888, S. 162; Rend. Lincei, 1886, S. 162.
unker, Dissertation, Tübingen 1889, S. 155.

Kantor, Seligmann, Curvenbüschel 3. und 4. O., Sitzungsberichte der Wiener Akademie, 79, 1879, 2, S. 203; ib., p. 768, S. 357; Rend. Ist. Lomb., 1894, S. 583.
Kasten, Dissertation, Göttingen 1876, S. 569, 570.
Kepler (*Keppler*) (1571—1631), Harmonices mundi libri V, Lincii (Linz) 1616, S. 567.
Kiehl, Bromberger Programmabh., 1881, 1882, S. 73.
Kiepert, Crelle, 75, S. 535; Schlömilch's Zeitschr. für Math., 17, 1872, S. 543.
Killing, Einführung in die Grundlagen der Geometrie, Paderborn Bd. 1 und 2, 1893, 1898, S. 583, 620, 626; Die nicht-Euclidischen Raumformen in analytischer Behandlung, Leipzig 1885, S. 614; Crelle, 109, S. 611; Math. Ann., 39, S. 615.
Kirkman (geb. 1806), Mem. Phil. Soc. Manchester, 1854, 1862, S. 568.
Klein, Felix, Ueber Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale; eine Ergänzung der gewöhnlichen Darstellung, Leipzig 1882, S. 570, 572; Autographirte Vorlesungshefte, V, Riemann'sche Flächen, 2 Hefte, W. S. 1891/1892, S. S. 1892, Leipzig, S. 572; ib., VI, Nicht-Euclidische Geometrie, 2 Hfte., W. S. 1889/90, S. S 1890, Leipzig, S. 496, 620, 627, 634; Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom 5. Grad, Leipzig 1884, S. 574; Ueber die Transformation der allgemeinen Gleichung des zweiten Grads zwischen Liniencoordinaten auf eine canonische Form, Inauguraldiss., Bonn 1868, abgedr. in Math. Ann., 23, S. 375, 378, 393, 395, 588; Zur ersten Vertheilung des Lobatschefskij-Preises, Math. Ann., 50, S. 637; Gött. Nachr., 1869, S. 380; Journ. de Liouville, 4, 1887, p. 169, S. 287; Math. Ann., 2, S. 300, 375, 378, 388, 389; ib., 4, S. 583, 620, 626, 630, 636; ib., 5, S. 302, 378, 614; ib., 6, S. 132, 283, 291, 583, 620, 626, 630, 636, 637; ib., 7, S. 378, 389, 576; ib., 10, S. 131, 199, 200, 576; ib., 11, S. 199; ib., 14, S. 573; ib., 22, 1883, S. 105, 378; ib., 37, S. 615; ausserdem S. 46, 152, 303, 328, 388, 391, 393, 403, 407, 575, 608, 625, 626. Vergl. auch *Clebsch*, *Möbius*, *Plücker*, *Fricke*.

Klein mit *Lie*, Bull. des sciences math., 1872, S. 545; Math. An 23, S. 306.
Klein mit *Noether*, Gött. Nachr., 1869, S. 388.
Kobb, G., Journ. de Liouv., 1892, S. 239.
Königs, Géom. réglée etc., Ann. de Toulouse 7, 1893, S. 389; Com Rend., 1889, S. 472.
Kötter, E., Die Entwicklung der synthetischen Geometrie von Mon bis auf Staudt (1847), Jahresberichte der deutsch. Mathematik ver., 1. Hft., 1898, 2. Hft., 1901, S. 125.
Kohn, G., Wiener Ber., 96, 1887, S. 280.
Korndörfer, Math. Ann., 1, S. 242, 320; ib., 2, S. 320; ib., 3, S. 27 ib., 4, S. 242.
Kowalewski, G., Ueber Fusspunktcurven von Ovalen mit Mittelpunl Leipz. Ber., 1901, S. 516; vergl. auch *Cesàro*.
Kraus, Math. Ann., 16, S. 153.
Krause, Robert, Math. Ann., 14, 1879, S. 176.
Kronecker (1823—1891), Berl. Ber., 1869, S. 612; Crelle, 92, S. 21 ausserdem S. 156, 333, 586.
Kücher, Grunert's Archiv, 47, S. 71.
Kuen, Münch. Ber., 1884, S. 494.
Küpper, Crelle, 55, 63, S. 526; ausserdem S. 156.
Kummer (1810—1893), Berl. Abh., 1866, S. 296, 300, 410, 411, 41 416, 419; Berl. Monatsber., 1859, 1860, S. 512; ib., 1862, S. 331; i 1863, S. 312, 331; ib., 1866, 1872, S. 331; Crelle, 57, 1860, S. 41 512; ib., 64, 1863, S. 312, 320, 331, 332; ausserdem S. 295, 2 299, 314, 328, 332, 334, 359, 409, 415, 418, 419.

Lacour, Sur la surface de Steiner et Réduction à la forme canoniq des formules qui donnent en fonction rationelle de deux par mètres les coordonnées d'un point de la surface de Steiner, Nou Ann. de math., (3), 1, 1898, S. 335.
Lacroix (1765—1843), S. 46, 124.
Lagrange (1736—1813), Journ. de l'Éc. pol., 6, 1799, S. 64, 67; Mé de Berlin, 1773, S. 35; Misc. Taur., 2, 1760, 1761, S. 501; ausse dem S. 247, 498, 627.
Laguerre (1834—1886), Bull. de la Soc. math., 7, S. 543; Nouv. An 12, 1853, S. 28, 628; ausserdem S. 324.
La Hire siehe *Hire*.
Laisant, Ass. Franç. Congrès de Toulouse, 1887, S. 549; siehe *Bellavit*.
Lambert (1728—1777), S. 247, 618, 622, 623, 624, 625, 633.
Lamé (1795—1870), Leçons sur la théorie des coordonnées curvilign et leurs diverses applications, Paris 1859, S. 506; Crelle, 2, S. 50 ib., 5, 16, S. 506; Mém. prés. par divers sav. étrang. à l'Ac. Paris, 5, 1833, S. 506; ausserdem S. 134, 505, 506, 604.
Lampe, De superficiebus 4. ordinis quibus puncta triplicia insu Dissert., Berlin 1864, S. 334, 345.
Lancret (1774—1807), Mém. prés. par des sav. étr. à l'Ac. de Pa 1, 1806, S. 461, 465; ib., 2, 1811, S. 461.
Landau, Dissertation, Berlin 1899; Bull. de la soc. math. de Fran 28, 1900; Compt. Rend., 1899; Crelle, 123; Gött. Nachr., 190 Math. Ann., 54. Siehe die Berichtigungen.
Landen (1719—1790), Phil. Trans., 1775, S. 526.

andsberg, Crelle, 114, S. 601.
ange, E., Die 16 Wendeberührungspunkte der Raumcurve 4. Ordn. 1. Species, Dissertation, Dresden 1882, S. 259; Schlömilch's Zeitschr., 28, S. 259.
aplace (1749—1827) siehe die Berichtigungen.
appe, Crelle, 71, S. 71.
azzeri, Atti Ist. Veneto, (6), 3, 1885, S. 173.
egendre (1752—1833), Sur les opérations trigonométriques, dont les resultats dépendent de la figure de la terre, Mém. de l'Ac. de Paris, 1787, S. 67; Traité des fonctions elliptiques et des intégrales Eulériennes, 3 Bde., Paris 1825—1832, S. 526, 535; Éléments de géométrie, Paris 1794 (die neueste Ausgabe ist von 1894), S. 564, 617; Mém. de l'Ac. de Par., 1833, S. 617; ausserdem S. 486, 502, 534, 622, 623.
eibnitz (1646—1716) (nach Pertz: Leibniz), Acta Erudit., 1692, S. 554; ausserdem S. 549.
emoine, Ass. Franç., 1873, 1874, S. 72; Bull. de la Soc. math., 12, 14, S. 72; Journ. de math. élém. de Longchamps, 1889, 1890, S. 71; Nouv. Ann., 1873, S. 72; ausserdem S. 67, 68, 69.
erch, Jornal de sciencias math. e astr., Porto 1901. Siehe die Berichtigungen.
eroy, Charles François Antoine (1780—1854), S. 124.
Levi, Ann. di mat., 26, S. 239.
Levi-Civita, Rend. Acc. Lincei, 1900, S. 511.
Lexell (1740—1784), Nova Acta Petrop., 1782, S. 67.
L'Hospital siehe unter *H.*
Libri (1803—1869), Crelle 10, S. 535.
Lie, Sophus (1842—1899), Bestimmung aller Raumcurven, deren Krümmungsradius, Torsionsradius und Bogenlängen durch beliebige Relationen verknüpft sind, Forhandlinger i Videnskab-Selskabet i Kristiania 1882, S. 462; Vorlesungen über continuirliche Gruppen mit geometrischen und anderen Anwendungen, bearb. von Scheffers, Leipzig 1893, S. 462, siehe auch die Berichtigungen; Theorie der Transformationsgruppen, unter Mitwirkung von Engel, 3 Abschn., Leipzig 1888, 1890, 1893, S. 170, 611, 620, 627; Geometrie der Berührungstransformationen, dargestellt von Sophus Lie und G. Scheffers, Leipzig 1896, S. 170; Archiv for Math., Kristiania 1879—81, S. 496; Bull. des sciences math., 4, S. 504; Compt. Rend,, 1870, S. 423; Gött. Nachr., 1870, S. 405, 407; ib., 1871, S. 613, 614; Leipz. Ber., 1886, 1890, S. 583; Math. Ann., 5, S. 379, 405, 423; ib., 14, 15, S. 502; ausserdem S. 328, 333, 391, 393; vergl. auch *Klein.*
Lieber (1835—1896), Programm der Stettiner Friedrich-Wilhelmschule 1886/87, Ueber die Gegenmittellinie und den Grebe'schen Punkt, Ueber den Brocard'schen Kreis, S. 73.
Ligin (*Liguine*), Bull. de Darboux, 1882, S. 537.
Lilienthal, Acta math., 11, S. 504.
Lindemann, Crelle, 84, S. 155, 210; ausserdem S. 617, 621; vergl. auch *Clebsch.*
Liouville (1809—1882), Compt. Rend., 17, 1843, S. 535; Journ. de Liouv., 8, 1843, S. 535; ib., 16, S. 488; ausserdem S. 472, 483, 486, 615; vergl. auch *Monge.*

Lipschitz, Acta math., 10, S. 504; Bull. de Darboux, 4, 1873, S. 60 604, 612; Compt. Rend., 1887, S. 504; Crelle, 70, 71, 72, 74, 8 S. 603, 604, 612; ib., 78, S. 615; ausserdem S. 607, 610.
Listing, Vorstudien zur Topologie, aus den Gött. Studien, 184 S. 561, 793; Census räumlicher Complexe, Gött. Abh., 10, 186 S. 561, 793; Gött. Nachr., 1867, S. 561, 793; ausserdem S. 562, 79
Lobatschefskij (1793—1856), Exposition des principes de la géom trie etc., der Universität Kasan überreicht 1826, S. 618; Ueb die Anfangsgründe der Geometrie, Kasaner Bote, 1829, 1830, S. 61 Neue Anfangsgründe der Geometrie mit einer vollständigen Theor der Parallelen, Acten der Universität Kasan, 1835—1838, die letzten Werke deutsch von Engel, Leipzig 1899, S. 618; Géométr imaginaire, Crelle, 17, S. 618; Geometrische Untersuchungen üb die Theorie der Parallellinien, Berlin 1840, franz. von Hou 1866, S. 618; Pangéométrie, Kasan 1855, auch ital. von Batt glini, Giorn. di Batt., 5, S. 618; ausserdem S. 582, 607, 618, 61 620, 621, 623, 624, 627, 633, 634.
Loewy, A., Crelle, 122, S. 588.
London, Math. Ann., 45, S. 268.
Longchamps, *G. de*, Essai sur la géométrie de la règle, Paris 189 S. 529; Compt. Rend., 1887, S. 530.
Loria, *Gino*, Il passato e il presente delle principali teorie geom triche, 2. ed., Torino 1896, nach der 1887 in den Mem. Acc. T rino erschienen Monographie deutsch von Fritz Schütte unter de Titel: Die hauptsächlichsten Theorien der Geometrie in ihr früheren und jetzigen Entwickelung. Historische Monographi Mit einem Vorwort von R. Sturm. Leipzig 1888, S. 125, 311, 32 379, 405, 435, 584; Le curve piane algebriche e transcendent teoria e storia. Saggio di geometria comparato del piano, Prei schrift. Deutsche Ausgabe von Fritz Schütte, in der Teubner'sche Sammlung math. Lehrbücher, unter dem Titel: Specielle alg braische und transcendente Curven in der Ebene; Theorie un Geschichte, Leipzig 1901, S. 555; Ann. di mat., 14, S. 320; At Acc. Torino, 1884, S. 405, 416, 423; ib., 1885, S. 416, 423; ib., 188 S. 416; Bibliotheca math., 1897, S. 529; Boll. di Bibliogr. dell scienze mat., 1898, S. 531; Giorn. di Batt., 23, S. 405; ib., 2 S. 616; Mem. Acc. Torino, (2), 36, 1884, S. 327, 328; Periodic di mat., 17, 1901, S. 517; Rend. Palermo, 16, 1902, S. 517; ausse dem S. 420, 421, 422, 517; vergl. auch *Segre* und *Zeuthen*.
Lüroth, Ueber Verzweigungsschnitte und Querschnitte, Math. Ann 4, S. 569, 570; Abbildung von Mannigfaltigkeiten verschieden Dimensionen, Sitzungsber. der physik.-med. Societät zu Erlange 1878, 1899, S. 583; Abh. der K. Bayer. Ak., München 1885, 188 S. 569; Crelle, 67, S. 369, 425; Erlanger Sitz.-Ber., 1883, S. 56 Math. Ann. 9, S. 370, siehe auch die Berichtigungen.
Lugli, Periodico di mat., 6, S. 73.
Lukat vergl. *Bianchi*.

Mackay, Ass. Franç., 1893, S. 72; Proc. of the R. Soc. of Edinburgh 9, 1890, S. 72; ib., 11, 1892; ib., 1893, S. 71; ausserdem S. 70.
Maclaurin (1698—1746), De linearum geometricarum proprietatibu generalibus tractatus, französisch von De Jonquières als Anhan

seiner Mélanges de géométrie pure, Paris 1856, S. 181; ausserdem S. 77, 93, 137, 179, 521, 527.
agnus (1790—1861), Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie der Ebene, Berlin 1833, S. 161; ausserdem S. 515.
aillard de la Gournerie siehe *Gournerie*.
ainardi (1800—1879), Giorn. dell' Ist. Lomb., 9, 1857, S. 470.
alus (1775—1812), Journ. de l'Éc. pol., 14, 1808, S. 512; ausserdem S. 511, 519.
alus-Dupin, S. 511, 518.
angoldt, v., Berl. Sitzungsber., 1897; Crelle, 119, siehe die Berichtigungen; Crelle, 94, S. 484.
annheim, Nouv. Ann. de math., 1860, S. 328; ib., 1878, S. 544; ausserdem S. 311.
ansion, Sur les principes fondamentaux de la géométrie, de la mécanique et de l'astronomie, Paris 1893, S. 620; Mathesis, 1895, S. 620; Revue des Questions scient., 1895, S. 621; Soc. scient. de Bruxelles, 14, 1889, 1890, S. 621; ib., 1895, S. 35.
ariotte (gest. 1684), S. 519.
aser vergl. *Euler*.
asoni, Dissert., Napoli 1882, S. 203; Rend. Acc. Napoli, 1883, S. 416.
athieu, Nouv. Ann. math., 1865, S. 515.
atthiessen, Ludwig, Acta math., 4, S. 410; Schlömilch's Zeitschr., 29, S. 410.
axwell (1831—1879), Quart. Journ., 9, 1867, S. 328.
enelaus (Mathematiker und Astronom, lebte zu Trajans Zeiten in Rom), Sphäricorum libri 3, latein. herausgeg. von Halley, Oxoniae (Oxford), 1707, S. 64; ausserdem S. 59.
ercator (1512—1594), S. 247.
erlieux, Nouv. Ann., 1842, S. 544.
ersenne, Pater (1588—1648), S. 541.
eusnier de la Place (1754—1793), Mém. prés. par des Savans Étrang. à l'Ac. de Paris, 1785, S. 474; ausserdem S. 478, 490, 499, 502.
eyer, Franz, Apolarität und rationale Curven, Tübingen 1883, S. 288. Siehe auch die Berichtigungen.
ichelsen (1749—1797) siehe *Euler*.
ilinowski (1837—1888), Elementar-synthetische Geometrie der Kegelschnitte; mit einem Anhang über die gleichseitige Hyperbel, 2. Ausg., Leipzig 1896, S. 527; Schlömilch's Zeitschr., 23, 1878, S. 194.
inding (1806—1885), Crelle, 18, S. 491; ib., 19, 1839, S. 490, 495, 634; ib., 20, 1840, S. 486, 495, 634.
öbius, Aug. Ferd. (1790—1868), Ges. Werke, auf Veranl. der Sächs. Ges. der Wissensch. 4 Bde. herausgeg. von Baltzer, F. Klein und Scheibner, Leipzig 1885—1887, S. 16, 181, 247, 556, 568; Der barycentrische Calcul, ein neues Hülfsmittel zur analytischen Behandlung der Geometrie, Leipzig 1827, S. 45, 254; Ueber eine neue Behandlungsweise der analytischen Sphärik, Abh. bei Begr. der Sächs. Ges. der Wissensch., 1846, S. 67; Lehrbuch der Statik, 2 Bde., Leipzig 1837, S. 251; Zur Theorie der Polyeder, Werke, 2, S. 556; Ueber die Bestimmung des Inhalts eines Polyeders, Leipz. Ber., 17,

1865, S. 556; Abh. der Sächs. Ges., 1848, 1849, S. 181, 188; Cre
3, p. 273, S. 251; ib., 9, 1832, siehe die Berichtigungen; ib.,
1833, p. 317, S. 251, 254, 387; Leipz. Ber., 14, 1862, S. 410; auss
dem S. 9, 17, 19, 34, 44, 45, 46, 406, 557.
Moivre (1667—1754), S. 247.
Mollweide (1774—1825), v. Zach's monatliche Corresp., 18, 1808, S.
Monge, Gaspard (1746—1818), Leçons de géométrie descriptive, P
1794, 6me éd., ib. 1837, deutsch von Schreiber, Freiberg 1822,
in deutscher Ausgabe in Ostwald's Classikern der exacten Wiss
schaften, Nr. 117 erschienen, S. 46, 369; Application de l'Anal
à la Géométrie, veröffentlicht Paris 1795 unter dem Titel: Feuil
d'Analyse appliquée à la Géométrie. Die letzte (5. Ausg.) wu
von Liouville, Paris 1850 besorgt und durch einen Anhang wer
voller Noten bereichert, S. 474, 486; Mém. des Sav. étr., 10, 17
S. 461; Journ. de l'Éc. pol., 2, 1799, S. 461; ausserdem S. 19,
121, 124, 207, 464, 476, 502, 512; vergl. auch *Dupin*.
Montesano, Sui complessi di rette di 2° grado generati da due fa
proiettivi di complessi lineari (separate Schrift), Napoli 1886 u
Rend. Acc. Napoli, 1886, S. 387, 393, 403; ib., 1888, S. 238, 267;
1895, S. 238; Atti Acc. Torino, 1892, S. 238, 410, 419; Giorn.
Batt., 1893, S. 238; Mem. Acc. Bologna, 1893, S. 238; Rend. A
Lincei, 1888, 1889, S. 238; ib., (5), 1, 1892, S. 410, 419; Re
Acc. Napoli, 1900, S. 346, 350; ib.. 1901, S. 350; Rend. Acc.
lermo, 7, 1893, S. 410, 419; Rend. Ist. Lomb., 1888, 1892; S. 2
ib., 1893, S. 238, 419.
Moutard, Nouv. Ann. de math., (2), 3, 1864, S. 328; ausserd
S. 320, 323, 514.
Müller, Math. Ann., 1, S. 254.
Mumelter siehe *Fischer*.
Muth, Theorie und Anwendung der Elementartheiler, Leipzig 18
S. 582.

Napier (Neper) (1550—1617), S. 61, 65.
Natani siehe *Joachimsthal*.
Neil (1637—1670), S. 527.
Neuberg, Ass. Franç., 1888, S. 72; Mathesis, 1885, S. 73; Mém.
Belg., 1884, S. 73; ib., 1890, S. 72; Nouv. Corr. math. de Catal
1879, 1880, S. 72.
Neuberg und *Tarry,* Ass. Franç., 1886, S. 73.
Neumann, Carl, Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'sch
Integrale, 2. Aufl., Leipzig 1884, S. 560.
Newcomb, Crelle, 83, S. 626.
Newton (1642—1727), Opuscula mathematica philosophica et phi
logica collegit partimque latine vertit et recensuit I. Castilione
3 Bde., Lausannae et Genevae 1744, S. 551; Analysis per qua
titatum series fluxiones et differentias cum enumeratione linear
tertii ordinis (1706), unter Aufsicht von W. Jones gedr., Lond
1711, S. 136, 181, 187; Method of fluxions and infinite series w
its application to the geometry of curved lines etc., edirt v
J. Colson, London 1736, S. 467; Arithmetica universalis sive
compositione et resolutione arithmetica liber (edirt von Whist
1. Ausg., Cambridge 1707), Lugd. Batav. 1732, S. 527, 540; Phi

sophiae naturalis principia mathematica, London 1686, S. 543; ausserdem S. 93, 140, 186, 528.
comedes (lebte um 200 v. Chr.), S. 536, 540.
ether, Zur Grundlegung der Theorie der algebraischen Raumcurven, Berl. Abh., 1883; Crelle 93, 1882, von der Berl. Ac. preisgekr., S. 217, 221; Acta math., 2, S. 217; Ann. di mat., (2), 5, S. 212, 238, 239; Berl. Sitzungsber., 1888, S. 239; Crelle, 93, S. 268; Erl. Ber., 1878, S. 162; Gött. Nachr., 1870, S. 239; ib., 1871, S. 161; Math. Ann., 2, 1869, S. 213, 223, 239, 242, 583; ib., 3, S. 158, 224, 238, 239, 350, 358, 359, 369, 370; ib., 5, S. 158, 161; ib., 6, p. 352, S. 129; ib., 8, 1874, S. 213, 223, 239; ib., 9, S. 161; ib., 11, S. 586; ib., 15, S. 199; ib., 20, 21, S. 570; ib., 29, S. 239; ib., 30, S. 129; ib., 33, S. 346, 370; ib., 46, S. 199; ausserdem S. 128, 156, 216; vergl. auch *Gordan, Brill, Klein.*
uñez (Nonius) (1492—1577), S. 553.

enrauch, Geschichte der darstellenden und projectiven Geometrie, Brünn 1897, S. 47.
agne, Maurice d', Compt. Rend., 97, 1883, S. 537; ausserdem S. 67.
ttingen, v., A. J. siehe *Steiner.*
ivier (1829—1876), S. 46.
thmann (1839—1885), Ueber tautochrone Curven und ihre Geschichte, Programm, Berlin 1872, S. 541.
twald's Classiker der exacten Wissenschaften, Leipzig bei Engelmann, S. 67, 247, 474.
vidio, E. d', Geometria analitica, Torino 1896, S. 47, 125; Ann. di mat., 7, S. 387; Atti Acc. Torino, 16, 1881, S. 387; ib., 1893, S. 616, 620; ib., 1891, 1892, S. 620; Atti Acc. Lincei, (2), 3, S. 387; Collect. math. in memoriam D. Chelini, Mediolani 1881, S. 254; Giorn. di Batt., 3, S. 353; ib., 8, S. 375; ib., 10, S. 375; ib., 11, S. 35, 375; ib., 17, S. 254; Math. Ann., 12, S. 579, 583; Mem. Acc. Lincei, 1875, 1876, S. 620; ib., 1877, S. 579, 583; Mem. Torino, (2), 32, 1879, S. 254.

ainlevé, Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles professées à Stockholm, Hermann, Paris 1897, S. 372; Compt. Rend., 1895, S. 371; ib., 126, 1898, S. 372.
ainvin (1826—1875), Bull. de Darboux, 1871, S. 403; Bull. des sciences math., 3, S. 435; Nouv. Ann. de Math. (2), 2, 1870, S. 543; ib., 1872, S. 403; ausserdem S. 394.
annelli, Ann. di mat., 25, S. 239; Giorn. di mat., 26, 1888, S. 176; Rend. Ist. Lomb., 1893, S. 239.
aolis, de (1854—1888), Teoria dei gruppi geometr. etc., Soc. ital. delle scienze, (3), 7, S. 561; Ist. Lomb., 1888, S. 162; Mem. Acc. Lincei, 1877, 1878, S. 162; ib., 1885, S. 242, 387; ib., 1890, S. 303.
appos, griechischer Mathematiker aus Alexandrien, lebte wahrscheinlich Ende des 3. Jahrh., *Μαθηματικαὶ Συναγωγαί* (Mathematicae Collectiones), 8 Bücher, die letzten 6 von Commandino lateinisch herausgeg., Bologna 1660, S. 567; ausserdem S. 90, 93.
ascal, Etienne, der Vater von Blaise Pascal, S. 522, 536, 537, 538.
ascal, Blaise (1623—1662), S. 60, 76, 93, 202, 289, 523, 542.

Pascal, Ernesto, Ann. di mat., 18, S. 303; ib., (2), 19, S. 303, 3
ib., 20, S. 199, 289; ib., 21, S. 289; Ist. Lombardo, 1892, 18
S. 289; Rend. Lincei, 1892, S. 199; ib., 1. Sem., 1893, S. 199, 2
ausserdem S. 228. Ferner in den Berichtigungen: Compt. Ren
5. März 1900; Rend. Ist. Lombardo, (2), 33, 15. März 1900;
34, 1901; Math. Ann., 54; Introduzione alla teoria invariant
delle equazioni di tipo generale ai differenziali totali di seco
ordine; Ann. di mat., (3), 7, 1901; Un teorema della teoria in
riantiva delle espressioni ai differenziali totali di second' ordi
Rend. Ist. Lomb., (2), 34, 1901.

Pasch, M., Vorlesungen über neuere Geometrie, Leipzig 1882, S.
583, 634; Zur Theorie der Complexe und Congruenzen von Gerad
Giessener Habilitationsschrift, 1870, S. 380; Ueber die Brennfläch
der Strahlensysteme und die Singularitätenflächen der Comple
Crelle, 76, S. 380; ib., 64, S., 97; ib., 75, S. 387.

Peano, Sui fondamenti della geometria, Rivista di Matematica, 18
S. 635; Atti Acc. Torino, 16, 1881, S. 174, 175.

Pereno, Ann. di mat., 21, S. 321.

Perrin, Bull. de la Soc. math. de France, 6, S. 131.

Petot, Compt. Rend., 102, S. 268.

Pezzo, del, Acc. Napoli, 1897, S. 359; Rend. Acc. Napoli, 1883, S. 1
ib., 1885, S. 588, 589; ib., 1886, S. 585, 589; ib., 1887, S. 589, 5
ib., 1895, S. 588; ib., 1896—97, S. 584; Rend. Acc. Palermo,
1887, S. 388, 589; ib., 2, 3, S. 239; ausserdem S. 590, 592.

Picard, Ém., Traité d'analyse, Paris 1891—96 (Bd. 1, 2. Aufl.,
1901), S. 333; Crelle, 100, S. 333, 371; Journ. de Liouville, (4),
S. 561; ib., (4), 5, S. 371.

Picard und *Simart,* Théorie des fonctions algébriques de deux
riables indépendantes, Paris 1897, S. 223.

Picquet, Assoc. Franç., 1874, S. 73; Bull. de la Soc. math., 1, 18
p. 268, S. 231, 232; Compt. Rend., 77, 1873, S. 231, 232.

Pieri, Della geometria elementare come sistema ipotetico dedutti
Mem. Acc. Torino, 1899, S. 635; Acc. Torino, 1889, S. 359; Re
Ist. Lombardo, 1893—1895, S. 436; Rend. Palermo, 5, S. 436.

Pittarelli, Giorn. di Batt., 17, 1879, S. 254; ib., 32, S. 280; Re
Lincei, 1891—1894, S. 369; Rend. Acc. Napoli, 1885, S. 182; Me
Acc. Lincei, (4), 3, 1886, S. 182; ausserdem S. 228.

Plateau (1801—1883), S. 501.

Plato (429—348 v. Chr.), S. 565.

Plücker, Julius (1801—1868), System der analytischen Geomet
Berlin 1835, S. 181, 188; Theorie der algebraischen Curven, Bo
1839, S. 128, 134, 199; Neue Geometrie des Raums, gegründet
die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement, mit ein
Vorwort von A. Clebsch, in 2 Abth., 1. Abth., Leipzig 18
2. Abth. herausgeg. von F. Klein, ib. 1869, S. 330, 378, 393, 4
Crelle, 5, S. 140; ib., 12, S. 130; ib., 16, S. 212; ib., 19, 18
S. 212, 311; ib., 34, 1847, S. 241, 244, 246; Journ. de Liouvi
1834, 1837, S. 134; Phil. Trans., 1865, S. 378; Proc. of the Lond
math. Soc., 1865, S. 378; ausserdem S. 45, 46, 187, 192, 198, 2
245, 373, 379, 380, 387, 593, 594.

Poincaré, Compt. Rend., 108, 1888, S. 239; Journ. de l'Éc. pol.,

1, 1895, S. 561, 563; Rend. Palermo, 13, 1899, S. 561, 563; ausserdem S. 616.
insot, Compt. Rend., 46, 1858, S. 568; Journ. de l'Éc. pol., 10, 1801, S. 564.
isson (1781—1840), Crelle, 8, S. 502.
ncelet (1788—1867), Traité des propriétés projectives des figures, Metz et Paris 1822, 2. Aufl., 1865, 1866, S. 45, 46, 97, 212; Crelle, 3, S. 51; ausserdem S. 3, 96, 124, 128, 211, 256; vergl. auch *Brianchon*.
ulain, Nouv. géom. du triangle, Paris 1892, Croville-Morant, éditeur, S. 73.
edella, Pilo, Atti Acc. Torino, 1891—92, S. 582; Ann. di mat., (2), 17, S. 582.
oclus (*Proklos*, 412—485), S. 540.
iseux (1820—1883), Crelle, 7, S. 460; Journ. de Liouville, 1850, S. 134; ausserdem S. 552.

uetelet, Ann. de Gergonne, 15, S. 519; Mém. de l'Ac. de Bruxelles, 3, S. 520; ausserdem S. 512, 518, 520, 530.

aabe (1801—1859), Crelle, 1, S. 543.
e, del, Acc. Modena, 9, 1893, S. 350; Acc. Napoli, 1886, S. 349; Acc. Torino, 1893, S. 349; Rend. Lincei, 1890, S. 349; ib., 1891, S. 350; ib., 1892, 1893, S. 350; ausserdem S. 349.
eichardt, Nova Acta d. Leop. Carol. Ak., 50, Halle 1887, S. 302, 389.
eye, Th., Die Geometrie der Lage, 1. Abth., 4. Aufl., 1898, 2. und 3. Abth., 3. Aufl., 1892, Leipzig bei Baumgärtner, (1. Aufl., Hannover 1866, 1868), S. 46, 124, 280, 334, 405; Synthetische Geometrie der Kugeln und linearen Kugelsysteme mit einer Einleitung in die analytische Geometrie der Kugelsysteme, Leipzig 1879, S. 423; Ann. di mat., (2), 2, S. 259; Crelle, 69, S. 387; ib., 78, S. 281; ib., 86, S. 387, 393, 414; ib., 93, S. 393; ib., 95, S. 387, 393; ib., 97, S. 393; ib., 98, S. 306, 393; ib., 99, S. 423; ib., 100, S. 256; Math. Ann., 2, S. 212; ausserdem S. 257, 306, 328, 379, 403, 404, 420.
ibaucour, Compt. Rend., 70, 1870, S. 491, 507; ib., 1872, S. 486; Études des élassoides, couronnés, Mém. de l'Ac. de Belg., 44, S. 547; Nouv. Ann., 1888, S. 547; ausserdem S. 502, 512, 544.
iccati, Graf *Jacopo* (1676—1754), S. 460, 470.
icci, Lezioni sulla teoria delle superficie, Verona-Padova 1898, S. 475, 604; Sui gruppi di movimenti in una varietà qualunque a tre dimensioni, Mem. della Soc. ital. delle scienze, (3), 12, 1899, S. 611; Ann. di mat., (2), 12, S. 602, 604, 605, 613; Atti Ist. Veneto, 1893, 1894, S. 486; Rend. Acc. Lincei, 1888, S. 604; ib., 1893, S. 472.
icci und *Levi-Civita*, Math. Ann., 54, S. 611.
ichelot (1808—1875), Crelle, 5, S. 97.
iemann, Bernhard (1826—1866), Gesammelte math. Werke und wissenschaftlicher Nachlass, edirt von Dedekind u. Weber, 2. Aufl., Leipzig 1892, S. 560; Theorie der Abel'schen Functionen, Crelle, 54, 1857, S. 130, 131, 199, 560, 570; Fragment aus der Analysis situs, Werke p. 448, S. 560, 561, 562; Ueber die Hypothesen, welche der

Geometrie zu Grunde liegen, Habilitationsrede, Göttingen 1
nach seinem Tode Gött. Abh. 13, 1867 veröffentlicht, auch in
ges. Werken; franz. von Houël, Ann. di mat., (2), 3; engl. von
ford, Nature, 8 oder Math. papers, p. 55, S. 582, 583, 610,
Ueber die Fläche vom kleinsten Inhalt bei gegebener Begrenz
bearb. von K. Hattendorf, Gött. Abh., 13, 1867, auch in den
Werken, S. 502; ausserdem S. 156, 159, 160, 162, 556, 568,
605, 607, 611, 620, 626, 627, 633, 634.
Roberts (geb. 1827), Crelle, 62, S. 507; Journ. de Liouv., 9, S. 5
Roberval (1602—1675), Mém. de l'Ac. de Paris, 1708 (posth
S. 538; ausserdem S. 531, 541.
Roccella, Sugli enti geometrici dello spazio di rette generati d
intersezioni dei complessi correspondenti in due o più fasci
jettivi di complessi lineari, Piazza Armerina 1882, S. 420.
Roch (1839—1866), Crelle, 64, S. 152.
Rodenberg, Die Pentaeder der Flächen 3. Ordnung beim Auftr
von Singularitäten, Dissertation, Göttingen 1874, S. 283; M
Ann., 14, S. 222, 283.
Rohn, Math. Ann., 15, S. 302; ib., 18, S. 302, 307; ib., 22, S.
ib., 24, S. 336, 338, 345; ib., 28, S. 345; ib., 29, 1887, von
Jablonowski'schen Gesellschaft prämiirt, S. 299, 302, 415, 416; Le
Berichte, 1884, S. 312; ib., 1890/91, S. 263.
Rosanes, Crelle, 73, S. 158, 161; Math. Ann., 6, S. 98; ausserdem S.
Rosenhain (1816—1887), Mém. des sav. étr., 11, Paris 1846, S.
ausserdem S. 303, 304.
Rudio siehe *Ganter.*
Rupp, Math. Ann., 18, S. 365, 369.

Saccheri, Girolamo (geb. Ende des 17. Jahrh., gest. 1733 zu Maila
Euclides ab omni naevo vindicatus etc., Milano 1733, S. 618; aus
dem S. 622, 623, 625.
Saint-Venant (1797—1886), Mém. sur les lignes courbes non pla
Journ. de l'Éc. pol., 18, S. 457; ib., 1845, S. 461.
Salmon, G. (geb. 1819), A treatise on conic sections (1848), An
tische Geometrie der Kegelschnitte mit besonderer Berücksichtig
der neueren Methoden, bearbeitet von W. Fiedler, 1. Thl., 6. A
Leipzig 1898; 2. Thl., 5. Aufl., ib. 1888, S. 47; A treatise on hi
plane curves (1852), Analytische Geometrie der höheren ebe
Curven, bearb. von W. Fiedler, 2. Aufl.; ib. 1882, S. 47, 134,
185, 198, 203, 435, 520, 537, 543, 545; Geometry of three din
sions, Analytische Geometrie des Raumes, bearb. von W. Fie
1. Thl., 4. Aufl., ib. 1898, 2. Thl., 3. Aufl., ib. 1880, S. 47,
105, 115, 123, 125, 212, 213, 219, 224, 227, 247, 254, 276, 280,
295, 310, 331, 345, 423, 431; Cambr. Math. Journ., 5, 1850, S.
263, 361; ib., 8, 1853, S. 365; Crelle, 42, S. 181; Quart. Journ
S. 199; Trans. of the R. Irish Ac., 23, 1857, S. 227, 365; aus
dem S. 71, 278, 286, 369; vergl. auch *Cayley.*
Saltel, Mém. de l'Ac. de Belg., 12, 1872, S. 515.
Sannia (1823—1892), Lezioni di geometria projettiva, Napoli, 1
1894, S. 46, 47.
Sarrus (geb. Ende des 18. Jahrh.), S. 520.
Scheffers, Georg, Anwendung der Differential- und Integralrechn

.uf Geometrie, Bd. 1, Einführung in die Theorie der Curven in der Ebene und im Raume, Leipzig 1900, Bd. 2, Einführung in die Theorie der Flächen ist noch nicht erschienen, S. 462; vergl. auch *Lie.*
.eff'ler, Die polydimensionalen Grössen und die vollkommenen Primzahlen, Braunschweig 1880, S. 568.
.eibner siehe *Möbius.*
.ell, Allgemeine Theorie der Curven doppelter Krümmung in rein geometrischer Darstellung, zur Einführung in das Studium der Curventheorie, 2. Aufl., Leipzig 1898, S. 462.
.epp siehe *Veronese.*
.ering (1833—1897), Gött. Nachr., 1867, S. 484; ib., 1870, S. 35; ausserdem S. 627.
.erk (1798—1885), Crelle, 13, 1835, S. 501, 502.
.hiaparelli, Giovanni, Le sfere omocentriche di Eudosso, Callippo e Aristotele, Atti Ist. Lomb., (3), 13, 1874, auch in Schlömilch's Zeitschr. d. Math. und Milano, Pubbl. d. Osservat., deutsch von W. Horn in München, S. 540; Mem. Acc. Torino, 1862, S. 161.
.hilling in Halle siehe *L. Brill.*
.hläfli, Ann. di mat., (2), 5, S. 291, 602, 608, 610; Lond. Phil. Trans., 153, 1863, S. 222, 272, 280, 291; Quart. Journ., 2, S. 289, 291; ausserdem S. 285, 289.
.hlegel, Theorie der homogen zusammengesetzten Raumgebilde, Nova Acta der Kgl. Leopold. Carol. deutschen Akademie der Naturforscher, 44, 1883, S. 564, 568; Bull. de la Soc. math., 10, S. 568; Enseignement math., 1900, S. 564; Rend. Palermo, 1891, S. 568; Schlömilch's Zeitschr. für Math., 28, 1883, S. 561.
.hlesinger, Ludwig. Siehe die Berichtigungen.
.hlömilch, Oscar (1823—1901), Uebungsbuch zum Studium der höheren Analysis, 1. Thl., 4. Aufl., Leipzig 1887, 2. Thl., 3. Aufl., ib. 1882, S. 529.
.hmidt, Franz siehe *Gauss.*
.hooten, F. van (16..—1661) siehe *Descartes* und *Viète.*
.houte, Acad. d'Amsterdam, 1886, S. 72; Crelle, 99, S. 531; Journ. des math. spéciales, 1885, S. 522; siehe auch *Gerbaldi.*
.hröter, Heinrich (1829—1892), Theorie der Oberflächen 2ter Ordnung und der Raumcurven 3ter Ordnung als Erzeugnisse projectivischer Gebilde, nach Jacob Steiner's Principien auf synthetischem Wege abgeleitet, Leipzig 1880, S. 125, 254; Die Theorie der ebenen Curven 3ter Ordnung, Leipzig 1888, S. 181; Grundzüge einer rein geometrischen Theorie der Raumcurven 4ter Ordnung 1ter Species, Leipzig 1890, S. 259; Berl. Monatsber., 1863, S. 334; Crelle, 8, S. 122; ib., 56, S. 254; ib., 62, S. 278, 289; ib., 64, S. 334; ib., 68, S. 71; ib., 100, S. 303; Math. Ann., 5, S. 183; ib., 7, S. 71; Nouv. Ann., 1865, S. 70; ausserdem S. 253; vergl. auch *Steiner.*
.chubert, Hermann, Calcül der abzählenden Geometrie, Leipzig 1879, S. 155, 231, 426, 429, 431, 432, 434, 435, 436, 438, 441; Beiträge zur abzählenden Geometrie, Math. Ann., 10 u. ff., S. 431, 436; Acta math., 8, S. 436; Gött. Nachr., 1874, 1875, S. 440; ib., 1876, S. 434; Grunert's Archiv, 63, S. 424; Hamburger Mittheil., 1, 2, 3, etc., S. 436; Math. Ann., 11, 12, S. 436; ib., 13, S. 440; ib., 17, S. 364; ib., 26, 38, 45, S. 436; Schlömilch's Zeitschr., 16, S. 71; ausserdem S. 425, 428, 437.

Schütte, Fritz siehe *Loria.*
Schumacher, Untersuchungen über Strahlensysteme 3. Ordnung
2. Classe, Dissert., München 1885, S. 414, 419; Math. Ann.,
S. 410; ib., 38, S. 410, 419; ausserdem S. 405.
Schumacher siehe *Gauss* und *Carnot.*
Schur, F., Geometr. Untersuchungen über Strahlencomplexe 1.
2. Grades, Dissertation, Berlin 1879, Auszug in den Math. A
15, S. 393; Lehrbuch der analytischen Geometrie, Leipzig 1898, S.
637; Ueber die Grundlagen der Geometrie, Math. Ann., 55, S. 6
Ueber den Fundamentalsatz der projectiven Geometrie, Math. Ann.,
S. 636, 637; Ueber den Zusammenhang der Räume constanten
mann'schen Krümmungsmasses mit den projectiven Räumen, M
Ann., 27, S. 610; ib., 15, S. 414; ib., 20, S. 346; ib., 51, 55, S. 6
ausserdem S. 391.
Schwarz, H. A., Gesammelte mathematische Werke, Berlin 18
S. 451, 502; Berl. Ber., 1872, S. 502; Crelle, 64, S. 221, 353, 3
362; ib., 67, S. 354, 356; ib., 80, S. 502; ib., 87, S. 570; aus
dem S. 352, 355, 356, 362, 371, 501.
Schwering, Crelle, 111, S. 535.
Segen, Ueber windschiefe Flächen 4. Grades mit 3 Doppelgerad
Crelle, 112, S. 345.
Segre, Un nuovo campo di ricerche geometriche, Atti Acc. Tori
1890, S. 45; Ann. di mat., 22, S. 155, 156; ib., (2), 25, S. 2
Atti Acc. Torino, 19, 1883, S. 369, 379; ib., 20, 1885, S. 379, 3
ib., 21, 1886, S. 369, 589; ib., 22, 1887, S. 369, 589; ib., 1896, S. 2
ib., 36, 1901, siehe die Berichtigungen; Bibl. math., 1892, S. 4
Crelle, 98, S. 306; Giorn. di Batt., 26, S. 598; Leipz. Ber., 18
S. 312; Math. Ann., 24, S. 320, 321, 328; ib., 30, S. 589, 597; ib.,
S. 230, 369, 589; ib., 40, S. 45; Mem. Acc. Torino, (2), 36, 18
S. 401, 402, 588, 589; ib., (2), 36, 1885, S. 379, 387, 393, 582;
(2), 37, 1886, S. 379, 387, 589; ib. 39, 1888, S. 589; Mem. A
Lincei, 1884, 1885, 1886, S. 582; Rend. Acc. Lincei, 1887, S. 2
369, 589; ib., 1895, S. 141; Rend. Palermo, 1, S. 147; ib., 2, 18
S. 578, 584, 598; ausserdem S. 44, 391, 397, 587, 588, 589, 590, 5
Segre und *Loria,* Math. Ann., 23, S. 402, 403.
Serret, Paul, Éléments de trigonométrie, 7. Ausg., Paris 1887, S.
Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung, deutsch
Harnack, 3 Bde., 2. Aufl., herausgeg. von Bohlmann, Leip
1897, 1899, 1900, S. 451, 535; Théorie nouv. géométrique et
canique des lignes à double courbure, Paris 1860, S. 462, 4
Compt. Rend., 1877, S. 461; Crelle, 16, 1851, S. 461, 462; ib.,
S. 486; Journ. de Liouv., 10, S. 535; ausserdem S. 105, 459, 601.
Servois, Ann. de Gerg., 4, 1813, 1814, S. 72.
Seydewitz (1807—1852), Grunert's Archiv, 7, 8, S. 124; ib., 9, 18
S. 100, 124; ib., 10, S. 124, 254.
Siebeck (geb. 1819), Crelle, 57, 59, 1860, S. 201.
Simart siehe *Picard.*
Simon, M., Analytische Geometrie der Ebene, Leipzig 1897, S.
Analytische Geometrie des Raumes, Leipzig 1898, S. 47; Crelle, 1
S. 620; Math. Ann., 42, S. 616.
Simony, Math. Ann., 19, 1882; ib., 24, S. 561.
Simpson (1687—1768), S. 67, 72, 543.

itsof, D., Théorie des connexes dans l'espace, Bull. des sciences math., 1898, S. 176.
ith, H. J. S. (1827—1883), Proc. Lond. math. Soc., 2, p. 94, S. 98.
hncke, L. A. (1807—1853) siehe *Chasles.*
ickel, Gött. Nachr. 1896, siehe die Berichtigungen; Leipz. Ber., 1893, S. 486; Math. Ann., 35, S. 472; siehe auch *Gauss.*
ickel und *Engel,* Die Theorie der Parallellinien von Euclid bis auf Gauss, eine Urkundensammlung zur Vorgeschichte der nichteuclidischen Geometrie, Leipzig 1895, S. 617, 618, 622, 624; Bull. de Darboux, 1897, S. 618; Math. Ann., 49, S. 618.
ahl (1845—1894), Crelle, 91, S. 414; ib., 92, S. 414; ib., 97, S. 415; ib., 101, S. 263; ib., 104, S. 263, 271; Math. Ann., 40, S. 271; ausserdem S. 271.
aude, Die Focaleigenschaften der Flächen 2. Ordnung. Ein neues Capitel zu den Lehrbüchern der analytischen Geometrie des Raumes, Leipzig 1896, S. 125.
audt, v. (1798—1867), Geometrie der Lage, Nürnberg 1847, S. 46, 132, 564, 636; Beiträge zur Geometrie der Lage, 3 Hfte., Nürnberg 1856, 1857, 1860, S. 45, 254; ausserdem S. 12, 18, 44, 47, 79, 124.
einer (1796—1863), Ges. Werke, auf Veranl. d. Akad. d. Wissensch. zu Berlin herausgeg. von Weierstrass, 2 Bde., Berlin 1882, S. 50, 100, 181, 378; Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander, Berlin 1832, auch in Ostwald's Klassikern der exacten Wissenschaften von A. J. v. Oettingen als N. 82 und 83, S. 46, 378; Vorlesungen über synthetische Geometrie, 2 Thle., 1. Thl., die Theorie der Kegelschnitte in elementarer Darstellung, bearb. von Geiser, 3. Aufl., Leipzig 1887, 2. Thl., die Theorie der Kegelschnitte, gestützt auf projective Eigenschaften, 3. Aufl., bearb. von Schröter, durchgesehen von Sturm, ib. 1898, S. 94; Ueber die Flächen 3ten Grades, Crelle, 53, 1857, S. 217, 263; Die geometrischen Constructionen mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises, Berlin 1833, S. 71; Ann. de Gergonne, 19, 1828, S. 71, 72, 564; Berl. Ak., 1856, S. 278, 280; Berl. Ber., 1839, S. 486; ib., 1840, S. 502; Crelle, 1, S. 124, 564; ib., 8, S. 161; ib., 21, S. 516; ib., 32, S. 179, 436; ib., 37, 45, S. 436; ib., 47, S. 141; ib., 49, S. 199; ib., 53, S. 278, 280, 289, 543; ib., 55, S. 436, 543; Giornale arcadico di Roma, 1844, S. 71; Nouv. Ann., 17, 1858, S. 544; ausserdem S. 45, 46, 52, 77, 137, 197, 233, 281, 285, 295, 313, 331, 332, 334, 396, 439, 515, 543, 592.
Stephanos, Kyparissos, Bull. des sciences math., (2), 4, 1880, S. 167.
Stickelberger, Math. Ann., 30, S. 129.
Stolz, O., Math. Ann., 8, S. 134; ib., 22, S. 636.
Story, Americ. Journ. of math., 4, 5, S. 620.
Stringham, Americ. Journ. of Math., 3, S. 564, 568.
Study, Habilitationsschrift, Leipzig 1885, S. 434; Leipz. Sitzungs-Ber., 1886, S. 263; Math. Ann., 26, S. 434; Zeitschr. für Math. u. Physik, 27, S. 35; Abh. der Leipz. Ges. der Wissensch., 1893, S. 67; ausserdem S. 271.
Sturm, Rudolf, Synthetische Untersuchungen über Flächen 3ter Ordnung (erhielt den halben Steiner'schen Preis, vergl. *Cremona*), Leipzig 1867, S. 267, 269, 278, 279, 280, 283, 289, 291; die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie in syntheti-

scher Behandlung, 3 Thle., Leipzig 1892, 1893, 1897, S. 379, 38
389, 391, 393, 399, 402, 403, 405, 407, 408, 410, 413, 414, 415, 41
419; Ueber die Flächen mit einer endlichen Zahl von Gerade
vorzugsweise die der 4ten und 5ten Ordnung, Math. Ann., 4, S. 34
349, 350; Crelle, 70, S. 124; ib., 79, 80, S. 254, 441; ib., 86, S. 25
ib., 99, S. 124; ib., 101, S. 414; Gött. Nachr., 1888, S. 410; Mat
Ann., 3, S. 334; ib., 6, S. 364; ib., 19, p. 487, S. 230; ib., 2
S. 289; ib., 28, S. 407; ib., 36, S. 410, 419; ausserdem S. 253, 28
285, 286, 391, 397, 405, 419, 591; vergl. auch *Loria* und *Stein*
Sturm, Jacob Karl Franz (1803—1855), Journ. de Liouv., 6, 184
S. 502.
Suvoroff, Bull. de Darboux, 4, 1873, S. 604, 610, 613.
Sylvester (1814—1897), Cambr. Math. Journ., 6, 1851, S. 280, 28
Compt. Rend., 52, 1861, S. 386; Phil. Mag., 31, 1866, S. 537; Ph
Trans., 143, S. 141; Proc. of the London Math. Soc., 2, p. 15
S. 287; ausserdem S. 146, 237, 280.

Tannery, P., Bull. de Darboux, (2), 5; ib., (2), 8, S. 621; ib., 188
S. 551; ib., 1884, S. 540.
Tanturri, Ann. di mat., (3), 4, 1900, S. 232, 598.
Tarry siehe *Neuberg*.
Taurinus, deutsch. Math. (1794—1874), S. 624.
Taylor, Proc. of the London Math. Soc., 20, 1889, S. 71; ausserde
S. 67.
Teixeira, F. Gomes, S. 555.
Tilly, de, Essai sur les principes fondamentaux de la géométrie et
la mécanique, Bordeaux 1879, auch in den Mém. de Bordeau
(2), 3, 1878, S. 583, 620; Recherches sur les éléments de géométri
Bruxelles 1860, S. 620; Essai de géom. anal. génér., Mém.
Belg., 1892, S. 620; ib., 1893, S. 35; ausserdem S. 621, 627.
Timerding, H. E., Ueber die quadratische Transformation, dur
welche die Ebenen des Raumes in ein System von Flächen 2ter Or
nung mit gemeinsamem Poltetraeder übergeführt werden, Ann.
mat., (3), 1, 1898, S. 310, 335.
Timmermans (1801—1864), Corresp. math., 1, S. 520.
Tinseau, Mém. des Sav. Étr., 9, 1781, S. 461.
Tötössy, Math. Ann., 19, S. 321.
Torelli, Rend. Acc. Lincei, 1890, S. 561; Sulla totalità dei nume
primi sino ad un limite assegnato, Mem. Acc. delle science, Napo
1901, preisgekrönt, siehe die Berichtigungen.
Tortolini (1808—1874), Nouv. Ann., 1861, S. 531.
Trudi, Nicola (1811—1884), Giorn. di mat., 1, S. 71.
Tschirnhausen (1651—1708), Acta Erudit., 1682, S. 519.
Tucker, Educat. Times, 1885, S. 73; Proc. London Math. Soc.,
1865, S. 517; Quart. Journ. of Math., 18, 1882, S. 517; ausserde
S. 67, 71, 516, 517.

Vahlen, Acta math., 19, S. 335; Crelle, 108, S. 214.
Valentiner, Bidrag til Rumcurvener Theori, Kopenhagen 1881, verg
auch Tidsskrift for Math., (4), 5 und Acta math., 2, S. 217.
Veronese, Fondamenti di geometria etc., Padova 1891, deutsch vo
Schepp unter dem Titel: Grundzüge der Geometrie von mehrere

Dimensionen, Leipzig 1894, S. 583, 620, 627, 634, 635; Behandlung der projectiven Eigenschaften der Räume von n Dimensionen durch die Principien des Schneidens und Projicirens, Math. Ann., 19, S. 583, 588, 593, 597; Elementi di geometria, Verona-Padova, Fratelli Drucker, 1897, S. 635; Atti Ist. Veneto, (5), 8, 1882, S. 584; Mem. Acc. Lincei, 19, 1884, S. 593; ausserdem S. 582, 589, 595, 596.

Viète, auch *Vieta* geschrieben (1540—1603), Opera mathematica, edirt von F. van Schooten, Lugd. Batav., 1646, S. 45.

Vigarié, Esquisse historique sur . . . la géom. du triangle, Ass. Franç., 1889, S. 73; Mathesis, 1888, S. 70.

Viviani (1622—1703), S. 554.

Vogt, Crelle, 86, S. 121.

Voss, Math. Ann., 8, S. 368, 369; ib., 9, S. 379, 410, 425; ib., 13, S. 215, 254; ib., 16, S. 605, 610, 613; ib., 23, S. 407, 414; ib., 27, S. 129, 211.

Vries, de, La quartique trinodale, Archives Teyler, (2), 7, Haarlem 1900, S. 203.

Wallace, S. 72, 543.

Wallis (1616—1703), Zwei Vorlesungen über Parallelentheorie, Werke, 2. Bd., 1693, S. 621.

Wangerin, S. 247; vergl. auch *Gauss, Ostwald.*

Watt, S. 531.

Weber, H., Theorie der Abel'schen Functionen vom Geschlecht 3, Berlin 1876, S. 199; Lehrbuch der Algebra, Braunschweig, 2. Aufl., 1. Bd., 1898, 2. Bd., 1899, S. 199; Crelle, 84, S. 302; Math. Ann., 13, S. 153, 154; ib., 23, S. 199; ausserdem S. 156; vergl. auch *Riemann.*

Weber, Ed. v. Siehe die Berichtigungen.

Weddle (1817—1853), Cambr. Journ., 5, 1850, S. 297; ausserdem S. 297.

Weichold, Schlömilch's Zeitschr. für Math., 28, S. 572.

Weierstrass (1815—1897), Berl. Monatsber., 1863, S. 334; ib., 1866, S. 502; Crelle, 64, p. 77, S. 354; ausserdem S. 123, 258, 332, 395, 498, 499, 500, 570, 588, 609.

Weiler, Adolf, Math. Ann., 6, S. 307; ib., 7, S. 402; Schlömilch's Zeitschr., 22, S. 405; ausserdem S. 397.

Weingarten, Acta math., 20, S. 491; Berl. Ber., 1882, S. 484, 486; Compt. Rend., 112, S. 491; Crelle, 59, S. 491; ib., 62, S. 504; ib., 94, 95, S. 496; ib., 98. S. 410, 512; ib., 100, S. 491; ib., 103, S. 504; ausserdem S. 475, 503, 507, 616.

Weyr, Emil (1848—1894), Die Elemente der projectivischen Geometrie, 2 Hfte., Wien 1883, 1887, S. 3, 46; Geometrie der räumlichen Erzeugnisse ein-zweideutiger Gebilde, insb. der Regelflächen 3ter Ordnung, Leipzig 1870, S. 273, 280; Ueber Flächen sechsten Grades mit einer dreifachen cubischen Curve, Wien. Ber., 1882 (85, 2. Abth.), p. 513, S. 357; Ann. di mat., 4, S. 271; Crelle, 74, S. 271; Giorn. di Batt., 9, S. 271; Ist. Lombardo, 1882, S. 271; Math. Ann., 4, S. 263; Prager Ber., 1883, S. 271; Schlömilch's Zeitschr. für Math., 1869, S. 519; Wiener Ber., 1869, S. 519; ib., 1871, S. 263; ib., 1875, 1876, 1878, S. 263; ib., 90, 2. Abth., 1884;

ib., 92, 2. Abth., 1885; ib., 97, 2. Abth., 1889, S. 267; ib., 9
2. Abth., 1890; ib., 100, 2. Abth., 1891, S. 268; ausserdem S. 21
Weyr, Ed., Wiener Ber., 69, 2. Abth., 1874, S. 269.
Whiston (1667—1752) siehe *Newton.*
Whitworth, Nouv. Ann., 1869, S. 545.
Wichert, Albert (1814—1868), Programm des Konitzer Gymnasium
1846, S. 535.
Wiener, Christian (1826—1896), Lehrbuch der darstellenden Geome
trie, 2 Bde., Leipzig 1884, 1887, S. 46, 47; Math. Ann., 3, S. 16
Wiman, Classification af regelytorna af 6 graden, Lund 1892, S. 362
Acta math., 19, S. 362.
Wölffing, Bericht über den gegenwärtigen Stand der cyclischen Curven
Biblioth. math., (3), 2, 1901, S. 544.

Zahradnik, Grunert's Archiv, 56, S. 528; Nouv. Corresp. math., 1874
1875, S. 528.
Zeuthen, Om Flader af fjerde Orden med Dobbeltkeglesnit (Uebe
Flächen 4. Ordnung mit Doppelkegelschnitt), Kopenhagen 187
ital. von Loria, Ann. di mat., (2), 14, S. 320; Acta math., 1
S. 256; Ann. di mat., (2), 3, 1870, S. 227, 231; ib., 14, 1879, S. 31
317; Bull. des sciences math., 7, S. 435; Compt. Rend., 1872, S. 42
440, 441; ib., 1874, S. 431; Copenhagener Akad., 1873, S. 441
Crelle, 99, S. 256; Math. Ann., 1, S. 375; ib., 3, S. 161; ib., 4
S. 223, 239; ib., 7, S. 132, 199, 291; ib., 8, S. 199, 291; ib., 31
S. 129; ib., 40, S. 155; Nouv. Ann., 1864, S. 537; ausserdem S. 161
224, 317, 437.

Es ist ausserdem citirt der
Intermédiaire des mathématiciens (erscheint in Paris), 1894, S. 521
544, 555; 1895, S. 520, 521, 531; 1896, S. 531, 537; 1897, S. 53

Sachregister.

Abbildung, der Flächen auf eine Ebene, S. 236 u. ff.; conforme, isogonale, winkeltreue, S. 247, 467 u. ff., 472; ebene der Flächen 3. O., S. 292 u. ff.; sphärische von Gauss, S. 467 u. ff., 473, 476, 480; sphärische der Congruenzen, S. 508.
Abscisse, S. 9.
absolutes Gebilde des Raums, S. 579; abs. Krümmung der Flächen, S. 615; Geometrie, S. 617 u. ff.; Gebilde Cayley's, S. 630 u. ff.; abs. Kegelschnitt, S. 403, 632; abs. Punktepaar, S. 630.
Abstand, geodätischer, S. 484; zweier Mannigfaltigkeiten im R_n, S. 580; zweier Punkte, S. 628, 629, 630, 632.
abwickelbare Flächen, S. 204 u. ff., 464 u. ff.
Abwickelungskrümmung von Linien auf Flächen, S. 481.
abzählende Geometrie, S. 424 u. ff.; Resultate, S. 436 u. ff.
adjungirte Curven, S. 149.
ähnliche Punktreihen, S. 12; Strahlenbüschel, S. 19; ebene Systeme, S. 30, 32; Räume, S. 42.
Aehnlichkeitsverhältniss, S. 13.
Aequatorialfläche eines Complexes, S. 379.
äquianharmonische Punkte, S. 12; Quadrupel, S. 56; Curven 3. O., S. 189, 283.
äquivalente Differentialformen, S. 603.
Aequivalenzformeln, S. 212.
affine homographische ebene Systeme, S. 29; Räume, S. 42; Homologie, S. 43.
algebraische ebene Curven, S. 126 u. ff.; Flächen und Raumcurven, S. 204 u. ff.; Complexe, S. 376; Congruenz, S. 377; allgemeine Complexe n^{ten} Grads, S. 379 u. ff.; Mannigfaltigkeit im R_n, S. 585.
allgemeine Curven, S. 199; algebraische Complexe n^{ten} Grads, S. 379 u. ff.
anallagmatische Curven und Flächen, S. 322, 514.
Analogie, Napier'sche, S. 61, 65.
Analysis situs, S. 556 u. ff.
*Anfangs*punkt, S. 9; -strahl, S. 16.
anharmonisches Verhältniss, S. 8, 45; der vier Curven eines Büschels, S. 142; der vier Punkte und der vier Tangenten des Kegelschnitts, S. 76; der vier Punkte der Raumcurve 4. O., 2. Species, S. 261, 351; der vier Berührungsebenen der Developpabeln 5. O., S. 352.
Anomalie der Geraden eines Büschels, S. 16; excentrische der Ellipse oder Hyperbel, S. 525, 526.

Anticollineationen, S. 44.
Antidualität, S. 44.
Antiinvolution, S. 44.
Antikaustiken von Quetelet, S. 518, 519.
antiparallele Gerade, S. 67.
Antipolarität, S. 44.
Antiprojectivitäten Segre's, S. 44.
aplanetische Curven, S. 536.
Applicabilität, S. 488.
arête de rebroussement von Monge, S. 207; windschiefer Regelflächen S. 364.
Art einer Congruenz, S. 405.
associati (punti), S. 179.
associirte Punkte von Raumcurven 4. O., S. 256; Minimalflächen, S. 499
Ast einer Curve, S. 185.
Astroide, S. 540 u. ff.
Asymptoten der Hyperbel, S. 75; der cubischen Raumcurve, S. 254 einer Plancurve, S. 443; der Traktrix, S. 549.
Asymptotenkegel, S. 104.
Asymptotenlinien, S. 306, 367, 475 u. ff., 479; einer Regelfläche, S. 480
aufeinander abwickelbare Flächen, S. 487 u. ff.; liegende Punktreihen, S. 13.
automorphe Formen, S. 576.
Axe des Ebenenbüschels, S. 1; der Projectivität oder Homographie S. 14, 19; perspective, der Homologie, S. 30; der Kegelschnitte S. 86, 87; des Paraboloids, S. 105; der Flächen 2. O., S. 105, 112 114; transversale der Hyperboloide, S. 114; eines linearen Complexes S. 385; des unendlich dünnen Strahlenbündels einer Congruenz S. 509; der Kettenlinie, S. 548.
Axencoordinaten, S. 373.
axiale Homographie, S. 43.
Axiome Hilbert's, S. 635, 636; Axiom des Archimedes, S. 636 Georg Cantor's Axiom, S. 637.
Axiomensystem, vollständiges der Geometrie, S. 634 u. ff.

Barycentrum, S. 70.
barycentrische Coordinaten, S. 10, 17, 45.
Basis des Cylinders, S. 102; der Roulette, S. 522.
Basiscongruenz eines Büschels linearer Congruenzen, S. 386.
Basiscurve eines Büschels, S. 234.
Basispunkte, S. 145; eines Netzes von Flächen, S. 124, 234; eine Kegelschnittbüschels, S. 94.
Begleiter, S. 178 u. ff.
Begleiterin, konische, S. 180.
Begleitpunkt eines Punktetripels, S. 257.
Berührung, mehrpunktige, 2. etc. Ordnung, S. 145, 204; zweipunktige, S. 204; von Flächen, S. 221 u. ff.; stationäre, S. 224; Sätze S. 426 u. ff.; von Curven und Flächen, S. 462 u. ff.; i^{ter} Ordnung i-punktige, S. 462; von Hyperflächen, S. 584.
Berührungscurven, S. 153.
Berührungsebene windschiefer Regelflächen, S. 364.
Berührungsflächen der Kummer'schen Fläche, S. 359.

Berührungskegel der Flächen 2. O., S. 102.
Berührungskegelschnitte an C_4, S. 193.
Bezeichnung Schläfli's für die 27 Geraden der Fläche 3. O., S. 289; symbolische der Complexe, von Battaglini und Clebsch, S. 379 u. ff.
bicirculare Curven 4. O., S. 201; Flächen Cayley's, S. 321.
bicyclische Flächen Cayley's, S. 321.
Biegungsinvariante, S. 489.
Bild, sphärisches, einer Raumcurve, S. 456.
Binormale, S. 457.
biplanare Punkte, S. 221.
bipolares Coordinatensystem, S. 20.
biquadratische Formen, S. 57.
birationale Transformation der Ebene und der Curven, S. 156 u. ff. der Connexe, S. 167; des Raums oder der Flächen, S. 236.
Bitangentialdeveloppable an die Raumcurve, S. 207.
Bitangentialebene, S. 225.
Blatt des Cartesius, S. 531.
Brachistochrone, S. 541.
Brechungsexponent, S. 517.
Brennfläche einer Congruenz, S. 407, 508.
Brennlinie, S. 517; secundäre von Quetelet, S. 518.
Brennpunkte der Kegelschnitte, S. 90; der Flächen 2. O., S. 117; der Cartesischen Ovale, S. 201, 536; einer Congruenz, S. 407, 508; der Cassini'schen Ovale, S. 531.
Brennpunktsaxe, S. 91.
Bündel, S. 2; von Flächen, S. 234.
Büschel ebener Curven, S. 141; syzygetisches, S. 178; von Flächen, S. 234; linearer Complexe, S. 386 u. ff.

Calcül, symbolischer der Bedingungen, S. 246 u. ff.
canonisches System, S. 151.
Cardioide, S. 202, 538, 542.
Cartesische Coordinaten, S. 20.
Cassinoiden, S. 531.
Catenoid, S. 497, 500, 548.
Centralebene in Bezug auf eine Erzeugende der Regelflächen, S. 363.
centrale Flächen, S. 104.
Centralpunkt, S. 407, 508; der Involution, S. 14; einer Erzeugenden der Regelflächen, S. 363.
Centrum der Curven, S. 136; der Perspectivität, Homologie, S. 30, 42; der harmonischen Mittel, S. 51; der mittleren Abstände, S. 51; der Inversion, S. 513; einer Fusspunktcurve, S. 515; siehe auch Mittelpunkt.
Charakteristiken, S. 197, 199; der Function ϑ, S. 302; der Correspondenzen höherer Ordnung, S. 407; von Systemen von Gebilden, S. 432, 434; von Monge, S. 464.
Charakteristikentheorie, S. 433 u. ff.
charakteristische Zahlen der Flächen und Raumcurven, S. 221 u. ff.; der windschiefen Regelflächen und Leitcurven, S. 364 u. ff.; der Developpabeln 7. O., S. 362; der Flächen 5. O., S. 348; der Developpabeln 6. O., S. 359; eines Systems von Gebilden, S. 436 u. ff.; der Curven im R_n, S. 594 u. ff.

circulare Curven, S. 528, 536, 540, 554.
Cissoiden, S. 527 u. ff.; von Diocles, S. 527; schiefe, S. 528; von Zahradnik, S. 528.
Classe der Fläche, S. 205; der Raumcurve, S. 206; der Developpabeln, S. 207; des Kegels, S. 208; eines Complexes, S. 377; einer algebraischen Congruenz, S. 377; einer Congruenz, S. 405; von Hyperflächen, S. 584; von C^m im R_n, S. 594.
Classification der Curven 3. O., S. 186; der Raumcurven, S. 216; der Flächen 3. O., S. 290; der Kummer'schen Flächen, S. 307; der Flächen 4. O. mit Doppelkegelschnitt von Zeuthen, S. 317; der windschiefen Regelflächen 4. O., S. 336 u. ff.; der windschiefen Regelflächen 5. O. von H. A. Schwarz, S. 354; der Developpabeln 6. O., S. 359; der Complexe 2. Grads, S. 393 u. ff.; der Cycliden von Loria, S. 422.
close-point, S. 133, 319.
Coincidenzen, S. 161, 164, 430.
Coincidenzformeln, S. 426 u. ff.
collineare Punktreihen, S. 12; Strahlenbüschel, S. 17; ebene Systeme S. 28; Räume, S. 41, 581.
Collineation, S. 3.
complementäre Transformation Bianchi's, S. 495.
Complexe, lineare, S. 44, 384 u. ff.; algebraische, S. 376; specielle S. 378; allgemeine algebraische n^{ten} Grads, S. 379 u. ff.; Büschel und Netze von linearen —, S. 386 u. ff.; 2. Grads, S. 389 u. ff. confocale 2. Grads von Klein und Lie, S. 391; homofocale Segre's S. 391; in Involution liegende Schur's, S. 391; consinguläre R. Sturm's, S. 391; Battaglini's, S. 393, 394, 402 u. ff.; hyperbolische, parabolische, elliptische, imaginäre 2. Grads, S. 393. Classification der — 2. Grads, S. 393 u. ff.; harmonische 2. Grads S. 394, 402 u. ff.; Painvin'sche, S. 394, 403; Hirst'sche, S. 399; tetraedrale, S. 400, 403 u. ff.; Reye'sche, S. 403 u. ff.
Complexcurve, S. 377.
Complexfläche (Plücker), S. 379.
Complexkegel, S. 377.
Concavität ebener Curven, S. 446 u. ff.
conchoidale Curven, S. 521.
Conchoide für Curven und Flächen, S. 250 u. ff.; des Nicomedes. S. 536 u. ff.
Configuration der 9 Wendepunkte der ebenen Curven 3. O., S. 177; der Doppeltangenten der ebenen Curven 4. O., S. 197; der 8 Punkte, die drei Flächen 2. O. gemeinsam sind, S. 256; der 16 Punkte, in denen die Osculationsebene eine Berührung 3. O. mit der Raumcurve 4. O., 1. Species hat, S. 258; der 16 singulären Punkte und Ebenen der Kummer'schen Fläche, S. 303; der 27 Geraden der Fläche 3. O., S. 284; der Geraden der Flächen 4. O. mit Doppelkegelschnitt, S. 315; der 10 Geraden der Flächen 5. O. mit Doppelcurve 5. O., S. 347.
confocale Kegelschnitte, S. 93; Complexe 2. Grads von Klein und Lie, S. 391.
conforme Abbildung, S. 247, 467 u. ff.; Transformation, S. 514.
congruente Punktreihen, S. 13; Strahlenbüschel, S. 19.

Kongruenz, algebraische, S. 377; lineare, S. 378, 386; pseudosphärische Bianchi's, S. 511; isotrope Ribaucour's, S. 512; specielle, S. 386; allgemeine Theorie, S. 405 u. ff.; 1. Ordnung, S. 410 u. ff.; 2. Ordnung ohne singuläre Linien, S. 411 u. ff.; 2. Ordnung mit singulären Linien, S. 416 u. ff.; 3. und höherer Ordnung, S. 420.
Konische Punkte, S. 221; Begleiterin, S. 180; Cylinderhelix, S. 553; Spirale, S. 553; Hyperfläche, S. 586.
Konjugati (punti), S. 408.
Konjugirte Punkte, S. 8, 182, 556; Dreiecke, S. 33; Punkte in Bezug auf einen Kegelschnitt, S. 78, 84; Gerade, bez. eines Kegelschnitts, S. 78; Dreiecke bez. eines Kegelschnitts, S. 78; Durchmesser, S. 86; Halbmesser, S. 87; Punkte, Gerade, Ebenen, Dreiecke, Tetraeder bez. der Flächen 2. O., S. 103; Gerade zu einem Punkt bez. des Flächenbüschels, S. 123; Connexe, S. 165 u. ff.; Tetraederpaare (Steiner), S. 285; Quadrupel windschiefer Geraden der Flächen 4. O., S. 315; Systeme von Kegelschnitten, die der Fläche 4. O. angehören, S. 316; Curven, S. 461; Tangenten, S. 475 u. ff., 478; Systeme von Linien auf einer Fläche, S. 479; Minimalflächen, S. 499; Erzeugende der abwickelbaren Flächen 5. O. von Cremona, S. 351; Punkte, Ebenen, S. 351; Räume, S. 376; Punkte, Gerade und Ebenen bez. eines Complexes, S. 385.
Konlocale Gebilde, S. 3; Punktreihen, S. 13.
Konnexe, ebene, S. 163 u. ff.
Konoidflächen, S. 523 u. ff.
Konstante totale Krümmung der Flächen, S. 491 u. ff.; negative Krümmung, S. 496; positive Krümmung, S. 491; mittlere Krümmung der Flächen, S. 496; Riemann'sche Krümmung des R_n, S. 605 u. ff.
Konstantenzahl eines Gebildes, S. 424.
Konstruction der Raumcurven 3. O., S. 251; der 27 Geraden der Fläche 3. O. (Salmon, Sturm), S. 286.
Kontingenzwinkel, S. 455, 459.
Kontinuirliche transitive Gruppe birationaler Transformationen, S. 371.
Konvexität ebener Curven, S. 446 u. ff.
Koordinaten der Elemente eines Gebildes, S. 2; gewöhnliche, S. 9, 16; barycentrische, S. 10, 17, 45; projective, S. 10, 17, 36; homogene, S. 10, 21, 36, 577; Cartesische, S. 20; bipolare, S. 20; trilineare, trimetrische, S. 21; der Geraden, S. 27; elliptische, S. 120; Lamé's, S. 506; im Raum, rechtwinklige, orthogonale, S. 35; quadriplanare, Vierebenen-, tetrametrische, S. 36; der Ebene, S. 41; hyperboloidale, S. 244; Klein's, S. 391, 403; krummlinige, S. 467 u. ff.
Koordinatenanfang, S. 20.
Koordinatenaxen, S. 20.
Koordinatensystem für Räume constanter Krümmung von Weierstrass, S. 609.
Koordinatentransformation, S. 36.
korresiduale Punktgruppen, S. 151; Curven, S. 213.
Korrelation, S. 3, 43; höherer Räume, S. 581.
Korrelationsprincip, S. 5.
korrelative Gebilde, S. 4; ebene Systeme, S. 32.
Korrespondenzen, ein-eindeutige, stetige, S. 2; involutorische, S. 3; isogonale, gleichwinklige, S. 162; involutorische höherer Ordnung, S. 406; homographische in Hyperräumen, S. 577 u. ff.

Correspondenzprincip von Chasles, S. 16, 54, 430, 431, 432; vo Cayley und Brill, S. 154, 432.
Cosinuskreis, S. 68.
covariante Curven, S. 134 u. ff.; Flächen, S. 232.
Covarianten der Complexe, S. 383; der ternären cubischen Form S. 188 u. ff.
cubische Formen, S. 55; Raumcurven, S. 248 u. ff.; Ellipse, S. 25; Hyperbel, S. 253; parabolische Hyperbel, Parabel, S. 253; Gebil im R_n, S. 586 u. ff.
Cubus, Verdoppelung des, S. 527.
curvatura integra von Gauss, S. 484, 487.
Curven, algebraische ebene, S. 126 u. ff.; einfache, unzerlegbare, irre ducible, S. 126; rationale, unicursale, S. 131, 269; covariant S. 134 u. ff.; Hesse'sche, Steiner'sche, Cayley'sche, S. 137 u. ff Jacobische, S. 143; — eines Flächennetzes, S. 235; adjungirt S. 149; hyperelliptische, S. 154; K-seitige, S. 156; elliptische, S. 15 210; ebene 3. O., S. 177 u. ff.; ebene harmonische 3. O., S. 18 189; gewundene, S. 283; ebene äquianharmonische, S. 189; eben 4. O., S. 192 u. ff.; allgemeine ebene, S. 199; bicirculare 4. C S. 201; parabolische, — der parabolischen Punkte, S. 205; alg braische nicht ebene, gewundene oder doppelt gekrümmte, S. 20 gewundene 3. O., S 248, 441; gewundene 4. O., S. 219, 254, 259; g wundene 5. O., S. 219, 264; gewundene 6. O., S. 220, 267; gewunden 7. O., S. 220, 269; specielle doppelt gekrümmte, S. 552 u. ff.; res duale, corresiduale, S. 213; auf den Flächen 2. O., S. 243 u. ff sphärische, S. 243 u. ff.; sphärische cyclische, S. 554 u. ff.; sphä rische spirische, S. 554 u. ff.; Bertrand's, S. 461; conjugirte, S. 46 singuläre der Congruenzen, S. 408; Erzeugung und Transformatio S. 513 u. ff.; specielle, S. 513 u. ff.; inverse, S. 513 u. ff.; Desa guesische, S. 513 u. ff.; anallagmatische, S. 514, 515; radial S. 515 u. ff., 516; kaustische, S. 517 u. ff.; parallele, S. 520 u. ff conchoidale, S. 521; cycloidale (cycloidenartige), S. 522 u. ff.; 3. C von Agnesi, S. 527 u. ff.; circulare, S. 528, 536, 540; Watt' S. 531 u. ff.; von der Form einer Acht (ad otto), S. 536; spirisch S. 536 u. ff.; aplanetische, S. 536; vierspitzige, S. 540 u. ff.; tauto chrone, S. 541; tetracuspidale, S. 544; Ribaucour's, S. 544 u. ff Delaunay's, S. 548 u. ff.; im R_n, S. 593 u. ff.; ihre Infinitesima geometrie, S. 599 u. ff.; gleichen Abstands, S. 624.
Curvenbogenlänge, S. 447 u. ff.
Curvenpaar, S. 164.
Cuspidalcurve einer Fläche, S. 222; der Enveloppe, S. 464.
Cuspidalkante der Developpabeln, S. 207.
Cuspidalpunkte, S. 129, 221; der Erzeugenden windschiefer Regel flächen, S. 364.
Cycliden, S. 320, 321 u. ff., 514; Dupin's, S. 320, 321 u. ff.; mi Doppelpunkten, S. 325; parabolische Dupin's, S. 327.
cyclische Projectivität conlocaler Punktreihen, S. 16; Homographi n^{ter} Ordnung, S. 32, 43; Kreise, S. 248; sphärische Curven, S. 554 u. ff. ebene Curven, S. 554.
cycloidale (cycloidenartige) Curven, S. 522 u. ff.

loide, S. 523, 540 u. ff.
liken (cycliques) von Darboux, S. 514.
inder, S. 102, 108.
inderflächen, S. 523 u. ff.
inderhelix, S. 552.
indroid Cayley's, S. 387.

rstellung, monoidale, höherer Räume, S. 584 u. ff.; Beltrami's der nicht-Euclidischen Geometrie, S. 633 u. ff.
fect, S. 131.
formation des R_n, S. 605 u. ff.
generationen der Raumcurven 4. O., 1ter Species, S. 255; 2ter Species, S. 261.
lisches Problem, S. 527, 540.
sarguesische Transformation und Curve, S. 514, 515.
scriptive Eigenschaft, S. 5.
veloppable, S. 465; 4. O., S. 335; 5. O., S. 350 u. ff.; 6. O., S. 359 u. ff; 7. O., S. 362; planare, S. 362.
veloppable Mannigfaltigkeiten, S. 614; Regelflächen, S. 206.
viation der Krümmungsaxe, S. 459; der Tangente, S. 459.
iagonaldreieck, S. 6.
iagonaldreiseit, S. 6.
iagonale, S. 48.
iagonalfläche von Clebsch, S. 282.
iakaustiken, S. 517.
iameter der linearen Complexe, S. 385.
iametralebene der Flächen 2. O., S. 104; der linearen Complexe, S. 385.
ichtigkeit einer Congruenz, S. 409.
ichtigkeitsmass einer Congruenz in dem Punkte eines Strahles, S. 509.
ifferentialformen, äquivalente, S. 603; der Flächen, S. 467 u. ff.; dritte, S. 473; quadratische der Mannigfaltigkeiten, S. 601 u. ff.
ifferentialgeometrie der Flächen in den Räumen constanter Krümmung, S. 615 u. ff.; der Mannigfaltigkeiten in linearen R_n, S. 601 u. ff.
ifferentialgleichung, partielle der Minimalflächen von Lagrange, S. 498; Lamé's für dreifache Orthogonalsysteme, S. 505, 604, 610.
ifferentialparameter, S. 471, 472.
imensionen eines Gebildes, S. 2; einer Bedingung, S. 425.
optrische Kaustiken, S. 517.
irecte Fusspunktcurve, S. 515.
irectionsaxe, S. 13.
irectionscentrum, S. 19.
irectrix, S. 91; des hyperbolischen Paraboloids, S. 102; einer Regelfläche, S. 276; einer Regelfläche im R_n, S. 590.
irimante, S. 517.
iscriminante einer Curve, S. 133; einer Fläche, S. 221.
odekaeder, S. 566.
oppelcurve der Developpabeln, S. 207; der windschiefen Flächen, S. 208.

Doppeldrei Sturm's, S. 285.
Doppelebene, S. 42; scheinbare, S. 207.
Doppelelement, S. 13.
Doppelgerade, S. 30, 33; eines Kegelschnittbüschels, S. 95; ein Complexes, S. 381.
Doppelpunkte, isolirte, S. 129; scheinbare, S. 207; der Flächen, S. 22 conische, biplanare, uniplanare, S. 221; der Raumcurve, S. 224.
Doppelschnittverhältniss, S. 45.
Doppelsechs Schläfli's, S. 285.
Doppelstrahlen, S. 18, 30.
doppelt gekrümmte Curven, S. 206, 552 u. ff.; berührende Hyp ebenen, S. 592.
Doppeltangenten der Plancurven 4. O., Hexaden von Hesse u. Stein S. 197; Heptaden von Aronhold, S. 198.
Doppeltangentialdeveloppable, S. 207, 208.
Doppeltangentialebene, S. 226.
doppelte Erzeugende einer windschiefen Regelfläche, S. 365; Riema sche oder elliptische Geometrie, S. 626.
Doppelverhältniss, S. 8, 17.
Doppelvier von Clebsch, S. 315.
Dreieck, zu sich selbst reciprokes, sich selbst conjugirtes oder Pol S. 33, 78; körperliches, S. 61; sphärisches, S. 61; geodätisch S. 484.
dreieckige Hypocycloide, S. 543.
Dreieckscoordinaten, S. 21.
Dreiecksgeometrie, S. 67.
dreifache Orthogonalflächensysteme, S. 504 u. ff.; Flächensyste S. 504; Systeme Weingarten's, S. 507; Tangentialebenen der Fläch 3. O., S. 284 u. ff.
dreifaches orthogonales System von Cycliden, S. 324.
Dreiflach, S. 61.
Drei-Indices-Symbole Christoffel's, S. 602.
dreipunktige Berührung, S. 204.
dreiseitige Ecke, S. 61.
dreispitzige Hypocycloide, S. 543.
Dreitheilungscurve Maclaurin's, S. 527.
duale Gebilde, S. 4; ebene Systeme, S. 32.
Dualität, S. 3, 43; höherer Räume, S. 581.
Dualitätsprincip, S. 5.
Durchdringungscurven, S. 122.
Durchmesser der Curven n^{ter} Ordnung, S. 136; der linearen Comple S. 385; eines Kegelschnitts, S. 85; conjugirte, S. 86; der Fläch 2. O., S. 104; des Paraboloids, S. 104.
Durchschnittscurve, S. 122.

ebene Trigonometrie, S. 60; algebraische Curven, S. 126 u. ff.; Curv 3. O., S. 177 u. ff.; Connexe, S. 163 u. ff.; Curven 4. O., S. 192 u. Abbildungen der Flächen 3. O., S. 292 u. ff.
Ebenen, rectificirende, S. 465; stationäre, S. 225; singuläre ei Complexes, S. 380; conjugirte in Bezug auf einen Complex, S. 3 singuläre der Congruenzen, S. 407; E_{n-1} im R_n, S. 577.
Ebenenbündel, S. 1.

benenbüschel, S. 1, 19.
benenkugel, S. 422.
benensystem, räumliches, S. 1.
enes Punktsystem, Strahlensystem, S 1, 19.
cke, dreiseitige, S. 61; *n*-, S. 49.
n-eindeutige Correspondenz, S. 2; Transformationen der Ebenen und der Cruven, S. 156 u. ff.; Transformation, S. 236.
nfach zusammenhängende Fläche, S. 558; elliptische Geometrie, S. 626.
nfache Curven, S. 126; Riemann'sche Geometrie, S. 626.
nfaches ebenes *n*-Eck oder *n*-Seit, S. 49; Hyperboloid, S. 101.
ngehüllte Curve oder Fläche, S. 464.
Einheitspunkt, S. 10, 11, 36.
Einhüllende, S. 28; von Curven oder Flächen, S. 464.
nschaliges Hyperboloid, S. 101, 108.
nseitige Flächen, S. 556 u. ff., Räume, S. 563.
Ellassoide, S. 498.
Elastische Linie, S. 548 u. ff.
Elementartheiler von Weierstrass, S. 123, 395, 588.
Elemente eines Gebildes, S. 1; unendlich ferne, S. 6; eines Connexes, S. 163.
Ellipse, S. 75 u. ff.; Brocard'sche, S. 71; cubische, S. 253; geodätische, S. 484; Cassini's, S. 531.
Ellipsoid, S. 102, 108; Flächeninhalt und Volumen, S. 452.
Elliptische Involution, S. 14, 47; Coordinaten, S. 120; Lamé's, S. 506; Curve, S. 159, 210; Serpentine, S. 186; Punkte, S. 205; Function von Weierstrass, S. 258; Complexe 2. Grades von Reye, S. 393; Kettenlinien, S. 549; Räume, S. 607; Geometrie, S. 625, 631, 633, 634.
Elliptischer Punkt einer Fläche, S. 478; Typus des Linienelements der Flächen, S. 491; Typus der Räume, S. 609; Typus der pseudosphärischen Rotationsflächen, S. 493.
Elliptisches Paraboloid, S. 102, 108.
Enveloppen, S. 28; von Curven und Flächen, S. 464 u. ff.
Enveloppencurve, S. 126.
Epicycloiden, S. 540 u. ff.
Epitrochoiden, S. 543.
Erhaltung der Anzahl, S. 424 u. ff.
rstes Geschlecht, S. 223.
Erzeugende des Kegels, S. 102; singuläre, S. 337; conjugirte der Developpabeln 5. O. von Cremona, S. 351; singuläre windschiefer Regelflächen, S. 364; doppelte einer windschiefen Regelfläche, S. 365; stationäre einer windschiefen Regelfläche, S. 364.
Erzeugung cubischer Plancurven, S. 182; Hesse'sche von C_4, S. 195; Geiser'sche von C_4, S. 196; geometrische der Flächen 3. O., S. 272 u. ff.; Steiner'sche, Salmon'sche, S. 278; Böklen'sche, Cayley'sche der Wellenfläche, S. 311; Chasles'sche, Sylvester'sche der linearen Complexe, S. 386; des tetraedralen Complexes von Reye, S. 404; von Curven und Flächen, S. 513 u. ff.
Evoluten, S. 466 u. ff.
Evolutenflächen, S. 502 u. ff.
Evolventen, S. 466 u. ff.

Evolventenflächen, S. 502.
Excentricität, numerische, S. 88, 91.
excentrische Anomalie der Ellipse, S. 525.
Excess, sphärischer, S. 62.

Fenster des Viviani, S. 554 u. ff.
n-Flach, S. 49.
Flächen: 2. O., S. 100 u. ff.; windschiefe, mit hyperbolischen, par
bolischen und elliptischen Punkten, S. 101; algebraische abwick
bare und windschiefe, S. 204 u. ff.; covariante, S. 232 u. ff.; J
cobi'sche, S. 233, 235, 236; Steiner'sche, S. 233, 281, 295, 31
331 u. ff., 396, 592; 3. O., S. 272 u. ff.; von Cayley, S. 279, 2
337 u. ff., 396; bicyclische, bicirculäre, S. 321; von Hesse, S. 280 u.
233, 235, 236; 4. O., S. 295 u. ff.; Kummer'sche, S. 295 u.
299 u. ff., 359, 389; Weddle'sche, S. 297; Fresnel'sche, S. 310; a
allagmatische, S. 322, 514; Cartesische Darboux's, S. 325; inver
S. 325; inverse Desarguesische, S. 513 u. ff.; 4. O. mit Dopp
gerade, S. 328; höherer als der 4. O., S. 347 u. ff.; 5.
S. 347 u. ff.; developpable 5. O., S. 350 u. ff.; 6. O. oder Clas
S. 357 u. ff.; developpable 6. O., S. 359 u. ff.; developpable 7.
S. 362; rationale oder unicursale oder homaloidale, S. 370 u.
589; mit rationalen, elliptischen oder hyperelliptischen Schnitt
S. 370 u. ff.; Cremona's, S. 337 u. ff., 397, 398; abwickelba
S. 464 u. ff.; der Normalebenen oder der Krümmungsaxen ei
Raumcurve, S. 465; ihr Linienelement und ihre Differentialform
S. 467 u. ff.; vom Liouville'schen Typus, S. 472, 615; modanir
S. 476; aufeinander abwickelbare, S. 487 u. ff.; mit constan
totaler Krümmung, S. 491 u. ff.; pseudosphärische, S. 491 u. ff., 6
von Dini, Enneper, Bianchi, S. 494; constanter positiver Krümmu
von Enneper, Kuen, S. 494; von constanter mittlerer Krümmu
S. 496 u. ff.; von constanter mittlerer Krümmung Enneper's, S. 5
von constanter mittlerer Krümmung, ihre Erzeugung und Tra
formation, S. 513 u. ff.; W (von Weingarten), S. 502 u. ff.; v
Goursat, S. 503; kaustische, S. 517 u. ff.; parallele, S. 520 u.
Riemann'sche, S. 556 u. ff., 568 u. ff.; Zusammenhang der R
mann'schen —, S. 556 u. ff.; einseitige, zweiseitige, S. 556 u.
offene, geschlossene, S. 556; einfach zusammenhängende, S. 5
symmetrische und reguläre Riemann'sche —, S. 568 u. ff.; zw
blättrige (hyperelliptische), S. 568; Riemann'sche in projectiv
Sinne von Klein, S. 575 u. ff.; hyperquadratische, S. 579; von z
Dimensionen im R_n, S. 589 u. ff.; V_2^4 von Veronese im
S. 589 u. ff.; Clifford'sche, S. 615; F. Bolyai's, S. 624.
Flächenbündel, S. 123.
Flächenbüschel, S. 122.
Flächenelement, S. 468.
Flächengebilde im R_n, S. 584 u. ff.
Flächeninhalte, S. 447 u. ff.
Flächennetz, S. 123.
Flächennormale, S. 445.
Flächenschar, S. 122.
Flächensysteme, lineare, S. 234 u. ff.; dreifache, S. 504.

Flächenzusammenhang der Räume, S. 562.
Flexion, S. 459.
Flexionswinkel, S. 459.
Fluchtgerade, S. 30.
Fluchtpunkt, S. 12.
Focalaxe der Lemniscate, S. 533; der Hyperbel, S. 87.
Focalcurve der Cycloide, S. 323; singuläre, S. 324.
Focale Strophoide von Quetelet, S. 530.
Focalebene einer Congruenz, S. 407.
Focalellipsen, -parabeln, S. 117.
Focalflächen einer Congruenz, S. 510.
Focalkegelschnitte der Flächen 2. O., S. 117.
Focallinien der Kegel 2. O., S. 117.
Focalpunkte, S. 407, 508; der Flächen 2. O., S. 117; einer Congruenz, S. 407, 409.
Focus der Flächen 2. O., S. 117.
Folium von Descartes, S. 527 u. ff.
Formeln, Plücker'sche, S. 130, 192, 225, 593, 594; von Zeuthen, S. 161; Cayley'sche, S. 121 u. ff., 593; von Sturm-Segre, S. 230, 591; von Frenet oder Serret für Raumcurven, S. 459, 461, 601; von Gauss über Differentialformen von Flächen, S. 470, 615; von Codazzi, S. 470, 614, 615; von Weingarten, S. 475; von Euler, S. 477; Bonnet, S. 481; von Gauss für K, S. 487; von Liouville für K, S. 488; von Weierstrass für die Coordinaten der Punkte einer Minimalfläche, S. 498, 499, 500; von Hamilton, S. 509; Veronese'sche für die charakteristischen Zahlen von C^m im R_n, S. 596.
Formen, quadratische, S. 54; cubische, S. 55; biquadratische, S. 57; invariante der Complexe, S. 379 u. ff.; automorphe, S. 576; Riemann'sche des Linienelements, S. 607.
Fünfpunktekreis, S. 69.
Function, elliptische von Weierstrass, S. 258; Abel'sche, S. 267; hyperelliptische von Klein, S. 303; hyperelliptische vom Geschlecht 2, S. 359; lemniscatische, S. 535.
Fundamentalcomplexe Klein's, S. 388.
Fundamentalcurve, S. 158.
Fundamentaldifferentialformen der Flächen, S. 467 u. ff.; der sphärischen Abbildung der Congruenzen, S. 508.
Fundamentaldreieck der Coordinaten, S. 21.
Fundamentalebenen, S. 36.
Fundamentalfiguren bei der Darstellung der 27 Geraden der Fläche 3. O., S. 290.
Fundamentalgerade eines Connexes, S. 164; der stereographischen Projection, S. 243; für die Geometrie der Strahlenbüschel, S. 632.
Fundamentalinvolution der rationalen Raumcurven, S. 270.
Fundamentalkugeln eines Coordinatensystems, S. 420.
Fundamentallinien der Flächen des homaloiden Systems, S. 237.
Fundamentalpunkte, S. 10, 36; der stereographischen Projection, S. 243; Cremona's, S. 292; einer Cremonatransformation, S. 157; k^{ter} Ordnung, S. 158; eines Connexes, S. 164; der Flächen des homaloiden Systems, S. 237; für die Geometrie der Geraden der Ebene, S. 632.

Fundamentaltetraeder, S. 36.
Fusspunktcurven und -flächen ebener Curven und Flächen, S. 515 u. f
Fusspunktfläche, S. 326.
Fusspunktgerade des Dreiecks, S. 72.

Gattung der Curven auf den Flächen 2. O., S. 245.
Gebilde, stetige, S. 1; unstetige, S. 48; quadratische im R_n, S. 586 u. f
cubische im R_n, S. 586 u. ff.; absolute der Ebene, S. 632; d
Raums, S. 633; absolute Cayley's, S. 630 u. ff.
gebrochene Strahlen, S. 517.
Gebüsch (Sturm), S. 379.
gedehnte Cycloide, S. 542.
Gegenmittellinie, S. 67.
gegenparallele Gerade, S. 67.
Gegenpunkt, S. 182.
gemeine und gemischte Poloconica (Polkegelschnitt) Cremona's, S. 18
geodätische Linien, S. 466, 475 u. ff., 481; Krümmung von Linien a
Flächen, S. 481; Krümmungsmittelpunkte, S. 481; Parallelen, S. 48
Abstände, S. 484; Kreise, Ellipsen, Hyperbeln, Dreiecke, S. 48
Torsion, S. 484.
Geometrie auf einer algebraischen Curve, S. 148; auf einer algebra
schen Fläche, S. 204 u. ff., 213; abzählende, S. 424 u. ff.; natü
liche, S. 462; projective der mehrdimensionalen Räume, S. 577 u. f
metrische der mehrdimensionalen Räume, S. 577 u. ff.; metrisch
der mehrdimensionalen Räume, S. 579; nicht-Euclidische, S. 58
natürliche im R_n, S. 599 u. ff.; elliptische oder Riemann'sch
S. 625, 631, 633, 634; hyperbolische oder Lobatschefskij'sch
S. 623 u. ff., 631, 633; parabolische, Euclidische, S. 625, 631, 63
pseudosphärische, S. 633; absolute und nicht-Euclidische, S. 617 u. f
absolute imaginäre, abstracte, S. 619.
geometrische Grundgebilde, S. 1; Interpretation der invarianten Bi
dungen des Systems einer oder zweier quadratischer ternärer Fo
men, S. 97 u. ff.; Interpretation der Invarianten und Covariante
der ternären cubischen Form, S. 188 u. ff.; Erzeugung der Fläch
3. O., S. 272 u. ff.
geometrisches Geschlecht, S. 223.
Gerade, harmonische, S. 17; des Wendepunkts, S. 178; reciprok
S. 33; Euler'sche, S. 67, 70; Simpson'sche, S. 67, 72, 543; ant
parallele, gegenparallele, S. 67; Wallace'sche, S. 72, 543; conjugirt
reciproke bez. eines Kegelschnitts, S. 78; der Flächen 3. C
S. 284 u. ff.; punktirte, S. 291; R, Caporali's, S. 303; conjugirt
bez. eines Complexes, S. 385; singuläre 2. O., 3. O. eines Complex
2. Grads, S. 391.
Geradencoordinaten, S. 27.
Geschlecht einer Curve, S. 130; der Connexe und Coincidenze
S. 165 u. ff.; der Flächen und Raumcurven, S. 221 u. ff.; geom
metrisches, erstes, numerisches, S. 223; der Osculationsdevelo
pabeln, S. 226; der Regelflächen, S. 405; der Congruenzen, S. 40
der Flächen, S. 556 u. ff; der Regelflächen im R_n, S. 590; v
C^m im R_n, S. 569.
geschlossene Flächen, S. 556; Schnitte, S. 557; Räume, S. 562.

simsflächen, S. 476.
treckte Cycloide, S. 542.
winde (Sturm), S. 379.
röhnliche Polarität, S. 44.
rundene algebraische Curven, S. 206.
iche Punktreihen, S. 13; Strahlenbüschel, S. 19.
ichseitige Hyperbel, S. 83; Hyperboloide, S. 121; Kegel, S. 122; Paraboloide, S. 122.
eichung der Geraden, S. 24; der Ebene, S. 39; der Involution, S. 53; rationale der Kummer'schen Fläche, S. 303; Abel'sche, S. 306; der Kummer'schen Fläche von Cayley, S. 300, 309; von Kummer, S. 300; der Wellenfläche von Fresnel, S. 310, 311; der Cyclide, S. 321; der Fläche 4. O. mit Doppelgerade von Kummer, S. 328; von Cayley, S. 329; der Römerfläche Steiner's von Cayley, S. 332; von Kummer, S. 332; der Developpabeln 5. O. von Schwarz, S. 352; der Developpabeln 6. O. von Cayley, S. 360; einer speciellen Regelfläche 3. O. von Plücker, S. 387; natürliche, S. 455 u. ff., 460; vom Riccati'schen Typus, S. 460, 470.
eichwinklige Correspondenzen, S. 162; Spirale, S. 545.
leitcurven, S. 522 u. ff.
rad eines Curvensystems, S. 146; eines Complexes, S. 377; des singulären Punkts einer Congruenz, S. 408.
aphische Eigenschaft, S. 5.
renzfläche einer Congruenz, S. 510; Lobatschefskij's, S. 624.
renzgerade, S. 31.
renzkreis des Raums, S. 105.
renzlinie Lobatschefskij's, S. 624.
renzpunkt, S. 12; der Strahlen einer Congruenz, S. 408, 508.
rundcurve, S. 122.
rundgebilde, geometrische, S. 1.
rundpunkte eines Netzes, S. 124; eines Büschels, S. 142.
rundzahl der Fläche, S. 556 u. ff.
ruppen von Punkten, S. 50; harmonische, S. 51.
ruppe, continuirliche, transitive birationaler Transformationen, S. 371.

Halbaxen der Kegelschnitte, S. 87; der Flächen 2. O., S. 114.
Halbirung des Lemniscatenbogens, S. 534.
Halbmesser, conjugirte, S. 87.
albregelmässige Polyeder, S. 566.
armonische Punkte, S. 7, 8, 9; Gerade, S. 17; Mittelpunkte, S. 50; Gruppen, S. 51; Homologie, S. 31, 42; Pole der Transversalen eines Dreiecks, S. 58; Polare, S. 59; des Wendepunkts, S. 178, bez. des Dreiseits und Dreiflachs, S. 251; Curve 3. O., S. 184, 189, 283; Polarebene bez. des Dreiseits und des Dreiflachs, S. 262; Complexe, S. 394, 402 u. ff.
Hauptaxe der Hyperbel, S. 87; der Kegelschnitte, S. 91.
Hauptcoincidenz, S. 164 u. ff.
Hauptcoincidenzcurven, S. 169.
Hauptdurchmesser der Flächen 2. O., S. 104, 112.
Hauptebenen der Flächen 2. O., S. 104, 112; einer Congruenz, S. 409; der Strahlen einer Congruenz, S. 508.
Hauptkrümmungsradien einer Fläche, S. 477.

Hauptlinien der Flächen des homaloidalen Systems, S. 237.
Hauptnormale einer Raumcurve, S. 456.
Hauptnormalschnitte einer Fläche, S. 477.
Hauptparameter, S. 88.
Hauptpunkte der Flächen des homaloidalen Systems, S. 237.
Hauptregelflächen einer Congruenz, S. 510.
Hauptsehnen Bertini's, S. 262.
Haupttangenten, S. 205.
Haupttangentencurven, S. 306, 367, 479.
Helicoide, S. 489, 499; pseudosphärische Dini's, S. 550.
Helix, S. 460, 489, 552 u. ff.
Heptaden, Aronhold'sche, von Doppeltangenten, S. 198.
Hexadekaedroid, S. 567.
Hexaden von Doppeltangenten von Hesse und Steiner, S. 197.
Hexaeder, S. 565; polares Cremona's, S. 288.
Hexagon, Lemoine'sches, S. 68.
homaloides Netz, S. 146, 157.
homaloide Flächen, S. 237, 370, 589.
homofocale Kegelschnitte, S. 93.
homogene Coordinaten, S. 10, 21, 36, 577.
Homographie, S. 3; involutorische, S. 14, 43; axiale, S. 43; cyclisc
S. 43.
Homographieaxe, S. 13.
Homographiecentrum, S. 19.
homographische Punktreihe, S. 12; Strahlenbüschel, S. 17; eb
Systeme, S. 28; Räume, S. 41, 581; Correspondenzen in Hyp
räumen, S. 577 u. ff.
homologe Gebilde, S. 4; ebene Systeme, S. 30; Räume, S. 42; *n*-Ec
S. 49; *n*-Seite, S. 49.
Homologie, S. 3, 30; involutorische, harmonische S. 42; affine, S.
Homologieaxe, S. 30, 49.
Homologiecentrum, S. 30, 42, 49.
Homologieebene, S. 42, 49.
homothetische ebene Systeme, S. 32; Räume, S. 43.
Horncyclide, S. 327.
Hyperbel, S. 74 u. ff.; gleichseitige, S. 83; cubische, S. 253; cubis
parabolische, S. 253; geodätische, S. 484.
Hyperberührungsebene, S. 584.
hyperbolische Involution, S. 14; Paraboloide, S. 101, 108; Serpenti
S. 186; Complexe 2. Grads von Reye, S. 393; Punkte, S. 205, 4
-r Typus des Linienelements der Flächen, S. 491; der Räu
S. 609; -r Typus der pseudosphärischen Rotationsflächen, S. 4
Lemniscate, S. 533; Spirale, S. 546; Kettenlinie, S. 549; Räu
S. 607; Geometrie, S. 623 u. ff., 631, 633.
Hyperboloid, einfaches, einschaliges oder mit einer Mantelfläc
S. 101, 108; zweifaches, zweischaliges oder mit zwei Mantelfläch
S. 102, 108; gleichseitiges, S. 121; orthogonales, S. 122; Volu
des einschaligen, S. 452.
Hyperboloidencoordinaten, S. 244.
Hyperebene, S. 577; doppelt berührende, S. 592.
hyperelliptische Curven, S. 154; Σ-Functionen von Klein, S. 3
Functionen vom Geschlecht 2, S. 359; Flächen, S. 568.

yperfläche, S. 584; conische, S. 586.
yperkegelschnitte, S. 45.
iperquadratische Fläche, S. 579.
yperquadrifläche, S. 45.
'yperräume, S. 577 u. ff.
'ypocycloide, S. 540 u. ff.
'ypothese des stumpfen und spitzen Winkels, S. 622, 634.
!ypotrochoiden, S. 543.

lentische Punktreihen, S. 14; Connexe, S. 164.
kosaeder, S. 566.
naginäre Geometrie, S. 619; Punkte, S. 11; Doppelpunkte, S. 14; Strahlen, S. 17; Elemente, S. 47; unendlich ferne Kreispunkte, S. 83; Axe der Hyperbel, S. 87; Complexe 2. Grads, S. 393.
ncidenz, S. 428.
ncidenzformeln, S. 426 u. ff.
ndex der Sinusspiralen und Ribaucour'schen Curven, S. 547.
ndicatrix von Dupin, S. 205, 478, 612.
nfinitesimalgeometrie der Curven und Flächen, S. 442 u. ff.; im R_n, S. 599 u. ff.
'nflexion, S. 446 u. ff.
'nflexionscurven, S. 479.
Inflexionserzeugende, S. 226.
Inflexionspunkte, S. 129, 177 u. ff., 446, 447.
Inflexionstangente, S. 129, 205, 225, 593.
Inhalt von Flächen, S. 447 u. ff.
Integralcurven eines Complexes, S. 168 u. ff.
Interpretation, geometrische der invarianten Bildungen des Systems einer oder zweier quadratischer ternärer Formen, S. 97 u. ff.; geometrische der Invarianten und Covarianten der ternären cubischen Form, S. 188 u. ff.; projective der drei Geometrien, S. 630 u. ff.
intrinsic equations, S. 460.
Invariante der Fundamentalkugeln in der Kugelgeometrie, S. 421; quadratischer ternärer Formen, S. 97 u. ff.; der ternären cubischen Form, S. 188 u. ff.
invariante Formen der Complexe, S. 379 u. ff., 384.
inverse Curven und Flächen, S. 513 u. ff.; Fusspunktcurve, S. 515.
Inverse, S. 325.
Inversion, S. 159, 513.
Involutionen, S. 14, 18, 46; hyperbolische, elliptische, parabolische, S. 14, 47; allgemeine, S. 53; höherer Ordnung, S. 148.
Involutionscentrum, S. 14.
Involutionscomplexe, lineare Klein's, S. 388 u. ff.
involutorische Correspondenz, S. 3, 18; Homographie, S. 14, 43; Homologie, S. 31, 42; Reciprocität oder Dualität, S. 33; Transformationen, S. 238; Correspondenzen höherer Ordnung, S. 406.
irreducibele Curven, S. 126.
isogonale Correspondenzen, S. 162; Abbildung der Flächen auf die Ebene, S. 472; Transformation, S. 514.
isolirter Doppelpunkt, S. 129.

isometrische Parameter, S. 470.
isothermes orthogonales System von Krümmungslinien der Cycliden S. 324; System von Parameterlinien, S. 470, 497.
isotrope Congruenz Ribaucour's, S. 512.

Kante, n-, S. 49; windschiefer Regelflächen, S. 364.
Katakaustiken, S. 517.
katoptrische Kaustiken, S. 517.
kaustische Curven und Flächen (Kaustiken), S. 517 u. ff.
Kegel, S. 208; gleichseitige, S. 122; 2. O., S. 101, 108; oberer und unterer des Monoids, S. 216; die 5 Kummer'schen, S. 314 singuläre der Congruenzen, S. 408, quadratische im R_n, S. 587.
Kegelflächen, S. 523 u. ff.
Kegelschnitte, S. 74 u. ff., 524 u. ff.; sphärische, S. 247, 254; absolute, S. 403, 632.
Kegelschnittbüschel, S. 94.
Kegelschnittschar, S. 94.
Kerncurve, S. 137 u. ff.
Kernfläche, Hesse'sche, S. 280 u. ff., 299.
Kettenlinie, S. 548 u. ff.
Kinematik im R_n, S. 584.
Knotencurve der Developpabeln, S. 207; der windschiefen Flächen S. 208.
Knotenpunkt, S. 221.
körperliches Dreieck, S. 61.
Körpervolumina, S. 447 u. ff.
konisch siehe *conisch*.
Kreis, S. 82 u. ff.; Feuerbach'scher, S. 67, 70; Lemoine'scher, S. 67 erster, zweiter, S. 68; Brocard'scher, S. 67, 69; Taylor'scher, S. 67, 71 Tucker'scher, S. 67, 71; des dreifachen Verhältnisses, S. 68; Euler'scher, S. 70; der absolute des Raums, S. 105; cyclischer, S. 247 geodätischer, S. 484.
Kreispunkte, S. 28; imaginäre unendlich ferne, S. 83; der Fläche 2. O., S. 115; beliebiger Flächen, S. 478.
Kreisschnitte der Flächen 2. O., S. 115.
Kreisschnittebenen, S. 115.
Krümmung von Plan- und Raumcurven, S. 455 u. ff.; mittlere von Bogen, S. 455; totale von Gauss, S. 484, 487, 605, 606; der Flächen S. 487 u. ff.; constante mittlere, S. 496 u. ff.; erste und zweite S. 459; geodätische von Linien auf Flächen, S. 481, 484; der Kurven im R_n, S. 600; Riemann'sche des R_n, S. 605 u. ff.; der Mannigfaltigkeiten, S. 611 u. ff.; absolute, relative der Flächen S. 615.
Krümmungsaxe, S. 457.
Krümmungsebene, S. 458; an die Raumcurve, S. 206.
Krümmungskreis, S. 463.
Krümmungslinien der Flächen, S. 475 u. ff.
Krümmungsmass, S. 484; der Flächen von Casorati, S. 487.
Krümmungsmittelpunkt, S. 457; der Flächen, S. 477; geodätische S. 481.

ümmungsradius, S. 455; der Curven im R_n, S. 600; von Flächen, S. 477.
ummlinige Coordinaten, S. 467 u. ff.
ibus, S. 565.
igel, S. 105, 113.
igelcalotte, Flächeninhalt, S. 452.
igelcomplexe, S. 422.
igelcongruenzen, S. 422.
igelgeometrie im Raum, S. 373 u. ff., 420 u. ff.
igelkreis, unendlich ferner imaginärer, S. 105, 403.

ingen der Halbaxen der Flächen 2. O., S. 114; der Curvenbogen, S. 447 u. ff.; der Tangente, der Normalen, S. 443.
itcurven einer Congruenz, S. 411.
itebene des hyperbolischen Paraboloids, S. 102.
itlinie siehe *Directrix.*
itungskegel einer Regelfläche, S. 490.
mniscaten Bernoulli's und Gerono's, S. 531 u. ff.
nniscatische Function, S. 535.
chtender Punkt, S. 517.
nes minimes von Legendre, S. 486.
naçon Pascal's, S. 202, 522, 533.
near zusammenhängende Räume, S. 502.
neare Complexe, S. 44, 384 u. ff.; Systeme von Punktgruppen, S. 53; Systeme ebener Curven, S. 141; Flächensysteme, S. 234 u. ff.; Büschel und Netze linearer Complexe, S. 386 u. ff.; Congruenz, S. 386; Involutionscomplexe Klein's, S. 388 u. ff.; Mannigfaltigkeiten, S. 577 u. ff.; Räume, S. 607.
inien, mehrfache, singuläre einer Fläche, S. 222; singuläre der Congruenzen, S. 408; geodätische, S. 466, 475 u. ff.; auf den Flächen, S. 475 u. ff., 481; elastische, S. 548 u. ff.
iniencomplex, S. 376.
iniencongruenz, S. 376, 507.
inienelement der Flächen, S. 467 u. ff.; des Raums, S. 504; der höheren Mannigfaltigkeiten, S. 601; Riemann'sche Form, S. 607.
iniengeometrie im Raum, S. 373 u. ff.; im R_n, S. 584.
nksgewundene Schraubenlinien, S. 552.
garithmische Spirale, S. 545, 553.
gocyclische Strophoide, S. 530.
oxodrome, S. 552 u. ff.
maca Pascal's, S. 202, 522, 533.

Mannigfaltigkeiten von Punktsystemen, S. 149; lineare, S. 577 u. ff.; nicht lineare, S. 584 u. ff.; algebraische, S. 585; normale für den eigenen Raum, S. 585; von zwei Dimensionen im R_n, S. 589 u. ff.; Differentialgeometrie, S. 601 u. ff.
Mediane, S. 70.
mehrdeutige Transformationen der Ebene und der Curven, S. 156 u. ff.
mehrdimensionale Räume, S. 577 u. ff.
mehrfache Linien einer Fläche, S. 222.
Meridianfläche eines Complexes, S. 379.

Metageometrie, S. 619.
Metrik, projective, S. 630 u. ff.
metrische Eigenschaften, S. 5; Relationen in Hyperräumen, S. 577 u. f
Relationen in projectiver Form, S. 627 u. ff.
Minimalflächen, S. 496 u. ff., 615; Henneberg's, S. 500; von H.
Schwarz, S. 501.
Minimalregelfläche, S. 499.
Minimalregelhelicoid, S. 490, 499.
Mittelfläche einer Congruenz, S. 510.
Mittellinie, S. 70.
Mittelpunkte, harmonische, S. 50; der Kegelschnitte, S. 85; d
Kegel, S. 102; der Flächen 2. O., S. 103; der Strahlen der Co
gruenzen, S. 409, 507.
Mittelpunktsflächen, S. 104.
mittlere constante Krümmung der Flächen, S. 496; der Evolute, S. 50
Proportionale, S. 527.
modanirte Flächen, S. 476.
Moduln einer Curve, S. 160; der Inversion, S. 513; Legendre'sc
S. 534.
Moment zweier Geraden (Cayley), S. 375.
Monoid, S. 586.
monoidale Darstellung höherer Räume, S. 584 u. ff.
Monoidflächen Cayley's, S. 244 u. ff.
moulures von Monge, S. 476.
muschelförmige Curven, S. 521.
Muschellinien, S. 520; des Nicomedes, S. 540.

Nabelpunkte der Flächen 2. O., S. 115; einer beliebigen Fläch
S. 478.
natürliche Gleichungen, S. 455 u. ff., 460; Geometrie, S. 462; im *I*
S. 599 u. ff.
negative Richtung der Normalen und Tangenten an Curven, S. 4
Fusspunktcurve, S. 515.
Netz ebener Curven, S. 141; homaloidales, unicursales, S. 146, 1
von Flächen, S. 234; linearer Complexe, S. 386.
Neunpunktekegelschnitt, S. 71, 95.
Neunpunktekreis, S. 67, 70.
nicht-Euclidische Räume, S. 607; Geometrie, S. 617 u. ff.
Nodoid, S. 497, 549.
Normale zu einer Plancurve, S. 442; positive und negative Richtu
S. 457.
normale Mannigfaltigkeit für den eigenen Raum, S. 585.
Normalebene einer Raumcurve, S. 444.
Normalencongruenzen, S. 511, 518.
Normalenparaboloid, S. 363.
Normalensystem von Strahlen, S. 517.
Normalform der Gleichung der Geraden, S. 25; der Ebene, S. 4
eines Complexes von Clebsch, S. 383.
Normalschnitte von Flächen, S. 477.
Normaltypus einer Curve, S. 160.

ullpolarität, S. 44, 251, 385, 406.
ullsysteme, S. 44, 251, 385; höherer Ordnung, S. 406.
merische Excentricität, S. 88, 91; -s Geschlecht, S. 223.

erer Kegel des Monoids, S. 216.
ctaeder, S. 556.
ctaedroid, S. 567.
ffene Flächen, S. 556; Schnitte, S. 557.
rdnung der ebenen Curven, S. 126; der ebenen Connexe, S. 163; der Coincidenzen, S. 164; der algebraischen Flächen, S. 204; der Raumcurven, S. 206; des Kegels, S. 207; eines Complexes, S. 377; einer algebraischen Congruenz, S. 377; einer allgemeinen Congruenz, S. 405; von C^m im R_n, S. 594.
ricyclus, S. 491; Lobatschefskij's, S. 624.
risphäre Lobatschefskij's, S. 624.
rthocentrum, S. 70.
rthogonale Coordinaten, S. 35; Hyperboloide, S. 122; dreifache Systeme von Cycliden, S. 324; isotherme Systeme, S. 324; isotherme Systeme von Parameterlinien, S. 470.
rthogonalflächensysteme, dreifache, S. 504 u. ff.
sculanten, Theorie, S. 263.
sculation von Flächen, S. 224.
sculationsberührung, S. 145.
sculationsdeveloppable der Rückkehrkante, S. 465.
sculationsebene, S. 458; an die Raumcurve, S. 206.
sculationskegel, S. 222.
sculationsräume an Curven im R_n, S. 593.
sculationstangenten, S. 204, 205.
sculiren einer Fläche durch eine Gerade, S. 274.
sculirende Developpable, S. 207; Curven und Flächen, S. 463; Kreise, S. 463; Kugel, S. 464.
Ovale des Cartesius, S. 201, 536 u. ff.; Cassini's, S. 531 u. ff.

Paare von conjugirten Triedern (Steiner), S. 285.
paarer Zug einer Curve, S. 132.
Pangeometrie, S. 619.
Parabel, S. 75 u. ff.; cubische, S. 253; semicubische oder Neil'sche S. 527.
parabolische Involution, S. 14; Serpentine, S. 186; Punkte, S. 205, 478, 614; Curve, S. 205; cubische Hyperbel, S. 253; Cyclide, S. 325; Dupin'sche Cyclide, S. 327; Horncyclide, S. 327; Ringcyclide, S. 327; Complexe 2. Grades von Reye, S. 393; -r Typus des Linienelements der Flächen, S. 491; der Räume, S. 609; -r Typus der pseudosphärischen Rotationsflächen, S. 493; Spirale, S. 546; Räume, S. 607; Geometrie, S. 625, 631, 633.
Paraboloid, hyperbolisches, S. 101, 108; elliptisches, S. 102, 108; Volumen, S. 452; gleichseitiges, S. 122.
parallele Curven und Flächen, S. 520 u. ff.
Parallelen, geodätische, S. 484.
Parallelismus ϱ^{ter} Ordnung im R_n, S. 579.

Parameter, S. 88; der Erzeugenden einer Regelfläche, S. 363; d
linearen Complexe, S. 385.
Parameterlinien, S. 467.
partielle Differentialgleichung der Minimalflächen von Lagrang
S. 498.
Pedalcurve, S. 515.
pedale, S. 515.
Pedalentheorem, S. 72.
Pentaeder, Sylvester'sches, S. 280 u. ff.
Pentaedergleichung, S. 281.
Pentraedroid, S. 567.
perspective Gebilde, S. 4; Punktreihen, S. 13; ebene Systeme, S. 3
Durchschnitte, S. 30; Axe, S. 30; n-Ecke, S. 49; n-Seite, S. 49.
Perspectivität, S. 3.
pinces-point, S. 221.
pinchpoint, S. 221.
planare Developpable, S. 362.
Plancurven, Krümmung, S. 455 u. ff.
podaire, S. 515.
Pol, S. 20, 33, 35, 78, 84, 102, 135, 251; harmonischer, S. 58; d
grössten Kreise, S. 62; der Inversion, S. 513; der Fusspunktcurv
S. 515.
Polarcomplexe, S. 381.
Polarcoordinaten, S. 20, 36.
Polardeveloppable, S. 465.
Polarcurve einer Geraden, S. 232.
Polardreieck, S. 33, 78.
Polare, S. 33, 78, 84; harmonische, S. 59; eines Pols bez. ein
Curve, S. 135; harmonische des Wendepunkts, S. 178; vielfacl
von Geraden, S. 232; harmonische bez. des Dreiseits und Dre
flachs, S. 251.
polare sphärische Dreiecke, S. 63; Hexaeder Cremona's, S. 288.
Polarebene, S. 102, 251; harmonische, S. 262.
Polarflächen, S. 232 u. ff.
Polarform des Riemann'schen Raumes, S. 626.
Polargerade, S. 78, 135.
Polargruppen, S. 51.
Polarität, S. 5, 33, 50, 51, 134; gewöhnliche, S. 44.
Polaritätsprincip, S. 5.
Polarlinie, S. 457.
Polarsubnormale, S. 443.
Polarsubtangente, S. 443.
Polarsysteme, S. 51.
Polartetraeder, S. 103, 258.
Polarvolumen, S. 454.
Polaxe, S. 20, 35.
Polebene, S. 35.
Polkegelschnitt, S. 180.
Poloconica, gemischte (mista), gemeine (pura) (Polkegelschnitt) Cr
mona's, S. 180.
Polsechsflache Cremona's, S. 284 u. ff.
Polyeder im Raume von drei und mehr Dimensionen, S. 563 u. fl

Euler'sche, S. 564; regelmässige oder Platonische, S. 565; halbregelmässige oder Archimedische, S. 566.
Polyedergruppen, S. 574.
Polyedernetz, S. 563 u. ff.
Polyedertheorie, S. 556 u. ff.
Polygone Poncelet's, S. 97; Steiner'sche, S. 179.
Polynome des Cubus, Octaeders und Ikosaeders, S. 574.
Positive Richtung der Normalen u. Tangenten an Curven, S. 457 Fusspunktcurve, S. 515.
Postulate Euclid's, Postulat V über die Parallelen, S. 617, 621 u. ff.; von Wallis, Saccheri, Lambert, S. 622.
Postulationsformeln, S. 212.
Potenz eines Punktes in Bezug auf eine Kugel, S. 420.
Princip der Erhaltung der Anzahl oder der gleichgültigen oder speciellen Lage von Schubert, S. 424 u. ff.; der Dualität oder Correlation in der Ebene und im Raume, S. 5.
Problem Plateau's, S. 501; der Verdoppelung des Cubus oder Delisches, S. 527, 540; der Brachistochrone, S. 541.
Product zweier Bedingungen, S. 425.
Projection, stereographische, S. 243.
Projectionsaxe, S. 2.
Projectionscentrum, S. 2.
Projective Gebilde, S. 4; Geometrie der mehrdimensionalen Räume, S. 577 u. ff.; Eigenschaften, S. 5; Coordinaten, S. 10, 17, 36; Punktreihen, S. 12; Strahlenbüschel, S. 17; ebene Systeme, S. 28; Räume, S. 41, 581; n-Ecke, S. 50; Metrik, S. 630 u. ff.; Interpretation der drei Geometrien, S. 630 u. ff.
Projectivität, S. 3; cyclische, S. 16.
Projectivitätsaxe, S. 13.
Projectivitätscentrum, S. 19.
Projectivitätsgleichung, S. 12.
Projiciren, S. 2; von Räumen im R_n, S. 581.
Proportionale, mittlere, S. 527.
Pseudosphäre, S. 495, 550.
pseudosphärische Flächen, S. 491 u. ff.; Rotationsflächen, S. 492; Flächen von Dini, S. 494; Flächen von Enneper, Bianchi, S. 494; Trigonometrie, S. 495; Congruenzen Bianchi's, S. 511; Helicoide Dini's, S. 550; Räume, S. 607; Geometrie, S. 633.
Pseudoversiera, S. 529.
Punkte, harmonische, S. 7, 8; conjugirte, S. 8, 84, 182; — in der Topologie, S. 556; imaginäre, S. 11; äquianharmonische, S. 12; reciproke, S. 33; Brocard'sche, S. 67; — negative und positive, S. 68; Lemoine'sche, S. 67, 68; Grebe'sche, S. 68; Schröter'sche, S. 70; Vigarié'sche, S. 70; Boubals'sche, S. 71; conjugirte, reciproke bez. eines Kegelschnitts, S. 78, 84; — bez. eines Complexes, S. 385; vielfache, S. 127, 152; — einer Fläche, S. 222; stationäre, S. 129; — der Raumcurven, S. 224, 263; singuläre, S. 129; — der Flächen und Raumcurven, S. 221 u. ff.; — eines Complexes, S. 380; singuläre der Congruenzen, S. 407; hyperbolische, elliptische, parabolische, S. 205; — einer Fläche, S. 478; conische, biplanare, uniplanare, S. 221; associirte von Raumcurven 4. O., S. 256; leuchtende, S. 517; singuläre

von Hyperflächen, S. 585; stationäre der Curven im R_n, S. 600
parabolische von Mannigfaltigkeiten, S. 614.
Punktepaar, Steiner'sches, S. 179; absolutes, S. 630.
Punktequadrupel auf der Raumcurve 4. O., S. 257.
Punktetripel auf der Raumcurve 4. O., S. 257.
Punktgleichung der Kegelschnitte, S. 80.
Punktgruppen, S. 50; auf einer algebraischen Curve, S. 148 u. ff.
corresiduale, residuale, S. 151.
punktirte Gerade, S. 291.
Punktkugel, S. 422.
Punktreihen, S. 1; gerade, S. 6; projective, homographische, collineare
S. 12; ähnliche, S. 12; congruente, gleiche, S. 13; perspective
S. 13; conlocale, aufeinander liegende, superponirte, S. 13; ider
tische, S. 14.
Punktsystem, ebenes, S. 1; räumliches, S. 1.
punti associati, S. 179.

quadratische Formen, S. 54; Gebilde im R_n, S. 586 u. ff.; Kegel in
R_n, S. 587; Differentialformen, S. 601.
Quadratrix, S. 548 u. ff.
Quadratur des Kreises, S. 551.
quadriplanare Coordinaten, S. 36.
Quadrupel von Punkten, S. 57; von Punkten auf der Raumcurve 4. C
S. 257; bei der Darstellung der 27 Geraden der Fläche 3. C
S. 290; Göpel's, S. 302, 303, 304; Rosenhain's, S. 302, 303, 30
windschiefer Geraden 1ter Art, 2ter Art der Flächen 4. O., S. 315
quaterne-zero, S. 290.
Quintupel von windschiefen Geraden der Flächen 4. O., S. 315.

radiale Curven ebener Curven, S. 515 u. ff.
Radienvectoren, reciproke, S. 513 u. ff.
Rand einer Fläche, S. 556.
Rang der Raumcurven, S. 206; im R_n, S. 594; der Flächen, S. 20
364, 412; einer Congruenz, S. 405.
rationale Gleichung der Kummer'schen Fläche, S. 303; Fläche
S. 370 u. ff.
Räume, S. 2; homographische, collineare, projective, S. 41; affin
S. 42; ähnliche, S. 42; homologe, S. 42; homothetische, S. 43; co
jugirte, S. 376; linear zusammenhängende, geschlossene, m
Flächenzusammenhang, mit Zusammenhang r^{ter} Art, S. 562; ei
seitige, zweiseitige, S. 563; mehrdimensionale, S. 577 u. ff.; sph
rische, Riemann'sche oder elliptische, S. 607, 633; pseudosphärisch
Lobatschefskij'sche, hyperbolische oder nicht-Euclidische, S. 60
lineare, Euclidische oder parabolische, S. 607.
räumliches Punktsystem, Ebenensystem, S. 1.
rationale Curven, S. 131, 181; Flächen, S. 223; Raumcurven, S. 269 u.
Raumcurven, algebraische, S. 204 u. ff.; verschiedener Ordnunge
S. 243 u. ff.; 3. O., S. 248 u. ff.; 4. O. 1ter Species, S. 254 u. f
4. O. 2ter Species, S. 259 u. ff.; 5., 6., etc. O., S. 264 u. ff.; rati
nale, unicursale, vom Geschlecht Null, S. 269 u. ff.; Krümmun
S. 455 u. ff.

·htsgewundene Schraubenlinie, S. 552.
·htwinklige Coordinaten, S. 35; Strophoide, S. 530.
·ciprocität, S. 3, 43; höherer Räume, S. 581.
·ciprocitätstheorem von Brill-Noether, S. 152.
·iprokpolar, S. 103.
·iproke Gebilde, S. 4; ebene Systeme, S. 32; Dreiecke, S. 33; Punkte, S. 33, bez. eines Kegelschnitts, S. 78; Gerade, S. 33, bez. eines Kegelschnitts, S. 78; sphärische Dreiecke, S. 63; Tetraeder, S. 103; Radienvectoren, S. 513 u. ff.
·ctification der Trisectrix, S. 530; der Cartesischen Ovale, S. 537.
·tificirende Developpable einer Raumcurve, S. 465; Ebene Lancret's S. 465.
·ducibele Curven, S. 131.
·elle Axe der Hyperbel, S. 87.
·flectirte Strahlen, S. 517.
·egelflächen, S. 206, 376; 2. O., S. 101; abwickelbare (developpable), S. 206; windschiefe, S. 206, 208; 3. O. Cayley's, S. 276; 4. O., S. 313, 335 u. ff.; windschiefe 4. O., S. 336 u. ff.; höherer als der 4. O., S. 347 u. ff.; windschiefe 5. O., S. 353 u. ff.; windschiefe 6. O., S. 361; beliebiger Ordnung, S. 363 u. ff.; als Schnitte von Complexen, S. 367; einer Congruenz, S. 510; im R_n, S. 589.
·egelhelicoid, S. 490, 504.
·gelmässige (Platonische) Polyeder, S. 565.
·guläre Curvensysteme, S. 146; Flächen, S. 223; Riemann'sche Flächen, S. 568 u. ff.
·elationen, metrische in projectiver Form, S. 627 u. ff.
·lative Krümmung der Flächen, S. 615.
·siduale Punktgruppen, S. 151; Curven, S. 213.
·esiduum, S. 213.
·estcurve, S. 213.
·estsatz, S. 151, 213.
·esolvente, Galois'sche, S. 573.
·ichtung, positive und negative der Normalen und Tangenten an Curven, S. 457.
·ingcyclide, S. 327.
·öhrenflächen, S. 504.
·ömerfläche Steiner's, S. 295, 313, 331 u. ff., 339.
·ollcurven, S. 522 u. ff.
·otationsflächen, S. 523 u. ff.; 2. O., S. 113; Inhalt und Volumen, S. 451; pseudosphärische, S. 492.
·otationshyperboloid, S. 490.
·ouletten (Rollcurven), S. 522 u. ff.
·ückkehrkante der Developpabeln, S. 207; der Enveloppe, S. 464.
·ückkehrpunkt, S. 129.

·atellit, S. 178 u. ff.; eines Punktetripels, S. 257.
·atz siehe *Theorem.*
·char ebener Curven, S. 141; von Flächen, S. 234.
·cheinbare Doppelpunkte und Doppelebenen, S. 207.

Scheitel eines Büschels, S. 1; der Kegelschnitte, S. 86; des Paboloids, S. 105.
Schiefe einer Berührungsebene an eine Regelfläche, S. 363.
schiefe Cissoiden, S. 528; Strophoide von Quetelet, S. 530.
Schmiegung, S. 459.
Schmiegungsebene an die Raumcurve, S. 206, 458.
Schmiegungskugel, S. 465.
Schmiegungswinkel, S. 459.
Schnecke (limaçon) Pascal's, S. 202, 522, 536 u. ff.
Schneckenlinie, S. 460, 552.
Schneiden mit einer Geraden, einer Ebene, S. 3; von Räumen R_n, S. 581.
Schnitte, offene, geschlossene, 1ter, 2ter Art, S. 557; 1ter, 2ter Cla S. 558.
Schnittebenen der V_2^4, S. 592.
Schraubenlinie, S. 460, 489, 552.
Secanten, vielfache der Raumcurven, S. 221 u. ff.
Sechsecke, Pascal'sche, S. 76, 289; Brianchons, S. 76.
Seckspunktekegelschnitt, S. 69.
Sechsseit, Brianchon'sches, S. 416.
Sechstheilungscurve Pascal's, S. 522.
secundäre Brennlinien von Quetelet, S. 518.
n-Seite, S. 49.
Selbstberührungspunkt einer Curve, S. 133, 319; von Flächen, S.
semicubische Parabel, S. 527.
Serpentine, elliptische, hyperbolische, etc., S. 186.
Siebenpunktekreis, S. 69.
singuläre Punkte, Tangenten, S. 129; Punkte der Flächen und Ra curven, S. 221 u. ff.; Linien einer Fläche, S. 222; Focalcur S. 324; Erzeugende, S. 337; Erzeugende windschiefer Regelfläc S. 364; Berührungsebenen windschiefer Regelflächen, S. 364; Pun und Ebenen eines Complexes, S. 380; Gerade eines Comple S. 380; Gerade 2. O., 3. O. eines Complexes 2. Grades, S. Punkte und Ebenen der Congruenzen, S. 407; Kegel und Cur der Congruenzen, S. 408; Linien der Congruenzen, S. 408; Ho graphien höherer Räume, S. 582; Punkte von Hyperflächen, S.
Singularitäten, S. 129; Zerlegung, S. 160.
Singularitätenfläche, S. 380; der Complexfläche 2. Grades, S. 389.
Sinuscurve, S. 548 u. ff.
Sinusoide, S. 550.
Sinusspiralen von De la Goupillière, S. 546.
Sommet der Erzeugenden windschiefer Regelflächen, S. 364.
Specialgruppe, S. 151.
Specialsystem, S. 151.
specielle Curven, S. 513 u. ff.; Complexe, S. 378; lineare Compl S. 385, 386.
Species der Curven auf den Flächen 2. O., S. 245; windschiefer Re flächen 4. O. Cayley's, Cremona's, S. 337 u. ff.; Rohn's, S. 338.
sphärische Dreiecke, S. 61; Trigonometrie, S. 61, 62; Excesse, S. Curven, S. 243 u. ff.; Kegelschnitte, S. 247, 554; Bilder einer Ra

curve, S. 456; Abbildung der Congruenzen, S. 508; Abbildung von Gauss, S. 467 u. ff., 473, 476, 480; Abbildung von Flächen, S. 467 u. ff.; cyklische Curven, S. 554 u. ff.; spirische Curven, S. 554 u. ff.; Räume, S. 607.
Spindelcyclide, S. 327.
Spirale, S. 544 u. ff.; conische, S. 553; logarithmische, S. 553; equiangolare, S. 545.
Spirische Curven, S. 536 u. ff.; sphärische Curven, S. 554 u. ff.
Spitze des Kegels, S. 102; einer Plancurve, S. 129; einer Raumcurve, S. 224; der Erzeugenden windschiefer Regelflächen, S. 364.
Stationäre Punkte, S. 129; der Curven im R_n, S. 600; Tangenten, S. 129, 225, 593; Tangentenebenen, S. 205, 593; Punkte der Raumcurve, S. 224, 263; Berührung von Flächen, S. 224; Ebenen, S. 226; Erzeugende windschiefer Regelflächen, S. 365.
Stereographische Projection, S. 243; Coordinaten, S. 607.
Stetige Correspondenz, S. 2.
Στοιχεῖα Euclid's, S. 617.
Strahlen, reflectirte, gebrochene, S. 517; harmonische, imaginäre, S. 17.
Strahlenbündel, S. 1, 410; unendlich dünnes einer Congruenz, S. 509.
Strahlenbüschel, S. 1, 16; homographische, collineare, projective, S. 17; ähnliche, S. 19; congruente, gleiche, S. 19.
Strahlencoordinaten Plücker's, S. 373.
Strahlengebüsch (Sturm), S. 379.
Strahlengewinde (Sturm), S. 379.
Strahlennetz (Sturm), S. 379.
Strahlenraum, S. 373.
Strahlensysteme, ebene, S. 1; Synonym von Congruenzen, S. 410, 507.
Strictionslinie, S. 363.
Strophoide, S. 527 u. ff.
Stufe eines Curvensystems, S. 141; eines Flächensystems, S. 234.
Subnormale, S. 443.
Subtangente, S. 443.
superficie modanate, S. 476.
superponirte Gebilde, S. 3; Punktreihen, S. 13.
Symbole von Christoffel, S. 469, 474, 475, 480, 602 u. ff.
symbolische Bezeichnung der Complexe von Battaglini und Clebsch, S. 379 u. ff., 382.
symbolischer Calcül der Bedingungen, S. 426 u. ff.
Symmediane, S. 67.
symmetrische Riemann'sche Flächen, S. 568 u. ff.
Symmetroid, S. 298.
Systeme, lineare von Punktgruppen, S. 53; lineare ebener Curven, S. 141; vollständige ebener Curven, S. 146; überreichliche, reguläre, S. 146; canonische, S. 151; volle von Aronhold, S. 198; Aronhold's, S. 304; conjugirte von Kegelschnitten, die der Fläche 4. O. angehören, S. 316; der sechs Fundamentalcomplexe von Klein, S. 388; von Gebilden, S. 425; conjugirte von Linien auf den Flächen, S. 479; isotherme, S. 497; dreifache Weingarten's, S. 507, 615.
syzygetisches Büschel, S. 178.

tacnodo, S. 133, 319.
Tangenten, S. 126, 442, 444; vielfache, S. 127; stationäre der Plan curven, S. 129; singuläre, S. 129; an die Fläche, S. 204; an di Raumcurve, S. 206; stationäre der Raumcurven, S. 225; positiv und negative Richtung, S. 457; conjugirte, S. 475 u. ff., 478.
Tangentenebene, S. 204; stationäre, S. 205.
Tangentenkegel der Flächen 2. O., S. 102.
Tangentialebenen, dreifache der Flächen 3. O., S. 284 u. ff.; an ein Fläche, S. 445.
Tangentialgleichung der Kegelschnitte, S. 80.
Tangentialkrümmung von Linien auf Flächen, S. 481.
Tangentialnetz, S. 174.
Tangentialpunkte, S. 177 u. ff.
tautochrone Curve, S. 541.
tetracuspidale Curve, S. 544.
Tetraeder, S. 34, 565.
Tetraedercoordinaten, S. 36.
Tetraedergleichungen, S. 574.
tetraedraler Complex, S. 400, 403 u. ff.
Tetraedroid Cayley's, S. 308 u. ff., 394.
tetrametrische Coordinaten, S. 36.
Theilungscurven, S. 521 u. ff.
Theoreme von Abel, S. 534; Battaglini, S. 389; Beez, S. 605; Beltram S. 279, 334, 482, 492, 511, 608; Bernoulli, Jacob, S. 545; Bertran S. 460; Bianchi, S. 494, 511, 614, siehe die Zusätze; Bonnet, S. 49 496, 497, 498, 601; Bour, S. 498; Brianchon, S. 76; Brill, S. 614; Bril Noether, S. 150, 152, 160; Carnot, S. 88, 137; Casey, S. 321; Cayle S. 128, 159, 203, 208, 224; Ceva, S. 59; Chasles, S. 16, 148, 247, 25 363, 364, 433, 535, 588, 597; Christoffel, S. 150; Clairaut, S. 48 Clebsch, S. 282, 283, 333, 334, 381; Clifford, S. 152, 597, 598; Cote S. 137; Cremona, S. 53, 158, 180, 250, 259, 262, 287, 318, 334, 35 Darboux, S. 333, 421, 460, 480, 500, 505; Delaunay, S. 497; D sargues, S. 77; Dini, S. 494; Dupin, S. 323, 324, 478, 505, 61 Dyck, S. 574; Enneper, S. 480, 494; Euler, S. 525, 563, 61 Fagnano, S. 525, 526, 534; Fresnel, S. 310; Gauss, S. 61, 48 484; Gerbaldi und Schoute, S. 52; Gergonne, S. 518; De Gournerie, S. 324; Habich, S. 516; Halphen, S. 433, 503; Hermit S. 210; Hesse, S. 79; Hurwitz, S. 571, 574; Jacobi, S. 127, 21 Jordan, S. 287, 306; Klein, S. 283, 389, 407; Klein-Lie, S. 54 Kraus, S. 153; Kronecker, S. 586; Kummer, S. 312; Lambe S. 623; Landen, S. 526; Laguerre, S. 28, 324, 628; Legendr S. 622, 623; Lie, S. 333; Lüroth, S. 370; Maclaurin, S. 77, 13 179; Malus-Dupin, S. 511; Menelaus, S. 59; Meusnier, S. 478, 49 Minding, S. 495; Möbius, S. 9, 17, 34, 251, 557; Moutard, S. 32 514, 518; Newton, S. 136, 528; Noether, S. 128; Pappus, S. 9 B. Pascal, S. 76; Pasch, S. 380; Picard, S. 371; Plücker, S. 128, 38 Poncelet, S. 96, 128, 211, 256; Puiseux, S. 460, 552; Reye, S. 25 306; Ribaucour, S. 512; Riemann, S. 159, 160, 162, 607; Rieman Roch, S. 152; Saccheri, S. 622, 623; Schur, siehe die Zusätz S. 703; H. A. Schwarz, S. 356, 362, 371; Segre, S. 587, 588, 59 591; Paul Serret, S. 481; Staudt, S. 79; Steiner, S. 77, 278, 37

516; Stringham, S. 568; Sturm, S. 279, 282; Tucker, S. 517; Voss, S. 613; Weber, S. 154; Weierstrass, S. 570; Weingarten, S. 503; Zeuthen, S. 316, 317.
Topologie, S. 556 u. ff.
Torsallinie windschiefer Regelflächen, S. 364.
Torsion, S. 455 u. ff., 459; geodätische, S. 484.
Torsionswinkel, S. 459.
Torus, S. 320, 327, 540; Flächeninhalt und Volumen, S. 452.
totale Krümmung von Gauss, S. 484, 487; Krümmung (Gauss'sche) der Mannigfaltigkeiten, S. 612.
Tractrix, S. 493, 548 u. ff.
Träger der Punktreihe, des Büschels etc., S. 1.
Transformation der Coordinaten, S. 36; Desarguesische, S. 69, 513 u. ff.; birationale, ein-eindeutige, mehrdeutige der Ebenen und der Curven, S. 156 u. ff.; Cremona's, S. 157; durch reciproke Radienvectoren, S. 159, 513 u. ff.; birationale der Connexe, S. 167; birationale des Raums und der Flächen, S. 236 u. ff.; ein-eindeutige, Cremona-sche, S. 236; involutorische, S. 238; von Curven und Flächen, S. 513 u. ff.; complementäre Bianchi's, S. 495; Bäcklund's, S. 495.
transitive continuirliche Gruppe birationaler Transformationen, S. 371.
Translationsfläche Scherk's, S. 501.
transversale Axe der Hyperbel, S. 78; der Hyperboloide, S. 114.
Trieder, S. 61; Paare von conjugirten (Steiner), S. 285.
Triedrometrie, S. 62.
Trigonometrie, ebene, S. 60; sphärische, S. 61, 62; pseudosphärische, S. 495.
trilineare Coordinaten, S. 21.
trimetrische Coordinaten, S. 21.
Tripel von Punkten, S. 55; auf der Raumcurve 4. O., S. 257.
Trisectrix Maclaurin's, S. 521, 527 u. ff.
Trochoide, S. 540 u. ff.
Typus, Liouville'scher von Flächen, S. 483; hyperbolischer, parabolischer, elliptischer des Linienelements der Flächen, S. 491; der pseudosphärischen Rotationsflächen, S. 493.

überreichliches Curvensystem, S. 146.
Uebertragungsprincip, S. 165.
Umbilicus der Flächen 2. O., S. 115.
umhüllte Curve oder Fläche, S. 464.
Undulationspunkte, S. 203.
Unduloid, S. 497, 549.
unendlich ferne Elemente, S. 6, 47; dünnes Strahlenbündel einer Congruenz, S. 509.
Unicursalcurven, S. 131, 181, 521.
unicursale Flächen, S. 237, 370; Netze, S. 146.
uniplanare Punkte, S. 221.
unpaarer Zug einer Curve, S. 132.
unstetige Gebilde, S. 48.
unterer Kegel des Monoids, S. 216.
unzerlegbare Curven, S. 126.

verbundene singuläre Punkte und Ebenen der Congruenzen, S. 408.
Verdoppelung des Cubus, S. 527.
Verebenen der Flächen, S. 241.
Verhältniss, anharmonisches, S. 8; der 4 Curven eines Büschels, S. 142; anharmonisches der 4 Punkte des Kegelschnitts, der 4 Tangenten des Kegelschnitts, S. 76; anharmonisches der 4 Punkte der Raumcurve 4. O., 2. Species, S. 261; anharmonisches der 4 Berührungsebenen der Developpabeln 5. O., S. 352.
verkürzte und verlängerte Cycloide, S. 542; Epicycloide, S. 543; Hypocycloide, S. 543; Tractrix, S. 550.
Verrückung des R_n, S. 605.
Versiera von Agnesi, S. 527 u. ff.
Verwandtschaftsgleichung, S. 12.
vielfache Punkte einer Curve, Tangenten, S. 127; Punkte eines Systems, S. 152; Secanten der Raumcurven, S. 221 u. ff.; Punkte einer Fläche, S. 222; Polaren von Geraden, S. 232.
Vierebenencoordinaten, S. 36.
Viereck, vollständiges ebenes, S. 6.
Vier-Indices-Symbole Christoffel's, S. 602, 603.
vierpunktige Berührung, S. 204.
Vierseit, vollständiges ebenes, S. 6.
vierspitzige Curven, S. 540 u. ff.; Hypocycloiden, S. 542.
vollständige ebene Vierecke, Vierseite, S. 6; ebene n-Ecke, n-Seite, S. 48; n-kantige Winkel, n-Kante, n-flächige Winkel, n-Seite im Strahlenbündel, windschiefe n-Ecke, n-Flache, S. 49; Systeme von Curven, S. 146.
Volumina von Körpern, S. 447 u. ff.

Wellenfläche Fresnel's, S. 308 u. ff., 403.
Wendepunkte, S. 129, 177 u. ff., 446.
Wendepunktsdreieck, S. 178.
Wendetangenten, S. 129, 225.
Wendungsberührungsebene, S. 205.
windschiefe Flächen, S. 204 u. ff., 208; Quadrupel, Quintupel von Geraden der Flächen 4. O., S. 315; Regelflächen 4. O., S. 336 u. ff.; Regelflächen 5. O., S. 353 u. ff.; Regelflächen 6. O., S. 361.
Windung der Curven, S. 459.
Windungswinkel, S. 459.
Winkel, n-kantige, n-flächige, S. 49; Brocard'sche, S. 69; zweier Ebenen, S. 40; zweier Geraden, S. 23, 28, 38, 374, 628, 629, 632; n-kantige, n-flächige, S. 49; zweier Mannigfaltigkeiten im R_n, S. 581.
Winkelcoefficient der Gleichung der Geraden, S. 25.
winkeltreue Abbildung, S. 247; der Flächen auf die Ebene, S. 472; Transformation, S. 514.
Würfel, S. 565.

Zahlen, charakteristische der Flächen und Raumcurven, S. 221 u. ff.; der Flächen 5. O., S. 348; der Developpabeln 6. O., S. 359; der Developpabeln 7. O., S. 362; der windschiefen Regelflächen

nit Leitcurven, S. 364 u. ff.; eines Systems von Gebilden, S. 436 u. ff.; ler Curven im R_n, S. 594 u. ff.
rlegung der Singularitäten, S. 160.
g einer Curve, paarer, unpaarer, S. 132.
sammenhang der Riemann'schen Flächen, S. 556 u. ff., 568 u. ff.; ler Flächen, S. 556 u. ff.; der Räume, S. 562 u. ff.
sammenhangszahl, S. 560, 563.
eiblättrige Flächen, S. 568.
eifaches Hyperboloid, S. 102, 108.
eipunktige Berührung, S. 204.
eischaliges Hyperboloid, S. 102, 108.
eiseitige Flächen, S. 556 u. ff.; Räume, S. 563.

Nach Autoren benannte Theoreme, Formeln, Flächen, Curven etc.

Abel's Theoreme über transcendente Integrale, S. 152; über die Lemniscate, S. 534; Functionen, S. 267; Gleichung, S. 306.
Agnesi's Curve 3. O. oder Versiera, S. 527.
Archimedische Spirale, S. 544; Polyeder, S. 566; -sches Axiom, S. 636
Aronhold's volle Systeme von Gruppen von Doppeltangenten, S. 198, 304
Aschieri's Theorem über harmonische Complexe, S. 402.

Baecklund's Transformation, S. 495.
Battaglini's Involutionen höherer Ordnung, S. 16; symbolische Bezeichnung der Complexe, S. 379 u. ff.; Satz über Complexe 2. Grads S. 389; Complex, S. 393, 394, 402 u. ff.
Beez'sches Theorem über die Deformation der Räume, S. 605, 607.
Beltrami's Sätze über Normalencongruenzen, S. 511; über geodätische Linien, S. 482; über die Cayley'sche Fläche, S. 279; über Flächen constanter Krümmung, S. 492; über Räume constanter Krümmung S. 608; über die Römerfläche Steiner's, S. 334; Darstellung der nicht-Euclidischen Geometrie auf Mannigfaltigkeiten der Euclidischen Räume, S. 633 u. ff.
Bernoulli, Jacob, Lemniscate, S. 531 u. ff.; Satz über logarithmische Spiralen, S. 545.
Bertini, Satz über algebraische Curven, S. 142; Hauptsehnen von Raumcurven 4. O., 2. Sp., S. 262.
Bertrand's Satz über die Helixe, S. 460; Curven, S. 461.
Bianchi's Satz über Liniencongruenzen, S. 511; pseudosphärische Congruenzen, S. 511; Sätze über Räume constanter Krümmung S. 614; pseudosphärische Fläche, S. 494; Satz über pseudosphärische Flächen, S. 494; complementäre Transformation, S. 495; Theorem über die Krümmungslinien einer Fläche, siehe die Zusätze.
Böklen's Erzeugungsart der Wellenfläche, S. 311.
Bolyai's F-Flächen, S. 624.
Bonnet's Satz über den Abstand benachbarter Tangenten an Curven S. 601; conjugirte Minimalflächen, S. 499; Formel für die geodätische Krümmung, S. 481; Theorem über aufeinander abwickelbare Flächen, S. 490; Sätze über Flächen constanter mittlerer Krümmung, S. 496, 497; über Minimalflächen, S. 498.
Boubals'sche Punkte, S. 71.
Bour, Theorem über Helicoide, S. 489.
Brianchon's Satz über Kegelschnitte, S. 60, 76; Sechsseit, S. 416.
Brill's Satz über pseudosphärische Mannigfaltigkeiten, S. 614.

Brill-Noether's Satz über Curvensysteme, S. 150; Reciprocitätstheorem, S. 152; Satz über birationale Transformationen, S. 160.
Brill-Cayley's Correspondenzprincip, S. 154, 432.
Brocard's Satz über Gleitcurven, S. 522; Kreis, S. 67, 69; Winkel, S. 69; Ellipse, S. 71; Punkte, S. 67; positive, negative, S. 68.

Cantor, Georg, Axiom für die Grundlagen der Geometrie, S. 637.
Caporali's Gerade R, S. 303.
Carnot's Theoreme über algebraische Curven, S. 137; über die Kegelschnitte, S. 88.
Cartesisches Oval, S. 201, 536 u. ff.; -e Cycliden, S. 325; Blatt, S. 531; -e Coordinaten, S. 20.
Casey's bicirculäre Curven 4. Ordnung, S. 201; Satz über die Cycliden, S. 321.
Casorati's Krümmungsmass der Flächen, S. 487.
Cassini's Ovale oder Ellipsen, S. 531.
Castelnuovo's Sätze über rationale Flächen, S. 371; über algebraische Curven, S. 150.
Cayley's Sätze über algebraische Curven, S. 128; über quadratische birationale Transformationen, S. 159; über windschiefe Flächen, S. 208; über Regelflächen, S. 224; über Plancurven 4. O., S. 203; über Flächen 4. O., S. 296; über Developpable 6. O., S. 360; über Liniengeometrie, S. 378; Gleichung der Kummer'schen Fläche, S. 300, 309; Erzeugungsart der Wellenfläche, S. 311; Species windschiefer Regelflächen 4. O., S. 337 u. ff.; Gleichung der Developpabeln 6. O., S. 360; Classification der Developpabeln 6. O., S. 361; absolute Gebilde, S. 630 u. ff.; Formeln, S. 221 u. ff., 593; Formeln für Raumcurven, S. 225 u. ff.; Curve, S. 137 u. ff.; Monoidflächen, S. 214; numerisches und geometrisches Geschlecht, S. 223; unicursale Flächen, S. 237; Netz, S. 146; Moment zweier Geraden, S. 375; Cylindroid, S. 387; Regelfläche 3. O., S. 276, 398; Flächen, S. 279, 283, 396; Tetraedroid, S. 308 u. ff.; bicyclische oder bicirculäre Flächen, S. 321 u. ff.; Gleichung der Fläche 4. O. mit Doppelgerade, S. 329; Gleichung der Römerfläche, S. 332; planare Developpable, S. 362.
Cayley und *Brill'sche* Correspondenzformeln für Punktgruppen, S. 154, 432.
Cesàro's Gleichung der Astroide, S. 542.
Ceva's Theorem über Dreiecke, 1678, S. 59.
Chasles's Sätze über algebraische Curven, S. 148, 588; über cubische Plancurven, S. 182; über sphärische Kegelschnitte, S. 247; über Regelflächen beliebiger O., S. 363, 364; über cubische Raumcurven, S. 250, 251, 597; über die Charakteristiken, S. 433; über die Lemniscaten, S. 535; Correspondenzprincip, S. 16, 54, 430, 431; Classification der cubischen Plancurven, S. 187; Strictionslinie, S. 363; Erzeugungsweise linearer Complexe, S. 386.
Christoffel's Satz über algebraische Curven, S. 150; Symbole, S. 469, 474, 475, 480, 602 u. ff.
Clairaut, Satz über geodätische Linien, S. 483.
Clebsch, Sätze über die Flächen 3. Ordnung, S. 283; über die Complexe, S. 381; über die Römerfläche, S. 333, 334; Diagonalfläche, S. 282; cyclische Projectivitäten, S. 16; Doppelvier, S. 315; sym-

bolische Bezeichnung der Complexe, S. 379 u. ff.; Normalform der Complexgleichung, S. 383.
Clebsch und *Cremona*, ebene Abbildungen von Flächen 3. O., S. 293.
Clifford's Sätze über Punktgruppen, S. 152; über Curven im R_n, S. 597, 598; Flächen, S. 615.
Codazzi's Formeln, S. 470, 614, 615.
Conon's Spirale, S. 544.
Cotes, Satz über algebraische Curven, S. 137.
Cremona's Sätze über Involutionen, S. 53; über birationale Transformationen, S. 157, 158; über cubische Raumcurven, S. 250; über Raumcurven 4. O., S. 259, 262; über Flächen 4. O. mit Doppelkegelschnitt, S. 318; über die Römerfläche, S. 334; über die Flächen 5. O., S. 351; über die Regelflächen, S. 369; über cubische Plancurven, S. 180; über Flächen 3. O., S. 287; birationale Transformation, S. 236; Poloconica, S. 180; homaloidale Flächen, S. 237; homaloidales Netz, S. 146; Polsechsflach, Polarhexaeder, S. 284 u. ff.; Fundamentalpunkte der ebenen Abbildung der Fläche 3. O., S. 292; Species windschiefer Regelflächen 4. O., S. 337 u. ff., 397, 398; conjugirte Erzeugende der Developpabeln 5. O., S. 351.

Darboux's Sätze über die Römerfläche, S. 333; über natürliche Gleichungen, S. 460; über Asymptoten und Krümmungslinien, S. 480; über die Enneper'sche Fläche, S. 500; über Orthogonalflächensysteme, S. 505; über die Cassini'schen Ovale, S. 532; über Kugelgeometrie, S. 421; Cycliken, S. 514; Cartesische Cycliden, S. 325.
Delambre's Formeln für sphärische Trigonometrie, S. 65.
Del Re siehe *Re*.
Delaunay's Satz über Unduloide und Nodoide, S. 497; Curven, S. 548 u. ff.
Desargues, Satz über Kegelschnitte, S. 77; Transformation, S. 69, 513 u. ff.; Curven und Flächen, S. 513 u. ff.
Descartes, Folium, S. 531.
Dini's Satz über pseudosphärische Flächen, S. 494; pseudosphärisches Helicoid, S. 494, 550.
Dinostrates, Quadratrix, S. 551.
Diocles, Cissoide, S. 527.
Dupin's Sätze über die Indicatrix, S. 478; über dreifache Orthogonalflächensysteme, S. 505, 614; über die Focalcurven beliebiger Flächen, S. 323, 324; parabolische Cycliden, S. 327; Indicatrix, S. 205, 478, 612; Cycliden, S. 320, 321 u. ff.; siehe auch *Malus*.
Dyck, Satz über Riemann'sche Flächen, S. 574; einseitige Flächen, S. 557.

Enneper's Satz über Asymptotenlinien, S. 480; pseudosphärische Flächen, S. 494; Minimalflächen, S. 500; Flächen constanter positiver Krümmung, S. 494.
Enriques, Satz über rationale Flächen, S. 371.
Euclidischer, nicht-Euclidischer Raum, S. 607; -e Geometrie, S. 625, 633; Euclid's Postulat V, S. 617, 621 u. ff.; Elemente (*στοιχεῖα*), S. 617.
Eudoxus' Helixe, S. 552.

Euler's Sätze über die Ellipsenbogen, S. 525; über Polyeder, S. 563, 614; Formeln für sphärische Trigonometrie, S. 64; für die Krümmungsradien der Flächen, S. 477; Polyeder, S. 564; Gerade, S. 67, 70; Kreis, S. 70.

Fagnano's Sätze über die Ellipsenbogen, S. 525; über die Lemniscate, S. 534; über die Hyperbelbogen, S. 526.
Fermat's Spirale, S. 546.
Feuerbach's Satz in der Dreiecksgeometrie, S. 70; Kreis, S. 67, 70.
Frenet's Formeln für Raumcurven, S. 459, 461, 601.
Fresnel's Wellenfläche, S. 308 u. ff., 394, 403; Theorem über die Wellenfläche, S. 310; Gleichung der Wellenfläche, S. 310, 311.

Galois'sche Resolvente, S. 573.
Gauss' Doppeltheorem (Trigonometrie), S. 61; Satz über die totale Krümmung eines geodätischen Dreiecks, S. 484; totale Krümmung (curvatura integra), S. 484, 487, 605, 606; Formeln für das Krümmungsmass K, S. 487; für sphärische Trigonometrie, S. 65; für die Differentialformen von Flächen, S. 470, 615; sphärische Abbildung von Flächen, S. 473, 476, 480; Differentialgleichung der geodätischen Linien, S. 482; Krümmung der Flächen, S. 484, 487; der Mannigfaltigkeiten, S. 613.
Geiser's Erzeugungsart von Plancurven 4. O., S. 196, 200.
Gerbaldi und *Schoute*, Satz über die Wurzeln der Hesse'schen Form, S. 52.
Gergonne's Sätze über Brennlinien, S. 518.
Gerono's Lemniscate, S. 531 u. ff.
Girard's Satz über sphärische Dreiecke, S. 62.
Göpel'sche Quadrupel, S. 202, 203, 204.
Goupillière's Sinusspiralen, S. 546.
Gournerie, Maillard de la, Satz über die singulären Focalcurven, S. 324.
Goursat's Fläche, S. 503.
Grassmann's Erzeugungsart cubischer Plancurven, S. 183.
Grebe's Punkt, S. 68.

Habich's Satz über Fusspunktcurven, S. 516.
Halphen's Sätze über die Schnitte von Flächen, S. 211; über Linviencongruenzen, S. 377; über Evolutenflächen, S. 503; über die Charakteristiken, S. 433.
Hamilton, W., Satz in der Dreiecksgeometrie, S. 70; Formel für Congruenzen, S. 309.
Harnack's Satz über algebraische Curven, S. 132.
Henneberg's Minimalfläche, S. 500.
Hermite's Sätze über die Schnitte von Flächen, über elliptische Curven, S. 210; Form, S. 45.
Hesse'sche Sätze über Kegelschnitte, S. 79; Form, S. 52; Determinante, S. 55 u. ff.; Curve, S. 137 u. ff.; Erzeugungsart von Plancurven 4. O., S. 195, 200; Kernfläche, S. 233, 280 u. ff., 299; Fläche eines Flächensystems, S. 235; von 4 Flächen, S. 236.
Hesse und *Steiner*, Hexaden von Doppeltangenten, S. 197.
Hilbert's Axiome, S. 635, 636.

Hirst'scher Complex, S. 399.
Hurwitz, Sätze über Riemann'sche Flächen, S. 571, 574.
Huyghens' Satz über die Cycloiden, S. 541; Tractrix, S. 549.

Jacobi's Theoreme über die ebenen Curven, S. 127; über Schnitte von Flächen, S. 211; Curve, S. 143; Fläche, S. 233; Fläche eines Flächensystems, S. 235; von 4 Flächen, S. 236; Curve des Flächennetzes, S. 235.
Jordan's Sätze über Flächen 3. O., S. 287; über die Kummer'schen Flächen, S. 306.

Killing's Polarform des Riemann'schen Raums, S. 626.
Klein's Sätze über Diagonalflächen, S. 283; über quadratische Complexe, S. 389; über Brennflächen der Congruenzen, S. 407; über Räume constanter Krümmung, S. 592; hyperelliptische Σ-Functionen, S. 303; Coordinaten, S. 375, 391, 403; lineare Involutionscomplexe, S. 388 u. ff.; Singularitätenfläche der Complexe, S. 380; System der sechs Fundamentalcomplexe, S. 388; Riemann'sche Flächen in projectivem Sinn, S. 575 u. ff.; einfache Riemann'sche oder einfach elliptische Geometrie, S. 626; doppelte Riemann'sche oder doppelt elliptische Geometrie, S. 626.
Klein-Lie, Satz über die logarithmische Spirale, S. 545; confocale quadratische Complexe, S. 391.
Kraus, Satz über Punktcurven, S. 153.
Kronecker's Sätze über algebraische Functionen, S. 214; über Mannigfaltigkeiten k^{ter} Dimension, S. 586.
Kuen's Fläche constanter positiver Krümmung, S. 494.
Kummer's Theorem über Flächen 4. O. mit unendlich vielen Kegelschnitten, S. 312; Fläche, S. 295 u. ff., 299 u. ff.; 359, 389; fünf Kegel, S. 314; Gleichung der Flächen 4. O. mit Doppelgerade, S. 328; Gleichung der Römerfläche, S. 332; Gleichung der Kummerschen Fläche, S. 300.

Lagrange, Satz über räumliche Punktsysteme, S. 34; partielle Differentialgleichung der Minimalflächen, S. 498.
Laguerre's Satz über metrische Relationen in projectiver Form, S. 28, 628; singuläre Focalcurven, S. 324; Definition des Winkels zweier Geraden, S. 28.
Lambert's Satz über die Dreiecke, S. 623; Hypothese des stumpfen und des spitzen Winkels, S. 622, 634; Postulat, S. 622.
Lamé's Differentialgleichungen für dreifache Orthogonalsysteme, S. 505, 604, 610; elliptische Coordinaten, S. 506.
Lancret's rectificirende Ebene, S. 465.
Landen's Satz über Hyperbelbogen, S. 526.
Legendre's Sätze über die sphärische Trigonometrie, S. 67; über die Winkel des Dreiecks, S. 622, 623; lignes minimes, S. 486; Modul, S. 534.
Lemoine's Kreis, S. 67, erster S. 68, zweiter S. 68; Hexagon, S. 68; Punkte, S. 67, 68.
Lie's Satz über die Steiner'schen Flächen, S. 333.
Lie siehe auch *Klein*.

Liouville's Formel für die Gauss'sche Krümmung der Flächen, S. 488; Typus von Flächen, S. 472, 483, 615; geodätische Linien, S. 486.
Lobatschefskij's Raum, S. 607; Geometrie, S. 623 u. ff.; 631, 633; Grenzlinie, Grenzfläche (Oricyclus, Orisphaera), S. 624.
Loria's Sätze über Kugelgeometrie, S. 421; über radiale Curven, S. 517; Pseudoversiera, S. 529; Classification der Cycliden, S. 422.
Loria siehe auch *Segre*.
Lüroth's Satz über Curven, S. 370.

Maclaurin's Theoreme über Kegelschnitte, S. 77; über algebraische Curven, S. 137; über cubische Plancurven, S. 179; Dreitheilungscurve (Trisectrix), S. 521, 527.
Malus-Dupin, Satz über Normalencongruenzen, S. 511, 518.
Menelaus, Satz über die projectiven Eigenschaften der Dreiecke, S. 59.
Meusnier's Theorem über Krümmungsradien der Flächen, S. 478; über Minimalregelflächen, S. 499.
Milinowski's Satz über Plancurven 4. O., S. 194.
Minding's Theorem über pseudosphärische Trigonometrie, S. 495.
Möbius, Sätze über Doppelverhältnisse, S. 9; über räumliche Punktsysteme, S. 34; über die cubischen Raumcurven, S. 251; über einseitige Flächen, S. 557; Nullpolaritäten oder Nullsysteme, S. 406; Formel für Doppelverhältnisse, S. 17; barycentrische Coordinaten, S. 45.
Möbius-Monge, Satz über Dreiecke, S. 19.
Monge, Sätze über Flächen 2. Ordnung, S. 121; über räumliche Punktsysteme, S. 34; Arête de rebroussement, S. 207; Charakteristik, S. 464; Moulures, S. 476.
Moutard, Sätze über anallagmatische Curven, S. 514; über die Cycliden, S. 323.

Napier'sche (Neper'sche) Analogie für ebene Dreiecke, S. 61; Analogie für sphärische Dreiecke, S. 65.
Neil'sche Parabel, S. 527.
Newton's Satz über algebraische Curven, S. 136; Classification der cubischen Plancurven, S. 186; Construction der Cissoide, S. 528.
Nicomedes'sche Conchoide oder Muschellinie, S. 536 u. ff.
Noether's Sätze über algebraische Curven, S. 128; über Abbildbarkeit der Flächen, S. 239; Fläche 6. O., S. 358.
Nonius, Loxodrome, S. 553.

Ocagne, Maurice d', Symmediane, S. 67.

Painvin's Complex 2. Gr., S. 394, 403.
Pappus, Satz über Kegelschnitte, S. 90.
Pascal, Ernesto, Configuration der Geraden der Flächen 3. O., S. 289; rationale Gleichung der Kummer'schen Fläche, S. 303; Berührungsflächen 6. O. der Kummer'schen Fläche, S. 359; Raumcurve 6. O. vom Geschlecht 4, S. 267, 268; Theorem über die Gleichung, von welcher die Bestimmung der 120 dreifachen Tangentialebenen der Raumcurven 6. O. abhängt, S. 268.
Pascal, Etienne, der Vater von Blaise Pascal, Schnecke (limaçon), S. 202, 522, 536 u. ff.

Pascal, Blaise, Satz über Kegelschnitte, S. 60, 76; Sechsecke, S. 289.
Pasch, Satz über die Singularitätenflächen der Complexe, S. 380.
Pezzo, del, Sätze über Flächen im R_n, S. 590; über die Veronese'schen Flächen, S. 592.
Picard, Satz über rationale Flächen, S. 371.
Plateau's Problem, S. 501.
Platonische Polyeder, S. 565.
Plücker's Theorem über algebraische Curven, S. 128; Formeln für algebraische Curven, S. 130, 192, 225, 593, 594; Satz über die Singularitätenflächen der Complexe, S. 380; Classification der cubischen Plancurven, S. 187; Gestalt der Plancurven 4. O., S. 198; hyperboloidale Coordinaten, S. 244; Strahlencoordinaten, S. 373; Complexfläche, S. 379; Meridian- und Aequatorialfläche, S. 379; Gleichung des Cylindroids, S. 387.
Poncelet's Sätze über algebraische Curven, S. 128; über Schnitte von Flächen, S. 211; über Raumcurven 4. O., S. 256; Centrum der harmonischen Mittel, S. 51; Satz über Kegelschnitte, S. 96; Polygone, S. 97.
Puiseux' Satz über die Helixe, S. 460, 552.

Quetelet's secundäre Brennlinien oder antikaustische Linien, S. 518; schiefe oder focale Strophoide, S. 530.

Re, del, Construction der Flächen 5. O., S. 349.
Reye, Sätze über Raumcurven 4. O., S. 257; über die Kummer'sche Fläche, S. 306; Complex, S. 403 u. ff.; nicht homogenes Coordinatensystem, S. 420; Erzeugungsweise des tetraedralen Complexes, S. 404.
Ribaucour's Satz über isotrope Congruenzen, S. 512; mittlere Evolute, S. 502; isotrope Congruenz, S. 512; Curven, S. 544 u. ff.
Riccati's Gleichungen, S. 460, 470.
Ricci, Classe der Mannigfaltigkeiten, S. 602.
Riemann's Sätze über die Erhaltung des Geschlechts, S. 159; über die Moduln von Curven von gegebenem Geschlecht, S. 160; über das Geschlecht zweier Curven, S. 162; über die Riemann'schen Flächen, S. 570; über die Räume, S. 607; Flächen S. 556 u. ff., 568 u. ff.; Flächen in projectivem Sinn von Klein, S. 575 u. ff.; Krümmung des Raums R_n, S. 605 u. ff.; Raum, S. 607, 633; Form des Linienelements, S. 607; Geometrie, S. 625, 633, 634.
Riemann-Roch'sches Theorem über Punktgruppen, S. 152.
Rohn's Gleichung der Kummer'schen Fläche, S. 302; Species windschiefer Regelflächen 4. O., S. 338.
Rosenhain'sche Quadrupel, S. 302, 303, 304.

Saccheri's Satz über die Geraden, S. 623; Hypothese des stumpfen oder spitzen Winkels, S. 622; Postulat, S. 622; Satz über die Dreieckswinkel, S. 622, 623.
Salmon's Erzeugungsart von Flächen 3. O., S. 278.
Salmon-Sturm's Construction der 27 Geraden der Flächen 3. O., S. 286.
Sarrus, Sätze über Brennlinien, S. 518.
Scherk's Translationsfläche, S. 501.

Schläfli's Doppelsechs, S. 285; Bezeichnung, S. 289; Classification der Flächen 3. O., S. 291.
Schröter'sche Punkte, S. 70.
Schubert's Princip der Erhaltung der Anzahl oder der gleichgültigen oder speciellen Lage, S. 425.
Schumacher's Art einer Congruenz, S. 405.
Schur's in Involution liegende Complexe 2. G., S. 391; Theorem über die Riemann'sche Krümmung eines Raums, siehe die Zusätze.
Schwarz, H. A., Sätze über Developpable ungerader Ordnung, S. 362; über die Curven, S. 371; über die windschiefen Regelflächen 5. O., S. 356; Gleichung der Developpabeln 5. O., S. 352; charakteristische Zahlen der Developpabeln 7. O., S. 362; Classification der windschiefen Regelflächen 5. O., S. 354; Minimalfläche, S. 501.
Segre's Sätze über quadratische Gebilde im R_n, S. 587, 588; über Regelflächen im R_n, S. 590; homofocale quadratische Complexe, S. 391; singuläre Gerade 2., 3. O. von Complexen 2. G., S. 391; Antiprojectivitäten, S. 44.
Segre und *Loria,* Satz über harmonische Complexe, S. 402.
Serret's Satz über Asymptotencurven, S. 481; Formeln für Raumcurven, S. 459, 461, 601.
Simpson'sche Gerade, S. 67, 72.
Stahl's Fundamentalinvolution, S. 271.
Staudt's Satz über Kegelschnitte, S. 79; Definition der Projectivität, S. 12, 18.
Steiner's Theoreme über Kegelschnitte, S. 77; in der Liniengeometrie, S. 378; über Fusspunktcurven, S. 72, 516; über Flächen 3. O., S. 278; Erzeugungsart der Flächen 3. O., S. 278; Gruppe, S. 52; Curve, S. 137 u. ff.; Polygone, S. 179; Punktepaar, S. 179; Hypocycloide, S. 543; conjugirte Triederpaare, S. 285; Römerfläche, S. 233, 281, 295, 313, 331 u. ff., 339, 396, 592.
Stringham's Satz über Polyeder, S. 568.
R. Sturm's Theoreme über cubische Flächen, S. 279, 282; Doppeldrei, S. 285; Erzeugungsweise linearer Complexe, S. 386; consinguläre quadratische Complexe, S. 391; Rang einer Congruenz, S. 405.
Sturm-Segre'sche Formel für Curven auf Regelflächen, S. 230, 591; Formel über Ordnung und Geschlecht von Curven, S. 591.
Suworoff, Satz über Räume constanter Riemann'scher Krümmung, S. 609, 610.
Sylvester's Pentaeder, S. 280 u. ff.; Erzeugungsweise linearer Complexe, S. 386.

Taylor's Kreis, S. 67, 71.
Tucker's Satz über radiale Curven, S. 517; Kreis, S. 67, 71.

Veronese's Fläche V_2^4 im R_n, S. 589 u. ff.; Formeln für die charakteristischen Zahlen von C^m im R_n, S. 596.
Vigarié'sche Punkte, S. 70.
Viviani's Fenster, S. 554 u. ff.
Voss, Satz über die Krümmung der Mannigfaltigkeiten, S. 613.

Wallace'sche Gerade, S. 72.
Wallis, Postulat, S. 622.

Watt'sche Curve, S. 531 u. ff.
Weber's Satz über Punktgruppen, S. 154.
Weddle'sche Fläche, S. 297.
Weierstrass, Satz über Riemann'sche Flächen, S. 570; Formeln für die Coordinaten der Punkte einer Minimalfläche, S. 498, 499, 500; elliptische Functionen, S. 258; Theorie der Elementartheiler, S. 123, 395, 588; Coordinatensystem für die Räume constanter Krümmung, S. 609.
Weingarten's Theorem über Evolutenflächen, S. 503; Formeln für die Coefficienten der zweiten Differentialform der Flächen, S. 475; Applicabilitätsprincip, S. 496; Fläche, S. 504; dreifache Systeme, S. 507, 616.

Zahradnik's Cissoide, S. 528.
Zeuthen's Sätze über Flächen 4. O. mit Doppelkegelschnitt, S. 316, 317; Formel für das Geschlecht von Curven, S. 161; Satz über abzählende Geometrie, S. 429; Classification der Flächen 4. O. mit Doppelkegelschnitt, S. 317.

Zusätze und Berichtigungen zu Band 1.

. 8, Z. 16. Füge hinzu: Die Quaternion genügt schon der Gleichung 2ten Grades:

$$z^2 - 2a_0 z + (a_0{}^2 + a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2) = 0;$$

wenn diese Gleichung mit z multiplicirt und dann an die Stelle von z^2 der aus ihr selbst entnommene Werth gesetzt wird, so erhält man die im Text angegebene Gleichung 3ten Grades.

Zu der Literatur über die Quaternionen füge hinzu: Graefe, *Vorlesungen über die Theorie der Quaternionen,* Leipzig 1883.

23 und 24. Bemerkenswerth sind noch die folgenden Formeln:

$$\binom{n}{k} + \binom{n-1}{k} + \cdots + \binom{k}{k} = \binom{n+1}{k+1},$$

$$1 \cdot \binom{n}{k} + 2 \cdot \binom{n-1}{k} + \cdots + (n-k+1)\binom{k}{k} = \binom{n+2}{k+2},$$

$$\binom{2}{2}\binom{n}{k} + \binom{3}{2}\binom{n-1}{k} + \cdots + \binom{n-k+2}{2}\binom{k}{k} = \binom{n+3}{k+3},$$

. . . . . .

$$\binom{h}{h}\binom{n}{k} + \binom{h+1}{h}\binom{n-1}{k} + \cdots + \binom{n-k+h}{h}\binom{k}{k} = \binom{n+h+1}{k+h+1}.$$

, 37, Z. 9 v. u. Lies exercices statt exercises.

, 60 und 61. Die Werthe von s_p, welche den Werthen der Function entsprechen, die Riemann mit $\zeta(p)$ bezeichnete, sind für gerade p als Functionen von p bekannt; für beliebige ungerade p lässt sich dagegen eine ähnliche allgemein gültige Formel nicht angeben. Siehe Lerch, *Jornal de sciencias math. e astr.,* Porto 1901.

, 61 und 72. Die Euler'sche Constante ist, wie im Kapitel 18, mit A zu bezeichnen, nicht mit C.

, 92, Z. 3. Ueber den casus irreducibilis bei cubischen Gleichungen vergl. Hölder, Math. Ann., 38.

„ 96, Z. 13 v. u. muss es am Schluss der Gleichung heissen:

„$+ x^{p^{\alpha}-1} + 1 = 0$“ statt „$+ x^{p^{\alpha}-1} = 0$.“

„ 99, Z. 6. Statt „und früher in Harriot u. s. w.“ lies: der Satz wird auch irrthümlich nach Harriot genannt. Ueber die Geschichte des Satzes vergl. die Anmerkungen der deutschen Ausgabe von Fourier's *Analyse des équat. déterminées*, Ostwald's Klass. der exacten Wiss., N. 127, p. 247.

S. 99. In der Fussnote lies: *Fourier* statt *Jourien.*

„ 141, Z. 7, 6, 5, 4, 3 lies hinter der Klammer: „Das Integral ist schon lange bekannt; Lobatto, *Crelle,* 9 hat eine einfache Methode zu seiner Ermittelung angegeben" statt „siehe Lobatto *Crelle,* 9".

„ 142, Z. 11 lies:

„$\int \log(a+\cos x)\,dx = \int \frac{da}{\sqrt{a^2-1}} \arccos\frac{1+a\cos x}{a+\cos x}$, $a>1$,

die Formel soll die Ermittelung des bestimmten Integrals zwischen 0 und π erleichtern", anstatt:

„$\int \log(a+\cos x)\,dx = \frac{1+a\cos x}{a+\cos x}$."

„ 142, Z. 9 v. u. lies 25 statt 15.

„ 145. In den Integralen:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\log(\log x)} \quad \text{und} \quad \int_0^1 \log(\log x)\,dx$$

setze man $\log\left(\log\frac{1}{x}\right)$ an die Stelle von $\log(\log x)$; man füge hinzu, dass der Werth des 1ten dieser Integrale von Bierens de Haan auf S. 57 seiner *Nouvelles tables d'intégrales définies* Leyden 1867 angegeben wurde.

„ 146, vorletzte Zeile lies *ungerade* statt *gerade,* letzte Zeile *gerade* statt *ungerade.*

„ 147, Z. 3 füge hinter $\int_0^\pi \cos ax \cos bx\,dx = 0$ hinzu: „(a und b sind ganze Zahlen und einander nicht gleich)".

„ 172 am Ende füge hinzu: Ueber die Riccati'sche Gleichung siehe auch: Lie-Scheffers, *Vorlesungen über continuirliche Gruppen* Leipzig 1893, Kap. 24.

„ 176, Z. 2. Statt „Ann. di mat., Bd. 19" lies: „Torelli, Ann. di mat., Bd. 19."

„ 177 lies *Brassinne* statt *Brassine.*

„ 197. Zur Einführung in die allgemeine Theorie der Differentialgleichungen empfehlen wir das 1901 erschienene *Lehrbuch der Differentialgleichungen* von Liebmann und zur ersten Einführung in die functionentheoretische Behandlung der Differentialgleichungen Ludwig Schlesinger: *Einführung in die Theorie der Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Variabeln* Sammlung Schubert, 1900.

„ 198, Z. 17 lies „Charakteristiken" statt „charakteristischen Gleichungen".

„ 201, Z. 7. Anstatt „zwischen den Variabeln integrirbar" setze „zwischen den Variabeln und m willkürlichen Constanten integrirbar" und füge am Schluss des Satzes hinzu: Ueber die Systeme die mit m Relationen zwischen den Variabeln aber einer *kleineren*

Anzahl von Constanten integrirbar sind, siehe E. Pascal, *Rend. Ist. Lomb.*, (2), 35, 1902.

203. Ueber das Pfaff'sche Problem ist inzwischen das treffliche Werk: *Vorlesungen über das Pfaff'sche Problem und die partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung* von Ed. v. Weber, Leipzig 1900 erschienen. Derselbe Autor hat neuerdings in den Math. Ann., 55 den Fall behandelt, in dem bei dem Pfaff'schen Problem nicht eine einzige Gleichung, sondern ein System von Gleichungen gegeben ist.

„ 203, Z. 16 v. u. Bezüglich der Arbeit von Russjan, deren Resultate nicht exact sind, vergl. E. v. Weber, *Remarques sur un mémoire de* M. Roussiane, Odessa 1901 und *Math. Ann.* 55.

„ 203. Füge am Ende der Seite hinzu: „Nach dem Druck dieses Bandes sind verschiedene Arbeiten von E. Pascal über das Problem der totalen Differentialgleichungen 3ter Ordnung und n^{ter} Ordnung und über die Systeme totaler Differentialgleichungen 2ter Ordnung erschienen. Siehe *Compt. Rend.*, 5. März 1900; *Rend. Ist. Lombardo*, (2), 33, 15. März 1900 und 17. Mai 1900; *Math. Ann.*, 54; *Rend. Ist. Lomb.*, (2), 34, 1901. Derselbe Autor hat in letzter Zeit die Invariantentheorie der totalen Differentialausdrücke 2ter Ordnung als Erweiterung der analogen Theorie der gewöhnlichen Pfaff'schen Gleichungen (1ter Ordnung) zu studiren begonnen. Die bezüglichen Arbeiten E. Pascal's sind: *Introduzione alla teoria invariantiva delle equazioni di tipo generale ai differenziali totali di second' ordine, Ann. di mat.*, (3), 7, 1901; *Un teorema della teoria invariantiva delle espressioni ai differenziali totali di second' ordine, Rend. Ist. Lomb.*, (2), 34, 1901.

„ 206, Z. 7 lies „Transformation" statt „Substitution".

„ 255. Nach dem Druck des ersten Bandes ist noch das ausgezeichnete Lehrbuch der Variationsrechnung von A. Kneser, 1900 erschienen. Ferner hat Hilbert durch neue Methoden die Variationsrechnung in hervorragender Weise bereichert. Vergleiche Hilbert's Vortrag vor der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (Jahresbericht, Bd. 8, p. 185), die unter Hilbert's Leitung verfasste Dissertation von Charles A. Noble, *Eine neue Methode der Variationsrechnung*, Göttingen 1901, sowie Hilbert, *Ueber das Dirichlet'sche Problem (Festschrift zur Feier des 150-jährigen Bestehens der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften)*.

„ 321. Von Interesse sind auch die folgenden Theoreme: *Das Verschwinden der Functionaldeterminante zweier binärer Formen derselben Ordnung ist nothwendige und hinreichende Bedingung, damit die beiden Formen sich um einen constanten Factor unterscheiden.*

Das Verschwinden der Functionaldeterminante von $n+1$ Formen mit $n+1$ Variabeln und von derselben Ordnung ist nothwendige und hinreichende Bedingung, damit die (linear unabhängig vorausgesetzten) Formen (bis auf einen gemeinsamen Factor) binäre Formen zweier anderer Formen (mit $n+1$ Variabeln) derselben Ordnung oder auch $(n+1)$-stufige Formen von $n+1$ Formen derselben Ordnung seien, deren Functionaldeterminante identisch Null ist.

Näheres über dieses letzte allgemeine Theorem findet man bei Bertini, *Rend. Acc. Lincei*, (5), 10, 1901.

S. 333, Z. 15, 16, 17, 28 lies „r" statt „n".

„ 338, Z. 3 und 15 v. u. lies „Büschel" statt „Schar".

„ 339. Zu der Literatur über die ternären cubischen Formen füge hinzu: Brioschi, *Ann. di mat.*, (2), 7, p. 189, worin die Zerlegung in drei lineare Formen, und *Atti Acc. Lincei*, (2), 3, 1875—76, p. 89, worin die Zerlegung in eine lineare und eine quadratische Form behandelt wird.

„ 341. Zu der Literatur über die biquadratischen ternären Formen füge hinzu: Brioschi, *Ann. di mat.*, (2), 7, p. 202 und *Atti Acc. Lincei*, (2), 3, 1875—76, p. 91.

„ 345, Z. 9 lies „der drei Fälle" statt „der beiden Fälle".

„ 353, Z. 20. Statt *espaces* lies *espaces.*

„ 365, Z. 15 v. u. Statt *Aufsatz* lies *Buch.*

„ 446. Eine weitere Arbeit über die complexe Multiplication der elliptischen Functionen ist von Halphen, *Journ. de math.*, (4) 5, 1889, reproducirt in seinem *Traité des fonctions elliptiques*, 3 p. 151. Sie handelt speciell von der Multiplication mit $\sqrt{-23}$. Mit demselben Gegenstande beschäftigt sich auch Brioschi, *Ann. di mat.*, (2), 24, 1896. Man vergleiche namentlich den Artikel von H. Weber, *Ueber complexe Multiplication* in der Encyklopädie der math. Wissenschaften, Bd. 1, p. 715.

„ 456. Es heisst im Sing. „das Quadrupel" und nicht „die Quadrupel".

„ 477. In der Mascheroni'schen Formel ist, wie auf S. 145, $\log(\log x)$ in $\log\left(\log\frac{1}{x}\right)$ umzuändern.

„ 482, Z. 16. Füge hinzu: Neuerlich hat sich Landau, *Crelle*, 12 mit diesem von Legendre vermutheten Satz beschäftigt. Er lautet, präciser formulirt: *Nach Annahme einer beliebig kleinen positiven Grösse δ lässt sich eine endliche Anzahl von Intervallen angeben, deren Gesammtlänge $< \delta$ ist, derart, dass der Werth von $\Gamma(z)$ für jedes reelle Argument mittelst einer endlichen Anzahl algebraischer Operationen durch die Werthe ausdrückbar ist, welche die Gesammtfunction für eine endliche Anzahl passend gewählter Argumente annimmt, welche diesen Intervallen angehören.*

„ 486, Z. 6 v. u. setze auf der rechten Seite der Gleichung $z^{-1}\log(1+z)$ statt $z\log(1+z)$.

„ 489, Z. 2 v. u. Statt „*Math. Ann.*, 40 und" lies „*Math. Ann.* 40; *Hurwitz*, ib., 38 und".

„ 503. Füge hinzu: Das allgemeine Integral der Lamé'schen Gleichung (der Gleichung Z. 7 v. o.) hat Hermite gefunden, *Feuilles lithographiées du Cours de 1872 à l'école polytechnique.* Vergl. hierzu: E. Picard, *Traité d'analyse*, t. 3, p. 406 u. ff.

„ 516, Z. 3. Lies $3^{2^{2^n}} - 1$ statt $3^{2^{2^n}} + 1$ und füge hinzu: Mit Ausnahme des Falles $n = 0$.

„ 516, Z. 17 v. u. Füge hinzu: Dieses Theorem von Sophie Germain gründet sich auf die einfache Identität:

$$a^4 + 4 = (a^2 - 2a + 2)(a^2 + 2a + 2).$$

516. Bemerkenswerth ist auch das folgende sogenannte Goldbach'sche Theorem, das sich aus der Erfahrung ergiebt und nicht bewiesen ist (Briefe Goldbach's und Euler's vom 7. und 30. Juni 1742; *Correspondance math. et phys. de quelques célèbres géomètres du 18me siècle,* vol. 1, St. Petersburg, 1843, S. 127 u. 135): *Jede gerade Zahl ist immer die Summe zweier Primzahlen.* Siehe Stäckel, *Gött. Nachr.,* 1896, S. 292; Landau, *Gött. Nachr.,* 1900.

318, Z. 3 v. u. Statt „Piltz, Diss." lies „Piltz, Habilitationsschrift".

519, Z. 5. Füge hinzu: Hadamard, *Bull. de la soc. math. de France,* 24, 1896.

519, Z. 8 und 9. Tschebyscheff hat nur bewiesen, dass, wenn $\lim_{x=\infty}\left(\frac{x}{\varphi(x)} - \log x\right)$ existirt, der Grenzwerth -1 ist; die Existenz des lim folgt erst aus den 1899 von de la Vallée-Poussin bewiesenen Sätzen.

518 und 519. Zu den Arbeiten über die Primzahlen füge noch hinzu: Mangoldt, *Crelle,* 119; Landau, *Bull. de la soc. math. de France,* 28, 1900; Torelli, *Sulla totalità dei numeri primi sino ad un limite assegnato, Atti Acc. delle scienze di Napoli,* (2), 11, 1901, preisgekrönte Arbeit, welche alle Resultate in Bezug auf die Primzahlen enthält, zu denen man bis jetzt gekommen ist.

520, Z. 17. Die Function μ nennen einige Autoren auch die Mertens'sche; sie ist aber vor Mertens bekannt gewesen; schon Möbius hat sich mit ihr beschäftigt. Zwei wichtige Formeln über sie sind:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} = 0 \quad \text{und}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)\log n}{n} = -1.$$

Die erste Formel wurde von Euler, *Introd. in analysin infinit.,* 1, Lausanne 1748, ch. 15, n° 277 angegeben und zuerst von v. Mangoldt, *Berl. Sitzungsber.,* 1897, p. 835, dann von Landau, *Dissert.,* Berlin 1899 und von de la Vallée-Poussin, Kap. 6 seines auf S. 519 citirten Aufsatzes über die Riemann'sche Function $\zeta(s)$ bewiesen. Den zweiten Satz hat ohne strengen Beweis Möbius, *Crelle,* 9, 1832, p. 122 angegeben und später Landau, *Compt. Rend.,* 1899; *Math. Ann.,* 54 bewiesen.

„ 521, Z. 13 v. u. Füge hinter „die Function $E(x)$" hinzu: „auf elementarem Wege in die schon von Fourier gekannten trigonometrischen Reihen etc."

„ 587, Namenregister, Z. 15 v. o. lies 478 statt 488.

„ 587, „ lies *Armenante* statt *Armenate.*

„ 587, „ Z. 6 v. u. lies 317 statt 316.

„ 588. Der unter Bessel aufgeführte Aufsatz: Math. Ann., 1, S. 290, 298 ist von A. Bessel, die anderen Arbeiten sind von dem berühmten Astronomen Fr. W. Bessel.

„ 593, lies *Dostor* statt *Doster.*

S. 594, Z. 8 schiebe zwischen S. und der Zahl 480 die Zahlen 47
475 ein.
„ 594 ist zu Fourier hinzuzufügen: *Analyse des équat. déterm*
Paris 1831, p. 99.
„ 595, Z. 4 v. u. schalte zwischen die Zahlen 269 und 292 die Zal
278 ein.
„ 595 füge zu den Citaten unter Gordan hinzu: *Crelle,* 69; *Mat*
Ann., 2, S. 278.
„ 596 schreibe Halphen statt Halphén.
„ 597. Harbordt ist auch auf S. 290 citirt.
„ 598. Holzmüller ist auf S. 366 citirt, nicht auf S. 336.
„ 599 ist der Absatz mit Jourien zu streichen.
„ 599. Zu Klein füge hinzu: Ausserdem S. 374.
„ 601, Namenregister, füge hinzu: *Laplace*, Mém. de l'Ac. de Pari
1764, S. 91; ib., 1772, S. 91, 175; ib., 1773, S. 196, 198; ib., 177
S. 198; Traité de mécanique céleste, 5 Bde., Paris 1799—182
2. éd., ib., 1829—1839, S. 492, 497; Mém. Sav. étr., 1785, S. 49
Théorie analytique des probabilités, Paris 1812, 1814, 1820, 4. éd
ib., 1847, S. 573.
„ 602. Bei Liouville füge hinzu: *Journ. de math.,* (2), 2, p. 51
„ 603. Die unter Meyer, Franz aufgeführten Vorlesungen üb
die Theorie der bestimmten Integrale sind nicht von Profess
Dr. Franz Meyer in Königsberg, sondern von Dr. phil. Gusta
Ferdinand Meyer, ehemal. Privatdocenten an der Universit
Göttingen, und sind bei Teubner erschienen.
„ 603, schreibe *Méan* statt *Méant.*
„ 606. lies *Puissant* statt *Puisant.*
„ 607, zu Scheffers füge hinzu: *Math. Ann.*, 1891, 1893, S. 9.
„ 611, schreibe Wiman statt Wimann.
„ 611, die unter Weber, H. aufgeführte Arbeit: *Rend. Palermo,* 1
S. 203 ist nicht von Professor Dr. Heinrich Weber, sondern v
dem Privatdocenten Dr. Eduard v. Weber in München.

Zu Band 2.

S. 16, Z. 15 v. u. lies „Kap. 5, § 4 und Kap. 15, § 2" statt „Kap. 1
§ 3".
„ 67, Z. 9 lies „1779" statt „1799".
„ 73, Z. 14 lies *„Picquet"* statt *„Piquet".*
„ 77, Z. 2 v. u. lies „vier" statt „drei".
„ 97. Schalte man nach Z. 5 ein: *„Schliessungsinvarianten* si
solche, die, gleich Null gesetzt, die Bedingung angeben, unt
welcher dem ersten Kegelschnitt eingeschriebene und dem zweit
umschriebene Polygone existiren. *Sie sind Functionen der beid
anharmonischen Verhältnisse α, α′ der vier Schnittpunkte der beid
Kegelschnitte, wenn diese Punkte als dem ersten bez. dem zweit
Kegelschnitt angehörig betrachtet werden.*

Bemerkenswerth ist der Satz:

*Es giebt Vierseite, welche dem ersten Kegelschnitt eingeschrieb
und dem zweiten umschrieben sind, wenn*

$$(\alpha'^2 - \alpha)(\alpha'^2 - 2\alpha' + \alpha)(\alpha'^2 - 2\alpha'\alpha + \alpha) = 0 \text{ ist.}$$

Dreiecke dagegen, welche dem ersten eingeschrieben und dem eiten umschrieben sind, existiren, wenn

$$\alpha^2 - 2\alpha'(2\alpha'^2 - 3\alpha' + 2)\alpha + \alpha'^4 = 0 \text{ ist.}$$

Ueber die Schliessungsbedingungen für Polygone von einer ös„eren Anzahl von Seiten siehe Halphen, *Fonct. ellipt.*, Bd. 2, 377.

4, Z. 5 v. u. lies „Seydewitz" statt „Seidewitz".

1, Z. 26. Füge hinter „ausdrücken" hinzu: Lüroth hat nachwiesen, dass die Coordinaten eines Punkts einer unicursalen rve sich stets derartig als rationale Functionen eines Parateters darstellen lassen, dass die Werthe des Parameters und die nkte der Curve sich gegenseitig ein-eindentig entsprechen. üroth, *Beweis eines Satzes über rationale Curven, Math. Ann.*, 1875, p. 163.

8, Z. 6 v. u. füge hinzu: Der Nöther'sche Beweis kann nicht s vollständig erbracht angesehen werden. Vergl. Segre, *Atti cc. Torino*, 36, 1901. Auf die Arbeit von Segre folgte ein Auftz von Castelnuovo, *Atti Acc. Torino*, 36, 1901, in dem der atz streng bewiesen wird.

32, Z. 7. Lies 1882 statt 1883.

81, Z. 12 lies „1706" statt „1704".

81, Z. 18 lies „*Bruxelles*" statt „*Paris*".

17, Z. 4 lies „1857" statt „1856".

32, Z. 5 lies *Tanturri* statt *Tanturini*.

71, Z. 5 v. u. lies „*Prag. Berichte*, 1883" statt „*Prag. Berichte*, 882".

79, Z. 13 lies „Eckardt" statt „Eckhardt".

37, Z. 15 lies „5 Unterfälle" statt „4 Unterfälle".

70, Z. 20 lies: „das Theorem für rationale Flächen" statt „dieses heorem".

02, Z. 8 lies „*Mem. Acc. Torino*, (2), 36, 1884" statt „*Atti Acc. Torino*, 36, 1884".

30, Z. 5 v. u. lies „Correspondenzprincip" statt „Coincidenzprincip".

60. Schreibe „equazioni intrinseche" statt „equazioni intrinsiche".

75, Z. 15 v. u. lies „*Ann. di mat.*, (2), 1, 1867" statt „*Ann. di nat.*, (1), 1, 1867".

76, Z. 8 füge hinzu: Neuerdings hat Bianchi, *Rend. Acc. Lincei*, 5), 10, December 1901, die folgenden Sätze bewiesen:

Auf einer beliebigen Fläche lässt der Ort der Osculationskreise der Krümmungslinien eines Systems längs einer Krümmungslinie des 2ten Systems diese Kreise als Krümmungslinien zu.

Die Fläche, welche der Ort der Osculationskreise einer beliebigen Raumcurve ist, lässt diese Kreise als Krümmungslinien zu.

502, Z. 18 v. u. lies „*Ann. di mat.*, (1), 7" statt „*Ann. di mat.*, (2), 7".

502, Z. 19 lies „*Journ. de Liouville*" statt „*Crelle*".

514, Z. 6 v. u. lies „Curve" statt „Fläche".

526, Z. 9 v. u. lies „1825" statt „1826".

564, Z. 13 lies „1894" statt „1864".

564, Z. 18 lies „1801" statt „1809".

S. 582, Z. 18 lies „1899“ statt „1900“.

„ 583, Z. 2 lies „Cayley, *6. Memoir upon quantics, Phil. Tra* 1859“ statt „Cayley, *Phil. Trans.*, 93, 1859“.

„ 606. Füge hinzu: Bemerkenswerth ist das Theorem von Schur: *W die Riemann'sche Krümmung eines Raums in jedem einzel Punkt nach jeder beliebigen Flächenorientirung constant ist, kann sie auch nicht von Punkt zu Punkt variiren, und der R ist von constanter Krümmung.* Schur, *Math. Ann.*, 27; Bianc *Rend. Acc. Lincei*, (5), 11. 1. Sem. 1902.

„ 636, Z. 10 v. u. Soeben erscheint in den *Transactions of the A rican mathematical society*, Vol. 3, January 1902 eine Arbeit E. H. Moore: *On the projective axioms of geometry.* Diese Ar untersucht die von Hilbert sogenannten Axiome der Verknüpf und Anordnung, hält zwar Schur's Bemerkungen über die Rec tion der Hilbert'schen Axiome der Gruppen I und II nicht für treffend, kommt aber auch zu dem Schluss, dass die Hilbert'sc Axiome der Gruppen I und II sich reduciren lassen.

„ 664. Von den unter Torelli aufgeführten Arbeiten ist die er *Rend. Acc. Lincei*, 1890, S. 561 von Prof. Tonelli zu Rom, zweite: *Sulla totalità* etc. von Prof. Torelli zu Palermo.

SEP 13 198

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY

QA
37
P375
Bd.2

Pascal, Ernesto
Repertorium der höheren
Mathematik

P&ASci.

74